MAT380

Algèbre Linéaire

Jean-Michel Lemay

jean-michel.lemay@etsmtl.ca

Chapitre 3 : Matrices

- 3.1 Algèbre matricielle
- 3.2 Matrice inverse
- 3.3 Factorisation LU
- 3.4 Systèmes dynamiques discrets

Objectifs d’apprentissage

- Calculer des opérations matricielles
- Résoudre des problèmes à l’aide du langage matriciel
- Résoudre des problèmes de systèmes dynamiques discrets

Mots clés : Matrice, multiplication matricielle, transposée, inverse, singulière, système dynamique discret

3.1 Algèbre matricielle

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il est souvent utile d'encoder de l'information dans un tableau de nombres. On nomme ces tableaux des **matrices**. Nous étudierons leurs propriétés dans ce chapitre.

Matrice augmentée

$$\begin{cases} 1x + 2y + 2z = 9 \\ 3x + 1y + 0z = 0 \\ 1x + 1y + 1z = 4 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Matrice des coefficients — *« Matrice » des termes constants*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matrice

Une **matrice** $\boldsymbol{A_{m\,x\,n}}$ est un tableau comportant m lignes et n colonnes

$$A_{m\,x\,n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1^{\text{ère}}\text{ colonne} & & n^{ieme}\text{ colonne} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\text{ère}}\text{ ligne} \\ \\ \leftarrow m^{ieme}\text{ ligne} \end{array} \end{array}$$

- On nomme a_{ij} l'élément situé à la i^{eme} ligne et j^{ieme} colonne
- On appelle $m\ x\ n$ les dimensions de la matrice
- On peut noter la matrice de trois façons : $A_{m\,x\,n} = A = [a_{ij}]$
- Les éléments a_{ii} forment la diagonale principale
- On dit que la matrice est *carrée* si $m = n$.

Exemples :

Diagonale principale

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice 3 x 1

Éléments :

$a_{11} = 1$
$a_{21} = 2$
$a_{31} = 3$

Matrice 2 x 2 *(Carrée)*

Éléments :

$b_{11} = 1 \quad b_{12} = 5$
$b_{21} = 0 \quad b_{22} = -2$

Matrice 3 x 2

Éléments :

$c_{11} = 8 \quad c_{12} = 2$
$c_{21} = -1 \quad c_{22} = 0$
$c_{31} = -4 \quad c_{32} = 5$

Remarque : Les vecteurs sont des matrices avec une seule ligne ou une seule colonne

Opérations sur les matrices

Égalité : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \forall i,j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition/soustraction : $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+5 & 3-1 \\ 1+2 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire : $\boldsymbol{kA} = [ka_{ij}]$

$$2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Remarque : Les dimensions des matrices doivent être les mêmes

Multiplication matricielle

La **multiplication de deux matrices** notée AB est définie lorsque le nombre de colonnes à gauche est égal au nombre de lignes à droite :

$$A_{m\,x\,\underbrace{n\ \ B_{n}}}\,{}_{x\,p} = C_{m\,x\,p}$$

Le # colonnes à gauche doit égaler le # lignes à droite

Le résultat de la multiplication est une nouvelle matrice $C_{m\,x\,p} = [c_{ij}]$ dont les éléments sont donnés par la règle suivante :

c_{ij} = produit scalaire de la i^e ligne de A avec la j^e colonne de B.

$$AB = \begin{pmatrix} - & \overrightarrow{a_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overrightarrow{a_m} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_p} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overrightarrow{a_m} \cdot \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{a_m} \cdot \overrightarrow{b_p} \end{pmatrix} = C$$

$$c_{11} = (3\ 1)\cdot(2\ 1) = 3\cdot 2 + 1\cdot 1 = 7$$

Exemple 1 : $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 3 & 7 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

$BA = ?$

$A^2 = ?$

$B^2 = ?$

Matrice identité

Définition : On note I *ou* $I_{n\ x\ n}$ *la* ***matrice identité*** *de dimension* $n\ x\ n$ *qui possède des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs.*

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{n\ x\ n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elle a la propriété que $AI = A$ *et* $IB = B$ *pour toutes matrices* A, B *de dimensions compatibles.*

Ex : $AI = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$ $\qquad I_{3x3}A = ?$

Propriétés de la multiplication matricielle

Soient $A, B\ et\ C$ trois matrices. En supposant que les dimensions sont compatibles avec les multiplications ci-dessous, nous avons les propriétés suivantes :

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
5. $IA = A = AI$

ATTENTION :

- En général , $AB \neq BA$
- $AB = AC$ ne veut pas dire que $B = C$
- $AB = 0$ ne veut pas dire que $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple 2 : Vérifiez que $AB \neq BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \; et \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrice transposée

Il arrive qu'on ait besoin d'inverser le rôle des lignes et des colonnes d'une matrice.

Définition : On note A^T ***la transposée de la matrice A*** $= [a_{ij}]$ définie par

$$A^T = [a_{ij}^T] = [a_{ji}].$$

La $i^{\text{ème}}$ ligne devient la $i^{\text{ième}}$ colonne et vice-versa.

Ex :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Propriétés de la transposée

Soient A et B deux matrices de dimensions compatibles pour les opérations suivantes.

Les propriétés suivantes sont vraies :

- $(A^T)^T = \mathrm{A}$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Pratique : La micro-brasserie

Soit Q la matrice des quantités requises de chacun des 4 ingrédients entrant dans la composition de chacune des 3 sortes de bière de la micro-brasserie, en kg par caisse.

C est la matrice des commandes annuelles de 4 épiceries pour chacune des 3 sortes de bière, en nombre de caisses.

P est la matrice des prix, en $ par caisse, que paient les épiceries à la micro-brasserie pour chaque sorte de bière.

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 200 & 800 & 2000 \\ 800 & 500 & 400 \\ 0 & 0 & 300 \\ 500 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Quelles opérations matricielles permettent de calculer :

a) le coût de la commande pour chaque épicerie ?

b) le nombre total de caisses commandées pour chaque épicerie ?

c) la quantité en kg de chacun des 4 ingrédients requis pour produire la commande annuelle?

Pratique : Distribution de marchandise

Trois usines $\{u_1, u_2, u_3\}$ *fabriquent un même produit mystère.*
Il ya aussi quatre entrepôts $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *et six magasins* $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$*.*

Soit A *la matrice qui décrit s'il y a une livraison d'une usine à un entrepôt.*
$a_{ij} = 1$ *s'il y a une livraison de l'usine* u_i *à l'entrepôt* e_j*, et 0 sinon.*

B *est la matrice qui décrit s'il y a une livraison d'un entrepôt à un magasin.*
$b_{ij} = 1$ *s'il y a une livraison de l'entrepôt* e_i *au magasin* m_j*, et 0 sinon.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les opérations suivantes sont-elles définies ? Si oui, que permettent-elles de calculer ?

a) $A + B$ b) AB c) BA d) $A + C$ e) CAB

Si une panne empêche l'usine u_1 de produire sa marchandise, est-ce que chacun des 6 magasins recevra encore son produit ?

Colonnes d'une matrice

On pense parfois aux colonnes d'une matrice comme étant des vecteurs :

$$A_{m\ x\ n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

où $\vec{a}_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ formé des éléments de la i^{eme} colonne de la matrice.

Exemples :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrice 3 x 1

Colonne :

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrice 2 x 2 *(Carrée)*

Colonnes :

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice 3 x 2

Colonnes :

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Cas particulier : Multiplication matrice-vecteur

Une multiplication d'une matrice sur un vecteur

$$A_{m\,x\,n}\,v_{n\,x\,1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \cdots + v_m\vec{a}_m = b_{m\,x\,1} = \vec{b}$$

donne un vecteur qui peut être vu comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

Exemple 3 : $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ceci va nous permettre de visualiser des matrices comme des transformations sur des vecteurs dans le prochain chapitre !

Autre vision de la multiplication matricielle

Soient $A_{m\,x\,n}$ et $B_{n\,x\,p}$. On peut calculer la multiplication matricielle AB en distribuant la matrice A sur les colonnes de B :

$$A_{m\,x\,n}B_{n\,x\,p} = A\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} = AB$$

En pensant à la multiplication de cette façon, les colonnes de AB sont les combinaisons linéaires des colonnes de A dont les coefficients sont les composantes de la colonne correspondante de B.

Numériquement, la méthode la plus rapide pour calculer un produit matriciel dépend de la façon dont les matrices sont stockées en mémoire. Par exemple, le langage C stocke les matrices en lignes, tandis qu'en Fortran les matrices sont stockées en colonnes. Le premier va bien avec l'algorithme vu plus tôt, tandis que le second se prête bien à l'algorithme ci-haut.

SEL comme équation matricielle

La multiplication matricielle nous donne également une quatrième façon d'écrire un système d'équations linéaires :

SEL		$[A\|\vec{b}]$		$A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} 1x + 2y + 2z = 9 \\ 3x + 1y + 0z = 0 \\ 1x + 1y + 1z = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ex 4 : Vérifiez que l'équation matricielle à droite est bien équivalente au SEL à gauche.

Quatre visions d'un SEL

1. Comme SEL

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

2. Comme matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 8 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

3. Comme équation vectorielle

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Comme équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3.2 Matrice inverse

L'inverse d'un nombre comme 4 est ¼ ou 4^{-1}. Il a la propriété que $4 \cdot 4^{-1} = 1$.

Peut-on faire la même chose avec la multiplication matricielle ?

Définition : On dit qu'une matrice $A_{n\,x\,n}$ est **inversible** s'il existe une autre matrice $B_{n\,x\,n}$ telle que

$$AB = I = BA$$

où I est la matrice identité. *La matrice B est alors appelée l'inverse de A et notée $B = A^{-1}$.*

Une matrice non-inversible est dite **singulière**.

Remarque : On se limite ici aux matrices carrées. Il existe des notions de pseudo-inverse, d'inverse à gauche ou d'inverse à droite pour les matrices rectangulaires qui ne seront pas abordées dans ce cours.

Exemple 5 : Vérifiez que $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Pratique : Trouvez l'inverse de la matrice à l'aide d'un système d'équations.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = ?$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = ?$

Matrice inverse d'une 2 x 2

Théorème : Soit A_{2x2} la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors, sa matrice inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

si $ad - bc \neq 0$ et la matrice est singulière (non-inversible) sinon.

Propriétés des matrices inverses

Soit A et B deux matrices inversibles de mêmes dimensions. Alors, les propriétés suivantes sont vraies :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Remarque sur les équations matricielles

Considérons un SEL écrit sous la forme $A\vec{x} = \vec{b}$.

Si la matrice des coefficients $A_{n\,x\,n}$ est carrée et inversible, alors le SEL a une solution unique qui est donnée par

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Notons qu'il est généralement plus laborieux de calculer A^{-1} que d'échelonner le SEL directement. Par contre, il est utile de penser à l'existence de A^{-1} comme à l'existence d'une solution unique du SEL ci-haut.

Algorithme de calcul de A^{-1}

La remarque précédente nous donne un algorithme pour calculer la matrice inverse.

Théorème : Une matrice $A_{n\,x\,n}$ est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite correspond à la matrice identité $I_{n\,x\,n}$. En particulier, toute suite d'opérations élémentaires qui transforme $A \sim I$ va transformer $I \sim A^{-1}$.

Algorithme : On peut donc calculer la matrice inverse en échelonnant la matrice augmentée $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$.

Ex 6 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = ?$

Théorème de l'inverse

Le théorème suivant permet d'établir des liens entre l'inversibilité et différentes notions d'algèbre linéaire.

Théorème : Soit $A_{n\,x\,n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes. C'est-à-dire que si une propriété est vraie, alors toutes les autres le sont aussi. Si une propriété est fausse, alors toutes les autres le sont aussi.

1. A est inversible
2. A possède n pivots
3. $A\vec{x} = \vec{0}$ a pour unique solution la solution triviale $\vec{x} = \vec{0}$
4. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes
5. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$
6. $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique pour tout $\vec{b}$
7. L'application linéaire $x \longmapsto Ax$ est injective
8. L'application linéaire $x \longmapsto Ax$ est surjective
9. $det(A) \neq 0$

3.3 Factorisation LU

La factorisation LU est une méthode permettant de résoudre rapidement une suite de systèmes d'équations linéaires possédant la même matrice de coefficients :

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \qquad A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \qquad \dots \qquad A\vec{x}_p = \vec{b}_p$$

Idée 1 : Calculer A^{-1} et trouver les solutions par $x_i = A^{-1}\vec{b}_i$

Idée 2 : Écrire $A = LU$ et résoudre $L\vec{y}_i = \vec{b}_i$ et $U\vec{x}_i = \vec{y}_i$

Bien que la première idée semble plus simple, la seconde peut être beaucoup plus efficace pour résoudre numériquement de gros systèmes.

Matrices triangulaires

On factorise $A = LU$ en une forme bien précise :

$$A_{m\,x\,n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}}$$

$\boldsymbol{L_{m\,x\,m}}$: Doit avoir des 0 au-dessus de la diagonale principale.
(***matrice triangulaire inférieure***)

Doit également avoir des 1 sur la diagonale principale.

$\boldsymbol{U_{m\,x\,n}}$: Doit avoir des 0 en-dessous de la diagonale principale.
(***matrice triangulaire supérieure***)

N.B. A donne les dimensions de L et U

On obtient alors deux systèmes d'équations linéaires à résoudre sous des formes très faciles :

$$A\vec{x} = L(U\vec{x}) = L\vec{y} = b$$

1. $L\vec{y} = \vec{b}$ pour trouver $\vec{y} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ * & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ * & * & 1 & 0 & b_3 \\ * & * & * & 1 & b_4 \end{array}\right)$$

2. $U\vec{x} = \vec{y}$ pour trouver $\vec{x} = ?$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \blacksquare & * & * & * & * & y_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & y_4 \end{array}\right)$$

Construction de L et U

$$A_{m\,x\,n} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}$$

U s'obtient en mettant la matrice A sous forme échelonnée (non réduite).

L est formée des colonnes pivots de la matrice A obtenues lors de l'échelonnage (sans échange de lignes), divisée par le coefficient du pivot.

Construction de L et U

Exemple : On échelonne d'abord A pour obtenir U sans échange de lignes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = U$$

$$c_1 \qquad c_2 \qquad c_3 \qquad c_4$$

On enregistre les colonnes pivots qui deviennent les colonnes de L en divisant par la valeur du pivot

$$\frac{c_1}{2} \quad \frac{c_2}{-3} \quad \frac{c_3}{-1} \quad \frac{c_4}{-5}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a maintenant tous les ingrédients pour résoudre $L\vec{y} = \vec{b}$ suivie de $U\vec{x} = \vec{y}$

Exemple 7 :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 6x - 2y + 3z = 1 \\ 4x \phantom{{}+2y} + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Trouvez la factorisation $A = LU$

b) Résoudre le SEL à l'aide de la factorisation.

Rappel

La factorisation LU est une méthode permettant de résoudre rapidement une suite de systèmes d'équations linéaires possédant la même matrice de coefficients :

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \qquad A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \qquad \ldots \qquad A\vec{x}_p = \vec{b}_p$$

Idée 1 : Calculer A^{-1} et trouver les solutions par $x_i = A^{-1}\vec{b}_i$

Idée 2 : Écrire $A = LU$ et résoudre $L\vec{y}_i = \vec{b}_i$ et $U\vec{x}_i = \vec{y}_i$

Bien que la première idée semble plus simple, la seconde peut être beaucoup plus efficace pour résoudre numériquement de gros systèmes.

Vitesse de calcul

On peut estimer le nombre d'opérations (flops) nécessaires aux calculs de chaque méthode pour $A_{n\,x\,n}$ avec $n \gg 1$:

Idée 1 : Calculer A^{-1} et trouver les solutions par $x_i = A^{-1}\vec{b}_i$

$\sim 2n^3$ flops $\sim 2n^2$ flops

Idée 2 : Écrire $A = LU$ et résoudre $L\vec{y}_i = \vec{b}_i$ et $U\vec{x}_i = \vec{y}_i$

$\sim \frac{2}{3}n^3$ flops $\sim 2n^2$ flops

Deux autres avantages pour LU :

- *Moins d'erreur d'arrondissement qu'avec A^{-1}*
- *Si la matrice A est creuse (contient beaucoup de 0), le gain de vitesse est beaucoup plus important*

3.4 Systèmes dynamiques discrets

Les hérons garde-bœufs et les buffles d'Afrique ont une relation de symbiose. Le premier se nourrit d'insectes sur le dos des buffles et lui permet donc de s'alimenter tout en débarrassant le mammifère d'insectes dérangeants.

Exemple 8 : Notons H_k et B_k les populations de hérons et de buffles après k années. On modélise l'évolution des populations par le système d'équations suivant.

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= 0.9H_k + 0.8B_k \\ B_{k+1} &= 0.2H_k + 1.1B_k \end{aligned}$$

a) Écrivez le système d'équations sous la forme matricielle $\boldsymbol{P_{k+1}} = A\boldsymbol{P_k}$.

b) Que fait la matrice A? et A^2?

c) Calculez $\boldsymbol{P_{10}}$ si $\boldsymbol{P_0} = \binom{12}{1}$.

d) Calculez $\boldsymbol{P_{10}}$ si $\boldsymbol{P_0} = \binom{1}{12}$.

e) Calculez $\boldsymbol{P_{10}}$ si $\boldsymbol{P_0} = \binom{13}{13}$.

f) Utilisez vos réponses précédentes pour commenter sur la relation de symbiose. Est-ce qu'une espèce a plus besoin de l'autre ?

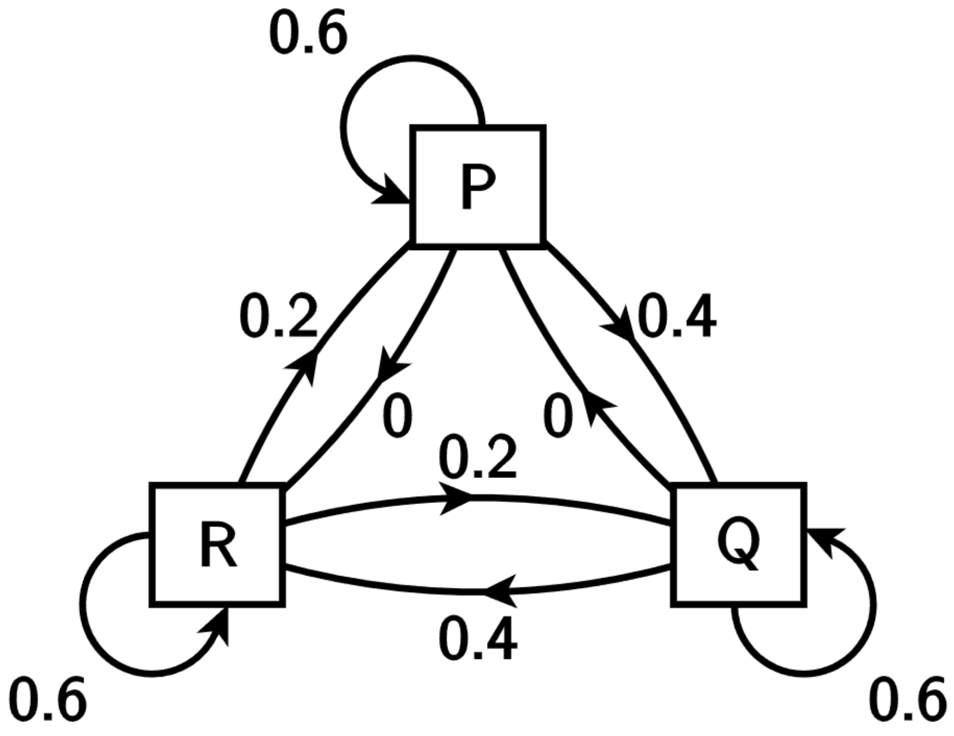
Exemple 9 : Considérons un pays avec trois partis politiques P, Q et R. Le diagramme suivant représente les changements de préférence des électeurs entre deux élections. Notons P_k, Q_k et R_k les pourcentages de vote pour chaque parti à la $k^{ième}$ élection.

a) Exprimez le SEL qui donne $P_{k+1}, Q_{k+1}, R_{k+1}$ en termes de P_k, Q_k, R_k.

b) Écrivez le sous forme matricielle $x_{k+1} = Ax_k$.

c) Si $P_1 = 40\%$ et $Q_1 = R_1 = 30\%$, trouvez les prédictions des résultats pour les 4 prochaines élections.

d) Existe-t-il un état stationnaire pour ce système? Si oui, calculez-le. (i.e. un état qui reste le même à chaque année)



Ex 10 : On modélise une population de lapins de la façon suivante :

- *La moitié des nouveaux-nés survivent à leur première année;*
- *De ceux-ci, la moitié survivent à leur deuxième année;*
- *La durée de vie maximale d'un lapin est de 3 ans;*
- *Les lapins ont 0,6 et 8 bébés respectivement lors de leurs 1ère, 2e et 3e année de vie.*

On note à l'an k : x_k le nombre de nouveaux-nés, y_k le nombre de lapins d'un an et z_k le nombre de lapins de deux ans.

a) Écrivez un système d'équation linéaire sur x_k, y_k, z_k et $x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}$ qui modélise l'évolution de la population de lapins.

b) Écrivez l'évolution du système sous la forme $\boldsymbol{p}_{k+1} = A\boldsymbol{p}_k$ où $\boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$.

c) Si $\boldsymbol{p}_{2020} = (8, 3, 2)^{\mathrm{T}}$, calculez $\boldsymbol{p}_{2030}$ et comparez la proportion de x, y, z sur la population totale en 2020 et 2030.

d) Si $\boldsymbol{p}_{2020} = (16, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, calculez $\boldsymbol{p}_{2030}$ et comparez la proportion de x, y, z sur la population totale en 2020 et 2030.