MAT380

Algèbre Linéaire

Jean-Michel Lemay
jean-michel.lemay@etsmtl.ca

Chapitre 2 : Systèmes d’équations linéaires

- 2.1 Systèmes d’équations linéaires
- 2.2 Résolution d’un SEL
- 2.3 Équations vectorielles
- 2.4 Visualisations d’un SEL

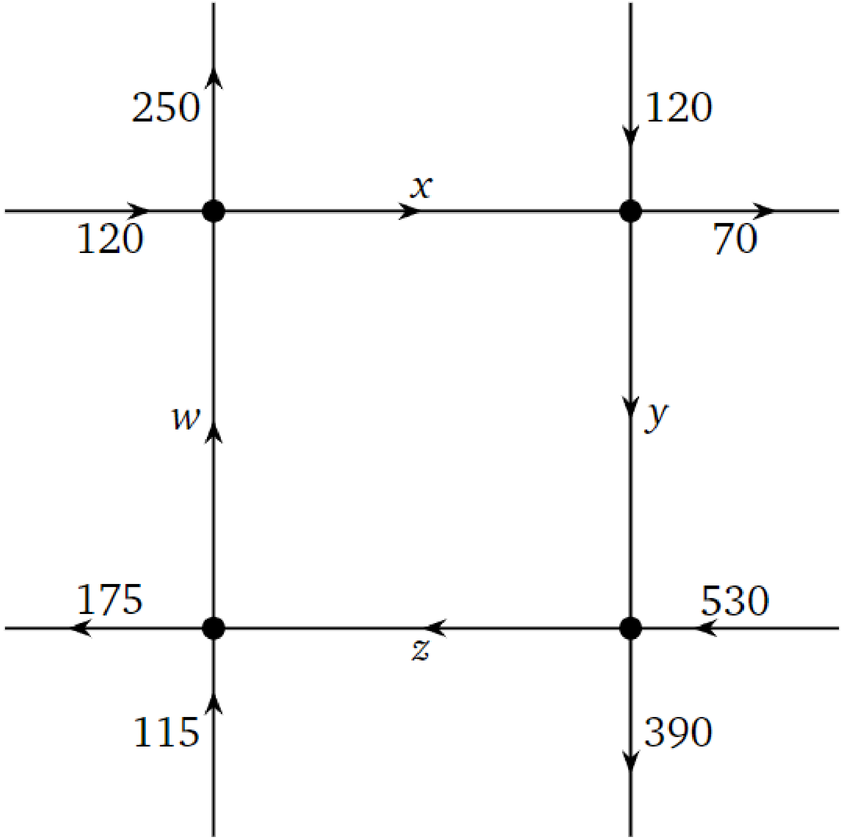
Objectifs d'apprentissage

- Reconnaître des systèmes d'équations linéaires (SEL)
- Calculer l'ensemble solution de SEL à l'aide de la méthode d'échelonnage
- Visualiser des ensembles solutions de SEL de trois façons différentes

Mots clés : Système d'équations linéaires, matrice augmentée, échelonnage, pivot, équation vectorielle, span, système homogène

2.1 Systèmes d'équations linéaires

Bien souvent, un problème peut se traduire en un ensemble d'équations à résoudre.
Dans ce chapitre (et tout au long de MAT380), on se concentre sur les équations **linéaires.**



$$\begin{cases} w + 120 = x + 250 \\ x + 120 = y + 70 \\ y + 530 = z + 390 \\ z + 115 = w + 175. \end{cases}$$

Exemple d'application : *Reconstruire un objet 3D à partir d'images*

Équation linéaire

Définition : Une équation sur les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ est **linéaire** si les termes contenant les variables peuvent s'écrire comme un polynôme de degré 1 :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ et b sont des nombres réels.

Ex : Équations linéaires

$$x + 2y - 5z = 4$$

$$3x_1 - x_2 + 2.5x_3 = 17x_4 - x_5$$

$$\sqrt{2}\, x = \sin(3)\, y$$

Équations non-linéaires

$$xy = 4z$$

$$x - 4y^2 = 17$$

$$\sqrt{x_1} = \cos(x_2) + e^{3x_1}$$

Équation linéaire

Définition : Une équation sur les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ est **linéaire** si les termes contenant les variables peuvent s'écrire comme un polynôme de degré 1 :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ et b sont des nombres réels.

Ex : Équations linéaires

$$x + 2y - 5z = 4$$

$$3x_1 - x_2 + 2.5x_3 = 17x_4 - x_5$$

$$\sqrt{2}\, x = \sin(3)\, y$$

Équations non-linéaires

$$xy = 4z$$

$$x - 4y^2 = 17$$

$$\sqrt{x_1} = \cos(x_2) + e^{3x_1}$$

Système d'équations linéaires

*Un **système d'équations linéaires** (**SEL**) est un ensemble de plusieurs équations linéaires*

Système de deux équations à deux variables

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

Système de deux équations à trois variables

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y \qquad\; = 8 \end{cases}$$

*Une **solution** d'un SEL est une liste de nombres $(x, y, \ldots)$ qui rendent toutes les équations vraies simultanément.*

*L'**ensemble solution** est l'ensemble qui contient toutes les solutions du système.*

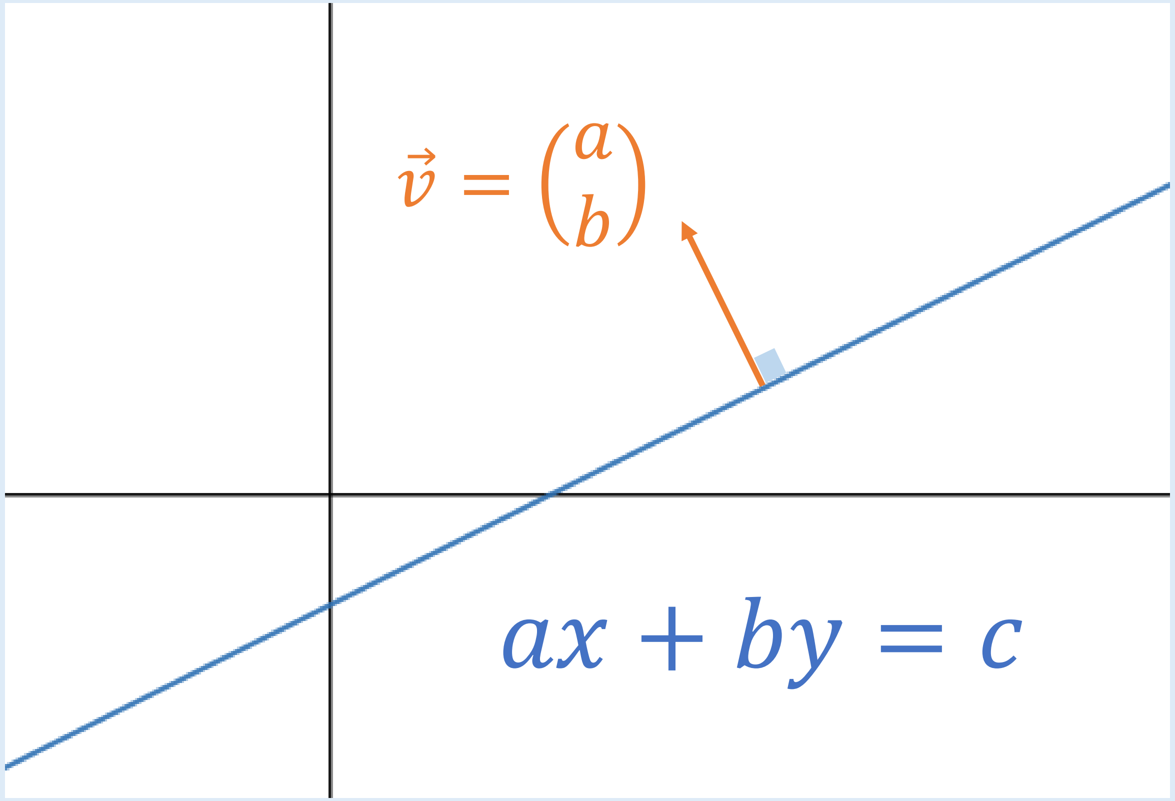
***Résoudre** un système signifie de trouver l'ensemble solution.*

Exemple 1 : Il est facile de vérifier que $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$ est une solution du système d'équations linéaires suivant, mais que $(0,0,0)$ n'est pas une solution.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

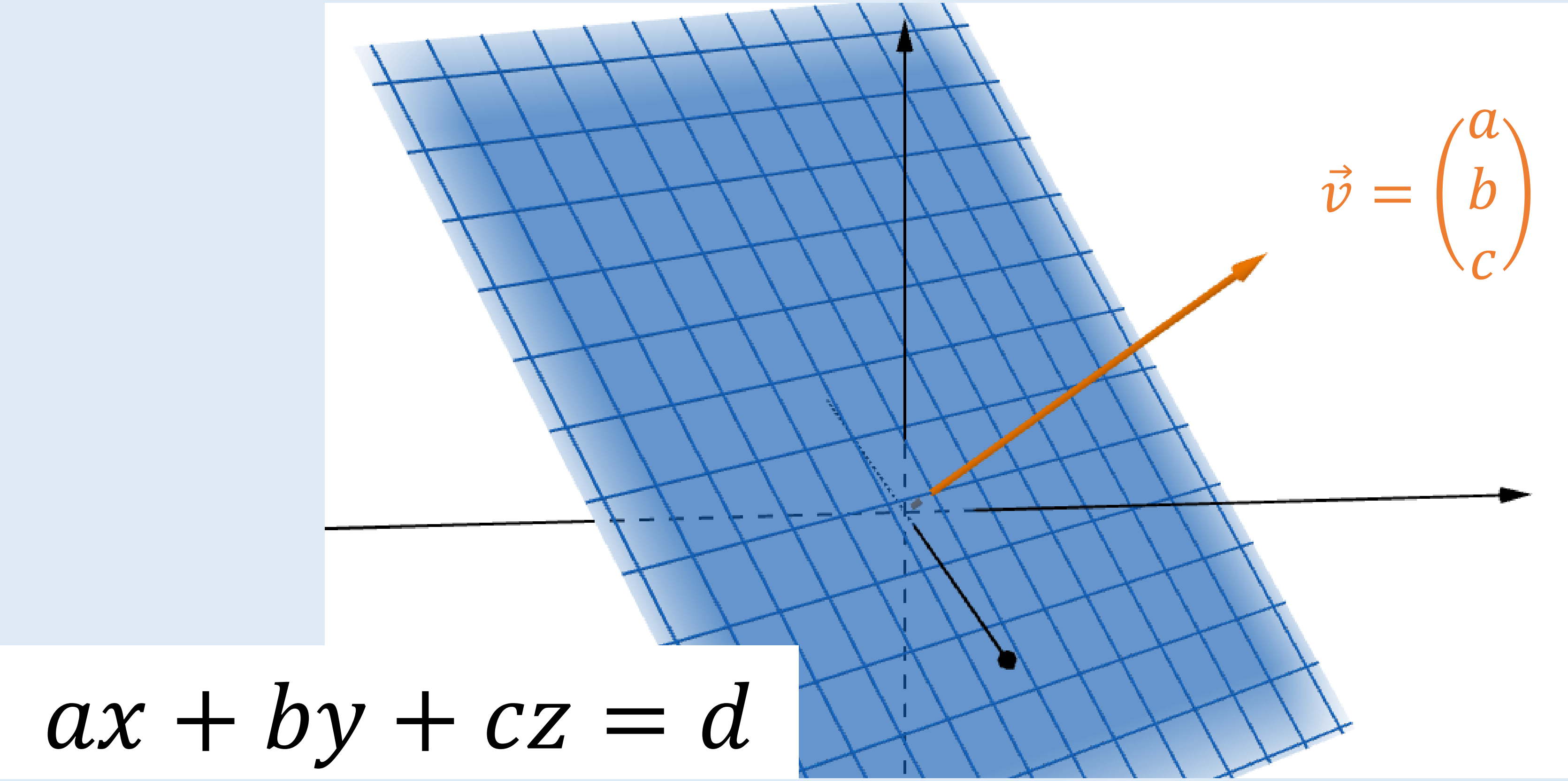
Visualiser une équation linéaire

Une équation à ***deux variables*** *de la forme* $\boldsymbol{ax + by = c}$ *représente une* ***droite*** *perpendiculaire au vecteur* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *:*



Visualiser une équation linéaire

Une équation à ***trois variables*** *de la forme* $\boldsymbol{ax + by + cz = d}$ *représente un* ***plan*** *perpendiculaire au vecteur* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *:*



Note : En général, une équation linéaire à n *variables représente un* $(n-1)$*-plan dans* $\mathbb{R}^n$

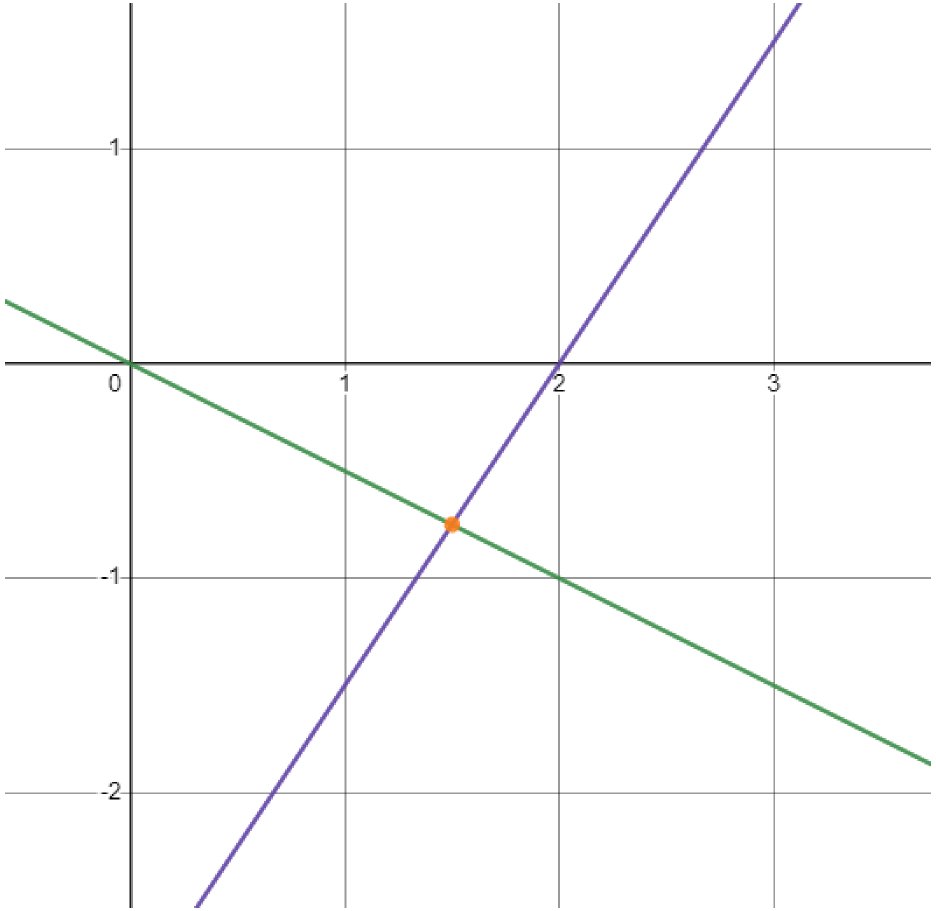
Visualiser l'ensemble solution d'un SEL

*Les solutions d'un système d'équations linéaires correspondent aux **points d'intersections** des objets dessinés par chaque équation.*

$$2x + 4y = 0$$

$$3x - 2y = 6$$

Un point – solution unique



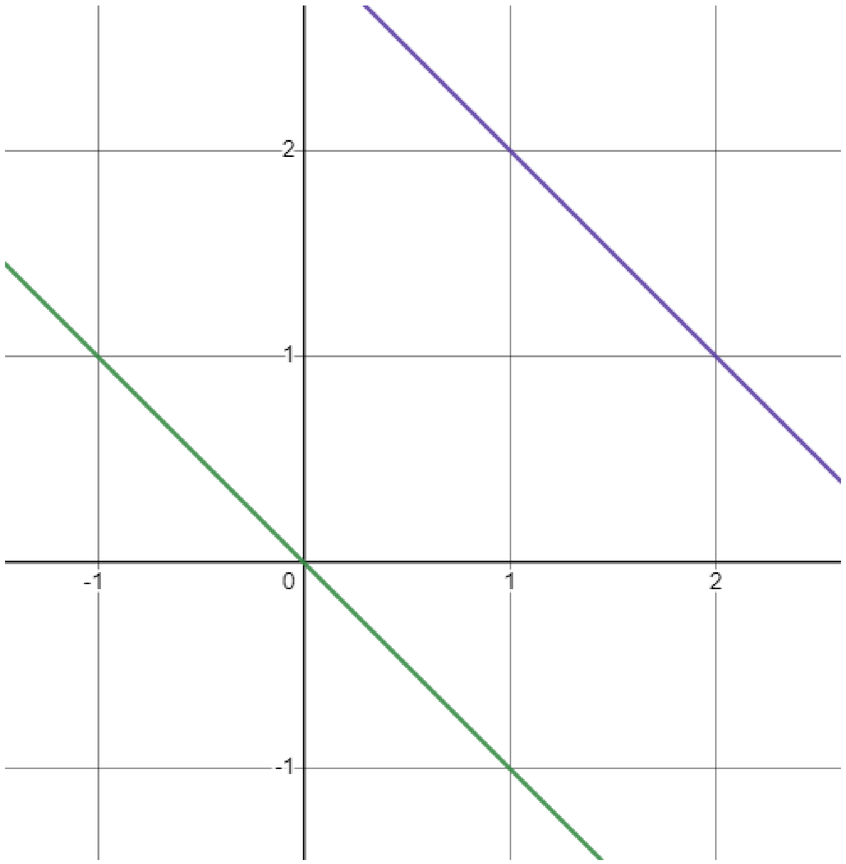
Visualiser l'ensemble solution d'un SEL

*Les solutions d'un système d'équations linéaires correspondent aux **points d'intersections** des objets dessinés par chaque équation.*

$$x + y = 0$$

$$2x + 2y = 6$$

Aucune intersection – Pas de solution



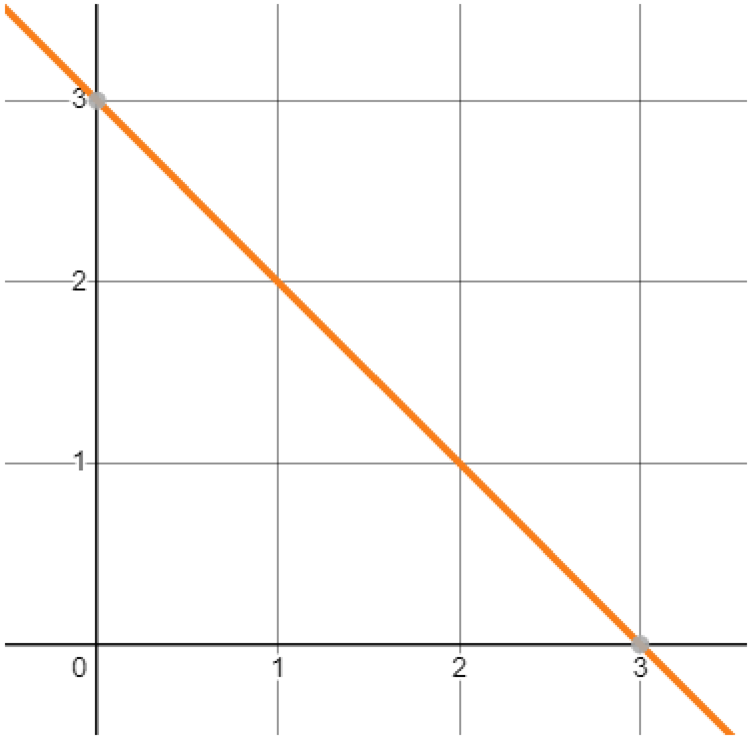
Visualiser l'ensemble solution d'un SEL

Les solutions d'un système d'équations linéaires correspondent aux ***points d'intersections*** *des objets dessinés par chaque équation.*

$$x + y = 3$$

$$2x + 2y = 6$$

Une droite – infinité de solutions



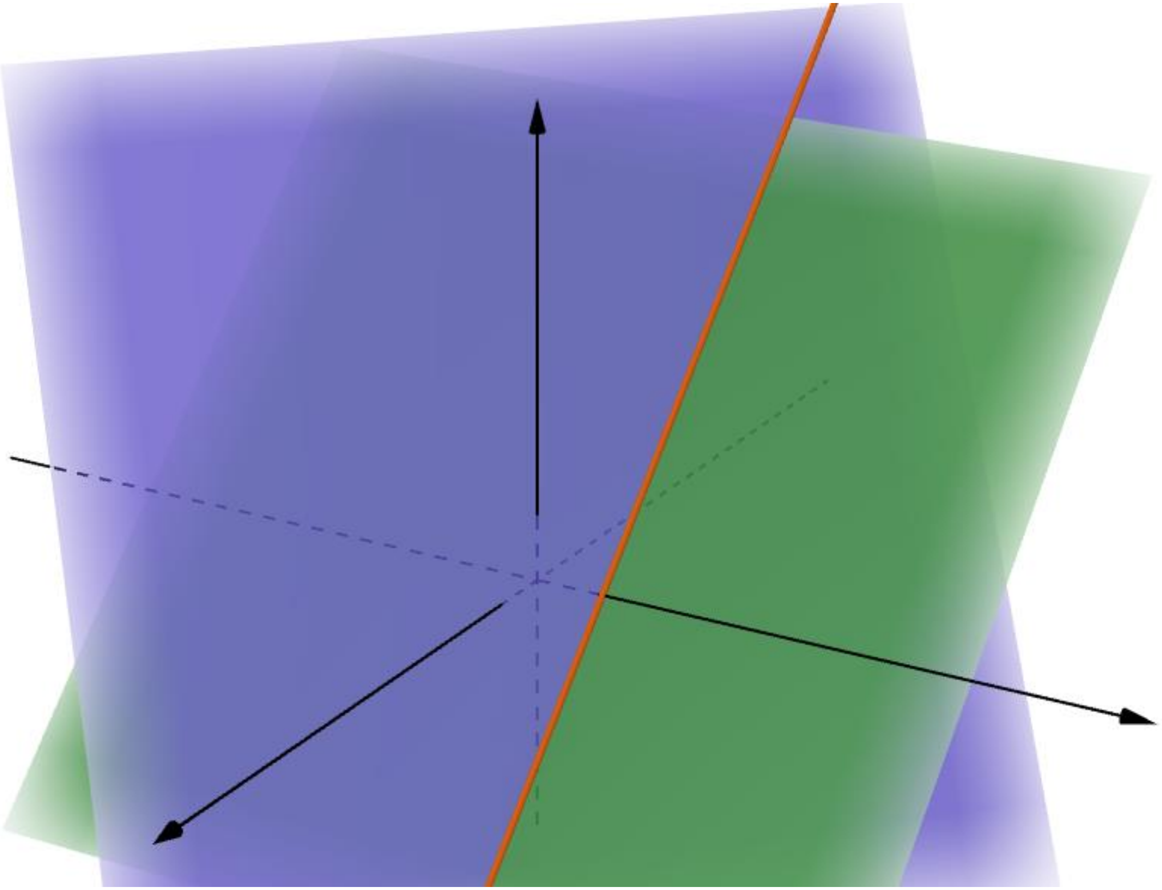
Visualiser l'ensemble solution d'un SEL

*Les solutions d'un système d'équations linéaires correspondent aux **points d'intersections** des objets dessinés par chaque équation.*

$$x + z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

Une droite – infinité de solutions



Visualiser l'ensemble solution d'un SEL

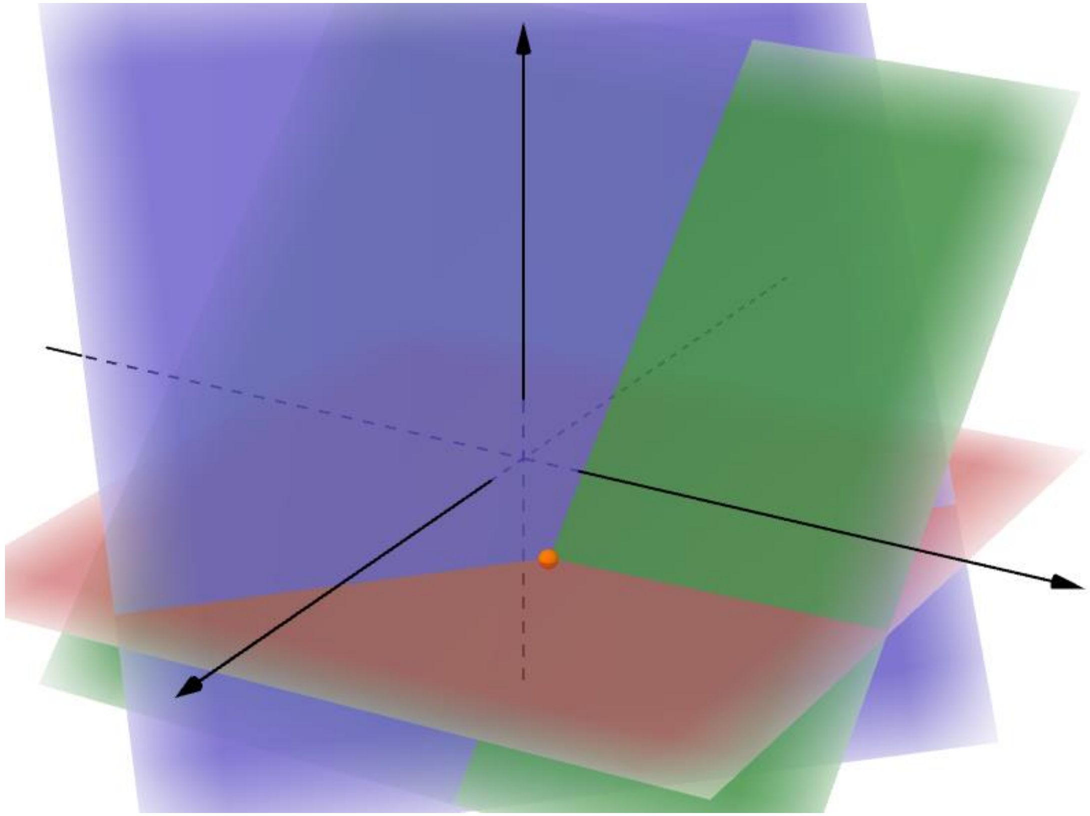
Les solutions d'un système d'équations linéaires correspondent aux ***points d'intersections*** *des objets dessinés par chaque équation.*

$$x + z = 0$$

$$x + y + z = 1$$

$$z - 0.02y = -1$$

Un point – solution unique



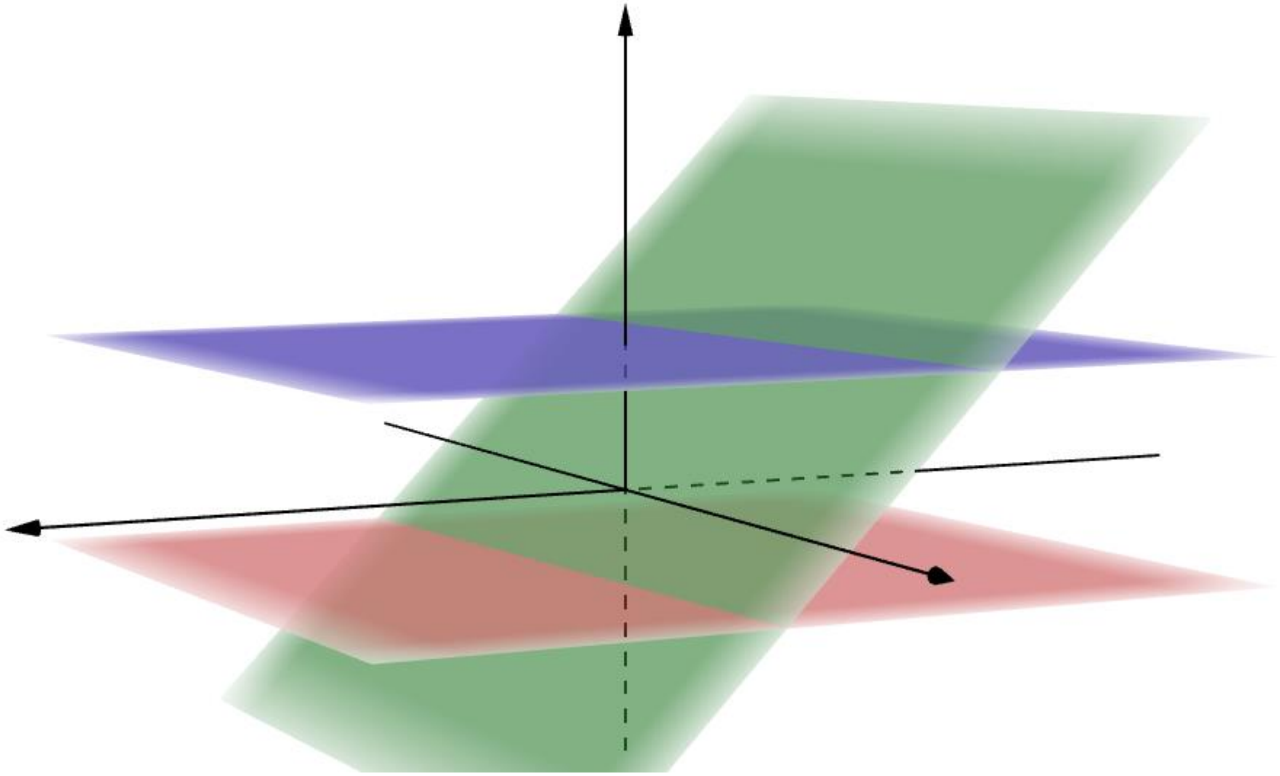
Visualiser l’ensemble solution d’un SEL

*Les solutions d’un système d’équations linéaires correspondent aux **points d’intersections** des objets dessinés par chaque équation.*

$$x + z = 0$$

$$z - 0.02y = 2$$

$$z - 0.02y = -1$$



Aucune intersection commune – pas de solution

Solutions d'un SEL

Comme le montre les exemples précédents, un SEL n'a pas toujours de solution.

Définition : Un système d'équations linéaires est **incompatible** s'il n'a pas de solution. Il est dit **compatible** sinon.

Plus précisément, nous verrons à la prochaine section qu'un SEL possède soit :

- *Une solution unique*
- *Une infinité de solutions*
- *ou aucune solution*

2.2 Résolution d'un SEL

Rappel : Méthode de réduction

Pour résoudre un système d'équation par réduction, on utilise trois opérations :

- Multiplication : On peut multiplier une équation par une constante

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \to 2L_2} \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

- Addition : On peut additionner un multiple d'une équation à une autre

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2} \begin{cases} 8x + 0y = 12 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

- Échange : On peut échanger deux équations

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Ex :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 4x + 0y = 6 \end{cases} \qquad L_2 \to L_2 + 0.5L_1$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 0y = 3 \end{cases} \qquad L_2 \to 0.5L_2$$

$$\begin{cases} 0x + 4y = -3 \\ 2x + 0y = \quad 3 \end{cases} \qquad L_1 \to L_1 - L_2$$

$$\begin{cases} 0x + y = -3/4 \\ x + 0y = \quad 3/2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} L_1 \to 0.25L_1 \\ L_2 \to 0.5L_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = \quad 3/2 \\ y = -3/4 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Matrice augmentée

Les opérations de réduction ne modifient que les coefficients. En plaçant les variables dans le même ordre du côté gauche de l'équation et les termes constants du côté droit, on obtient une structure où toute l'information est contenue dans les coefficients. On peut donc encoder ces coefficients dans un tableau nommé ***matrice augmentée qui contiendra toute l'information du SEL.***

SEL mélangé — SEL ordonné — Matrice augmentée

$$\begin{cases} x + 2y = 9 - 2z \\ y = -3x \\ x + y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 2y + 2z = 9 \\ 3x + 1y + 0z = 0 \\ 1x + 1y + 1z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Remarque : Le nombre de lignes donne le nombre d'équations, tandis que le nombre de colonnes à gauche de la barre donne le nombre de variables. La barre est parfois omise.

Matrice des coefficients

La matrice augmentée d'un SEL est composée de deux blocs :

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Matrice des coefficients A

Vecteur des termes constants $\vec{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Opérations élémentaires

Les opérations de réduction modifient les coefficients des équations.
On utilise les mêmes opérations dans la matrice augmentée pour modifier les lignes.

- Multiplication : On peut multiplier une ligne par une constante

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_1 \to 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 27 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

- Addition : On peut additionner un multiple d'une ligne à une autre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

- Échange : On peut échanger deux lignes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

	SEL	Op. élémentaires	Matrice augmentée
Ex :	$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$		$\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{array}\right)$
	$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 4x+0y=6 \end{cases}$	$L_2 \to L_2 + 0.5L_1$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{array}\right)$
	$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 2x+0y=3 \end{cases}$	$L_2 \to 0.5L_2$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$
	$\begin{cases} 0x+4y=-3 \\ 2x+0y=3 \end{cases}$	$L_1 \to L_1 - L_2$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$
	$\begin{cases} 0x+y=-3/4 \\ x+0y=3/2 \end{cases}$	$L_1 \to 0.25L_1$ $L_2 \to 0.5L_2$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 0 & 1 & -3/4 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{array}\right)$
	$\begin{cases} x=3/2 \\ y=-3/4 \end{cases}$	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/4 \end{array}\right)$

Matrices augmentées lignes-équivalentes

Le langage des matrices augmentées permet donc de résoudre un SEL par réduction via les opérations élémentaires.

En effet, les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble solution de la matrice augmentée.

Définition : Deux matrices augmentées sont dites **lignes-équivalentes** si une peut s'obtenir de l'autre à l'aide d'opérations élémentaires.

Deux matrices augmentées lignes-équivalentes ont donc le même ensemble solution.

Forme échelonnée et pivot

Définition : Une matrice est dite sous forme **échelonnée** si :

- Les lignes ne contenant que des zéros sont sous les autres lignes
- La première entrée non-nulle d'une ligne est à droite de la première entrée non-nulle de la ligne qui la précède

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\star} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\star =$ Un nombre

$\boxed{\star} =$ Un nombre non-nul (**pivot**)

Définition : Le premier nombre non-nul d'une ligne d'une matrice sous forme échelonnée est appelé **pivot**.

Note : En anglais, on appelle ceci la row echelon form (ref)

Forme échelonnée réduite

Définition : Une matrice est dite sous forme **échelonnée réduite** si :

- La matrice est sous forme échelonnée
- Chaque pivot est égal à 1
- Chaque pivot est la seule entrée non-nulle de sa colonne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \star & 0 & \star \\ 0 & \color{red}{1} & \star & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\star =$ Un nombre

$\color{red}{1} =$ Pivot

Note : En anglais, on appelle ceci la reduced row echelon form (rref)

La forme échelonnée indique où il y a des pivots, tandis que la forme échelonnée réduite donne la solution du système.

Matrice augmentée | Forme échelonnée (ref) | Échelonnée réduite (rref)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2.5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Donne les pivots

Donne la solution

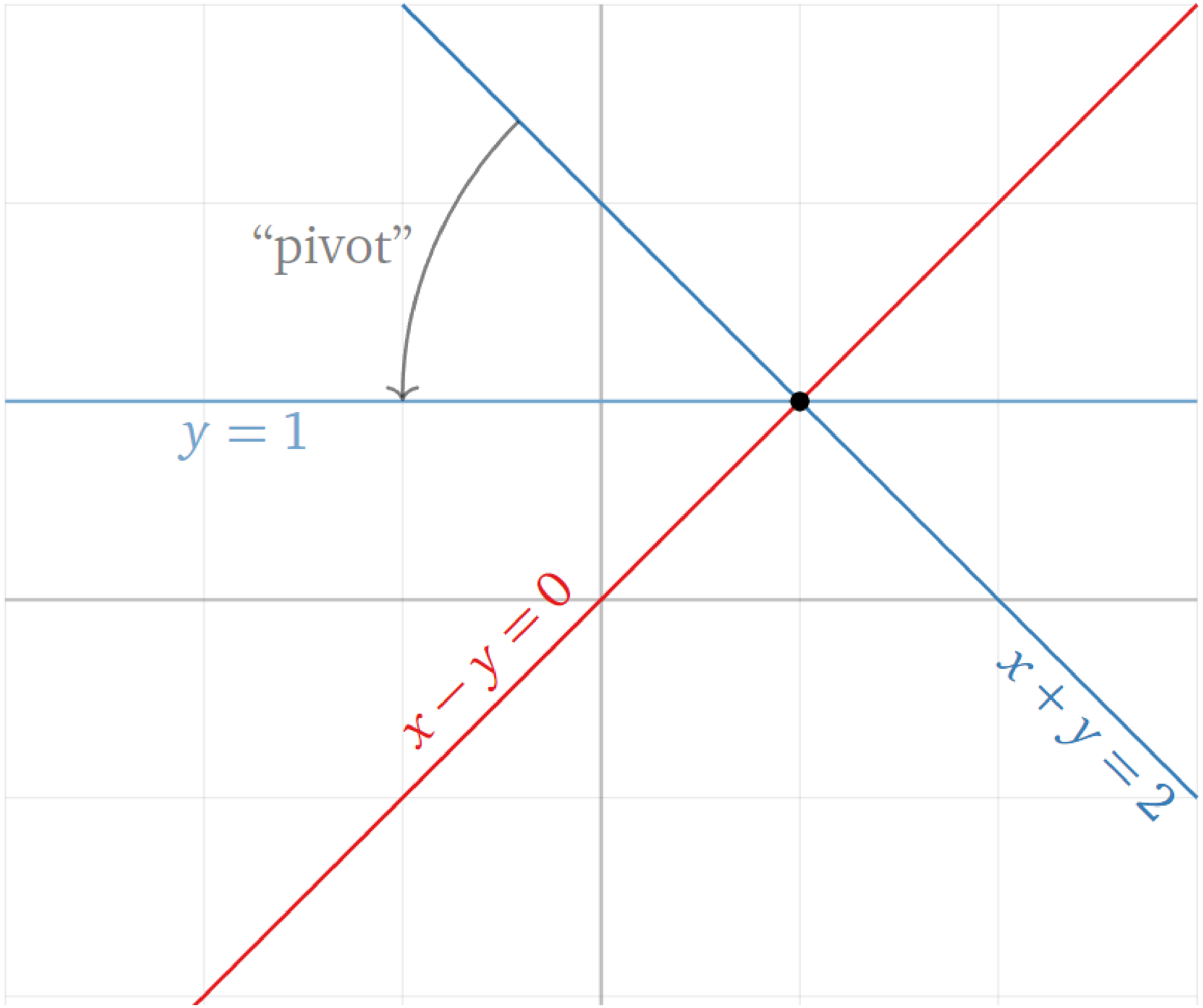
$$x = -8$$
$$y = 4$$
$$z = 2$$

Remarque : Le nom « pivot » peut s'expliquer par la rotation que fait une équation autour de la solution lorsqu'on échelonne le système.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to 0.5 L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$



Exemple 2 :

a) Trouvez la forme échelonnée réduite du SEL et donnez l'ensemble solution.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases}$$

b) Vérifiez votre réponse à l'aide de la commande ref() et rref() de la TI

c) Représentez graphiquement le SEL à l'aide du mode graphique 3D de la TI

Schématisation de l'algorithme d'échelonnage

Get a 1 here

$$\begin{pmatrix} \boxed{\star} & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Clear down

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Get a 1 here

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & \boxed{1} & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Clear down

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & \boxed{1} & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

(maybe these are already zero)

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \star \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \star \end{pmatrix}$$

Get a 1 here

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

Clear down

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

Matrix is in REF

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clear up

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clear up

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix is in RREF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 1 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : L'algorithme est aussi appelé Élimination de Gauss ou Méthode de Gauss-Jordan

Exemple 3 :

a) Trouvez la forme échelonnée du SEL et donnez l'ensemble solution.

$$\begin{cases} x + 3y = 3 - z \\ 2y + 2z = 6 + x \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

b) Vérifiez votre réponse à l'aide de la commande ref() et rref() de la TI

Exemple 4 :

a) Trouvez la forme échelonnée du SEL et donnez l'ensemble solution.

$$\begin{cases} 2x + y + 12z = 1 \\ x + 2y + 9z = -1 \end{cases}$$

b) Vérifiez votre réponse à l'aide de la commande ref() et rref() de la TI

c) Représentez graphiquement l'ensemble solution à l'aide de la TI

Variables libres et solutions paramétrées

Définition : Lorsqu'une colonne à gauche de la barre d'une matrice augmentée ne contient pas de pivot, on dit qu'elle représente une **variable libre.**

Si le système est compatible, il a alors une infinité de solutions. On peut paramétrer l'ensemble solution à l'aide des variables libres comme suit :

1. Réécrire la matrice échelonnée réduite sous forme d'équations

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

2. Envoyer la ou les variables libres du côté droit des équations

$$\begin{cases} x = 1 - 5z \\ y = -1 - 2z \end{cases}$$

3. Remplacer la ou les variables libres par des paramètres

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Nombre de solutions

Il y a donc trois cas possibles lorsqu'on met une matrice augmentée sous forme échelonnée réduite

1. Si La colonne à droite de la barre contient un pivot : **Aucune solution – Système incompatible**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow 0 = 1$$

S'il n'y a pas de pivot à droite de la barre, alors

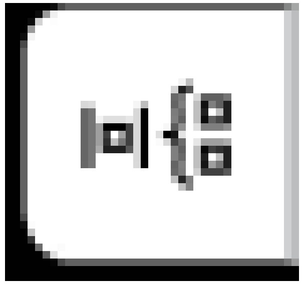
2. Soit toutes les colonnes à gauche de la barre contiennent un pivot : **Solution unique**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{array}$$

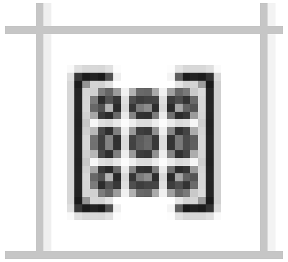
3. Soit au moins une colonne à gauche de la barre n'a pas de pivot : **Infinité de solutions**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow x_3 \textit{ est une variable libre}$$

Créer une matrice sur la TI



+



ou

$$a{:=}\left[1,2,3;4,5,6\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Algèbre matricielle sur la TI

Menu matrices et vecteurs	**Menu + 7**
Matrice identité *n x n*	identity(*n*)
Somme/différence	a±b
Multiplication par un scalaire k	ka
Multiplication matricielle	ab
Matrice inverse de a	a^{-1}
Déterminant	det(a)
Matrice augmentée [A|B]	augment(a,b)
Matrice échelonnée réduite	rref(a)

2.3 Équations vectorielles

Exemple 5 :

a) Peut-on écrire le vecteur $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad ?$$

b) Et le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Animation Geogebra

Équations vectorielles

Définition : Une **équation vectorielle** est une équation impliquant une combinaison linéaire de vecteurs.

$$x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_k\overrightarrow{v_k} = \vec{b}$$

où les $\overrightarrow{v_i}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les x_i sont des scalaires inconnus.

Une équation vectorielle correspond à un SEL qui peut s'encoder dans la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & | \\ \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \ldots & \overrightarrow{v_k} & \vec{b} \\ | & | & & | & | \end{array}\right)$$

où chaque colonne est un des vecteurs.

Sous-espace vectoriel engendré

Définition : Soient $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

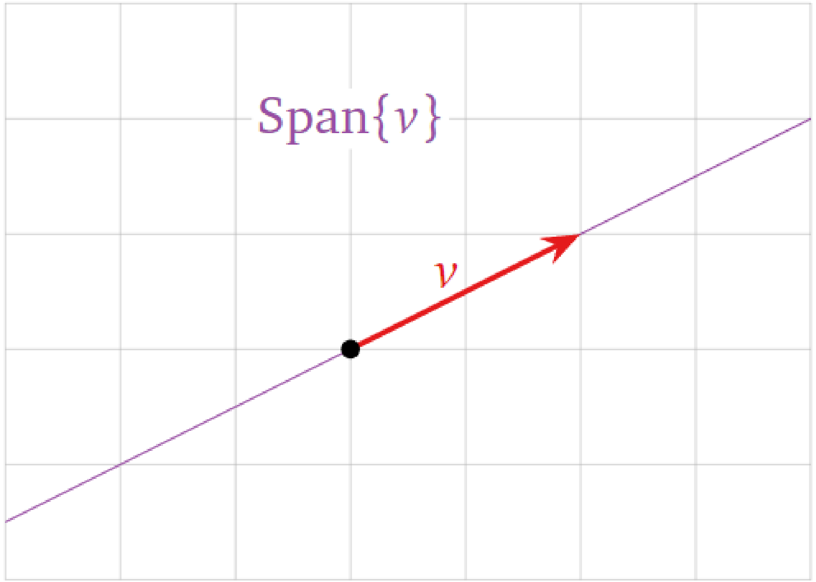
Le **sous-espace vectoriel engendré par** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}}$ est l'ensemble des points qui s'écrivent comme combinaison linéaire de ces vecteurs :

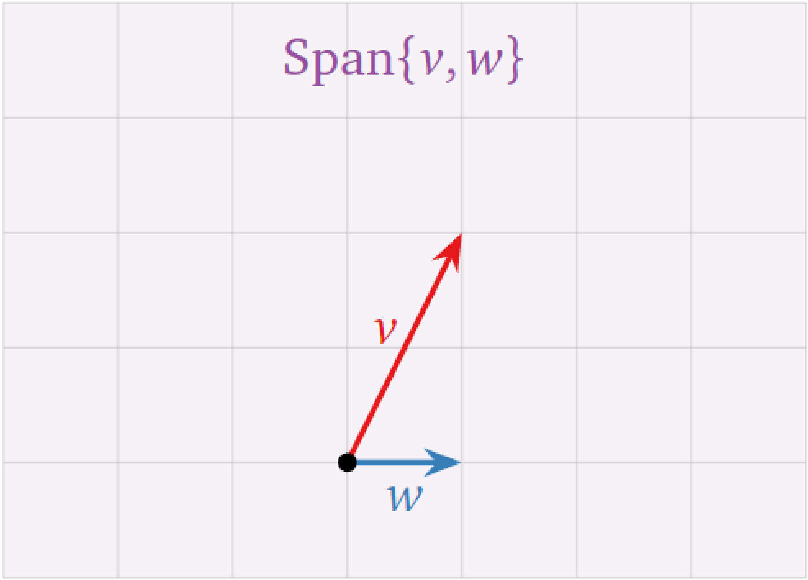
$$span\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\} = \{x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_k\overrightarrow{v_k} \mid x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

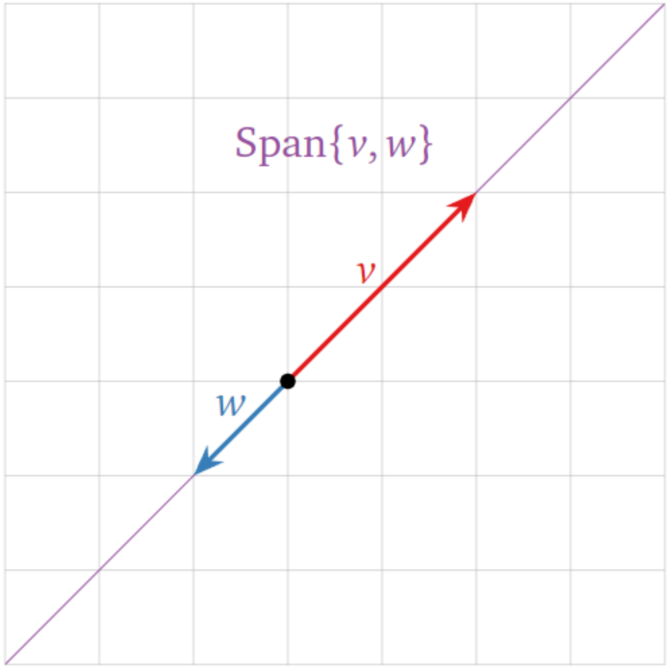
Remarque : « span » est le nom anglais. En français, on note parfois vect$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\}$.

Représentations graphiques de Span(...)

Exemples pour des vecteurs de $\mathbb{R}^2$

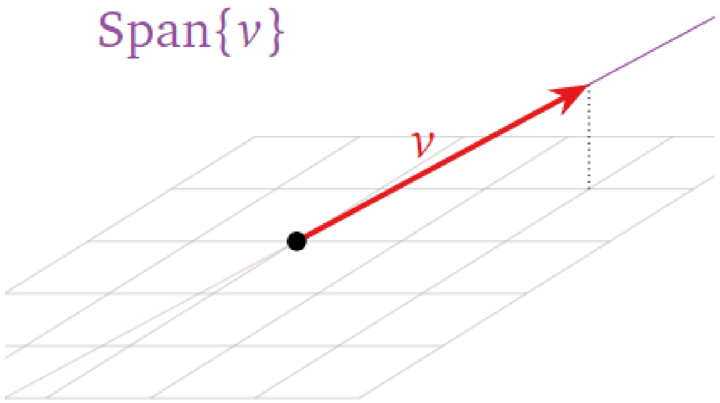


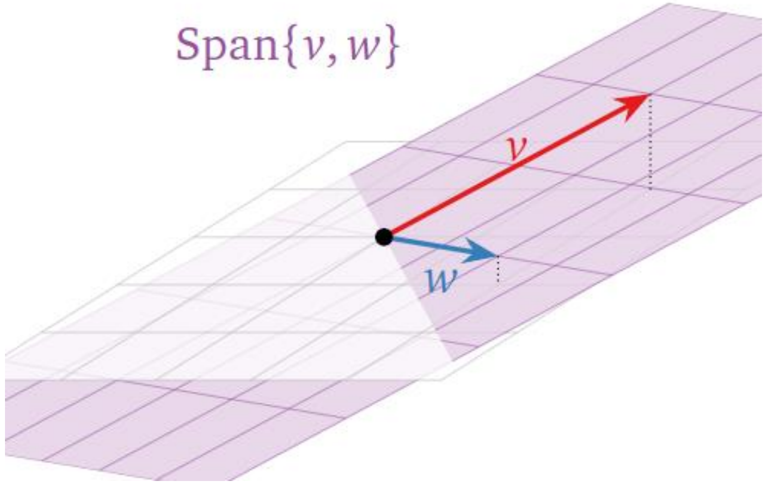


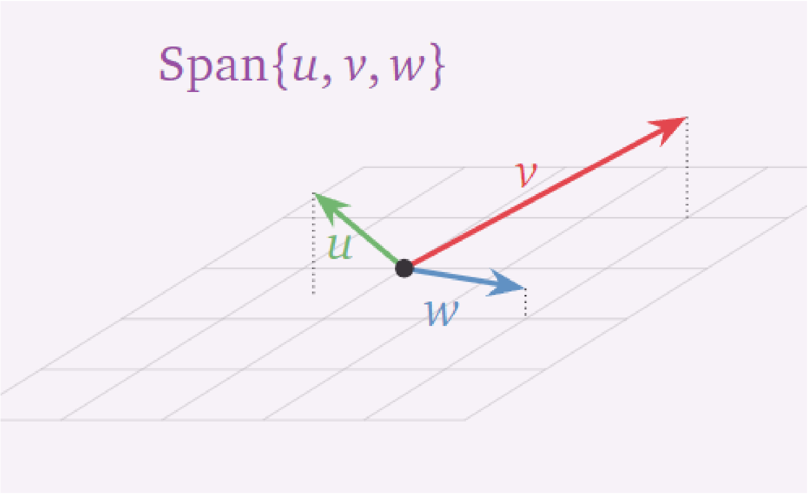


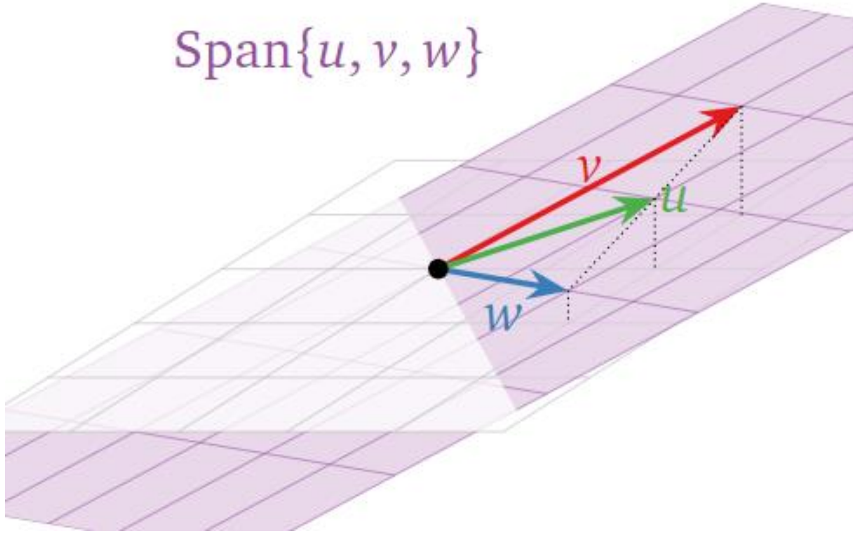
Représentations graphiques de Span(...)

Exemples pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$









Espace colonne

Définition : On appelle **l'espace colonne de A, noté** $col(A)$, le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes d'une matrice de coefficients A :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & | \\ \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \dots & \overrightarrow{v_k} & \vec{b} \\ | & | & & | & | \end{array}\right).$$

En d'autres mots,

$$col(A) = span\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\}$$

correspond à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A.

Trois visions d'un SEL

1. Comme système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

2. Comme matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 8 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

3. Comme équation vectorielle

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Cette dernière vision offre une autre représentation géométrique du SEL :

Le vecteur $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ *est-il dans l'espace engendré par les colonnes de A :* $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *?*

2.4 Visualisations d'un SEL

Pratique :

a) Donnez l'ensemble solution du système suivant.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

b) Donnez l'ensemble solution du système suivant.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

c) Représentez dans un même graphique les deux ensembles solutions.

Rappel : Matrice des coefficients

La matrice augmentée d'un SEL est composée de deux blocs :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Matrice des coefficients A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vecteur des termes constants $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Système homogène

Définitions : Un système d'équation linéaire est dit **homogène** si le vecteur des termes constants $\vec{b}$ est le vecteur nul $\vec{0}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Un système qui n'est pas homogène est dit **inhomogène**.

De plus, l'ensemble solution d'un système homogène de matrice de coefficients A est nommé **l'espace nul** ou **le noyau** de A, noté $Nul(A)$ *ou* $Ker(A)$.

Observation : *L'ensemble solution d'un système inhomogène $\vec{b} \neq 0$ est une translation de l'espace nul Nul(A).*

Trois représentations graphiques d'un SEL

Nous avons maintenant vu trois façons différentes de représenter un même système d'équations linéaires.

1. *Représenter l'ensemble solution comme intersection de droites ou plans*
2. *Représenter l'ensemble solution comme translation de l'espace nul*
3. *Visualiser le système comme une équation vectorielle*

Exemple 6 :

$$\begin{cases} 4x - 2y - 4z = 12 \\ -x + 0.5y + z = -3 \end{cases}$$

a) Représentez l'espace solution comme intersection

b) Représentez l'espace solution du SEL suivant comme translation de l'espace nul

c) Représentez graphiquement le SEL comme équation vectorielle

Exemple 7 :

$$\begin{cases} 4x - 2y - 4z = 12 \\ -x + 0.5y + z = -3 \\ 3x + y + z = 9 \end{cases}$$

a) Représentez l'espace solution comme intersection

b) Représentez l'espace solution le SEL suivant une translation de l'espace nul

c) Représentez graphiquement le SEL comme équation vectorielle

Théorème du Rang

Définitions : *Soit A une matrice de coefficients avec* n *colonnes. On définit deux nombres :*

$$rang(A) \equiv dim\ Col(A) = \#\ pivots\ de\ A$$

$$nullité(A) \equiv \dim Nul(A) = \#\ var.libres\ de\ A$$

Théorème du rang :

$$rang(A) + nullité(A) = n$$

En d'autres mots : $\#\ pivots + \#\ var.libres = \#\ colonnes$

ou encore : $\dim Col(A) + \dim Ens.solution = \#\ variables$

Deux questions importantes

Étant donné un SEL de matrice augmentée $(A|b)$

1. Quelles sont les solutions $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ du système ? (Trouver l'ensemble solution)

2. Quels sont les $\vec{b}$ qui rendent le système compatible ?

Le théorème du rang nous dit que les dimensions de ces deux questions sont complémentaires. Informellement, plus il y a de choix de $\vec{b}$ à la question 2 (rang), moins il y a de choix de $\vec{x}$ à la question 1 (nullité) et vice-versa.