MAT380

Algèbre Linéaire

Jean-Michel Lemay

jean-michel.lemay@etsmtl.ca

Chapitre 6 : Espaces vectoriels

- 6.1 Espaces vectoriels
- 6.2 Bases
- 6.3 Changement de bases
- 6.4 Sous-espaces vectoriels
- 6.5 Algorithme de compression JPEG

Objectifs d’apprentissage

- Comprendre les concepts d’espace vectoriel, de base et de dimension
- Calculer des changements de base
- Identifier des sous-espaces vectoriels

Mots clés : Espace vectoriel, base, composantes, changement de base, sous-espace vectoriel

6.1 Espaces vectoriels

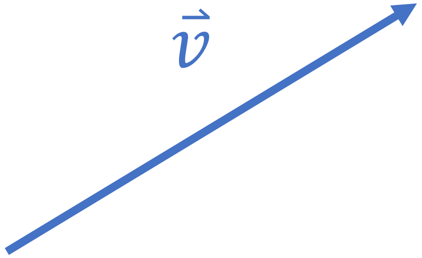
On élargit la notion de vecteurs dans ce chapitre. On précise également la notion de base, de dimension et étudie les changements de base.

Trois visions d'un vecteur :

PHY

Grandeur orientée

$\vec{v}$



INF

Liste de nombres

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

MAT

Élément d'un espace vectoriel

$$\boldsymbol{v} \in V$$

On explore brièvement la troisième vision dans cette section.

Espace vectoriel

Définition : Un **espace vectoriel** V est un ensemble constitué d'éléments appelés vecteurs sur lesquels deux opérations sont définies : l'addition et la multiplication par un scalaire. Ces deux opérations vérifient les dix propriétés suivantes : $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \;\; et \;\; \forall\, c, d \in \mathbb{R}$

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ (fermeture)
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (commutativité)
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (associativité)
4. $\exists\, \mathbf{0} \in V$ *tel que* $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ (neutre additif)
5. $\exists\, -\boldsymbol{u} \in V$ *tel que* $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ (inverse additif)

6. $c\boldsymbol{u} \in V$ (fermeture)
7. $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$ (distributivité)
8. $(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$ (distributivité)
9. $c(d\boldsymbol{u}) = (cd)\boldsymbol{u}$ (associativité)
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (neutre multiplicatif)

Exemple : Les espaces euclidiens qu'on utilise depuis le début du cours sont des espaces vectoriels.

$$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

L'addition et la multiplication par un scalaire qu'on connait sur ces vecteurs vérifient les 10 propriétés précédentes. C'est notre exemple type de ce que sont les vecteurs et on a vu qu'on peut les visualiser comme des flèches avec une norme et une orientation.

Par contre, il y a beaucoup d'autres choses qui peuvent être vues comme des vecteurs !

Exemple : Soit $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degrés égaux ou inférieurs à n.

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{n}} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

L'addition et la multiplication par un scalaire sont celles de l'algèbre usuelle. Par exemple, prenons $P(x) = x^3 - x + 1$ et $Q(x) = 2x^3 + 3x - 2$ dans $\mathbb{P}_3$:

$$P(x) + Q(x) = (x^3 - x + 1) + (2x^3 + 3x - 2) = 3x^3 + 2x - 1$$

$$4P(x) = 4(x^3 - x + 1) = 4x^3 - 4x + 1$$

On pourrait vérifier que ces opérations vérifient les 10 propriétés d'un espace vectoriel.

Exemple : Soit $\mathbb{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices de dimension $m\ x\ n$.

$$\mathbb{M}_{m,n} = \{A_{m\ x\ n} \mid a_{ij} \epsilon \mathbb{R}\}$$

L'addition et la multiplication par un scalaire sur les matrices vérifient les 10 propriétés d'un espace vectoriel.

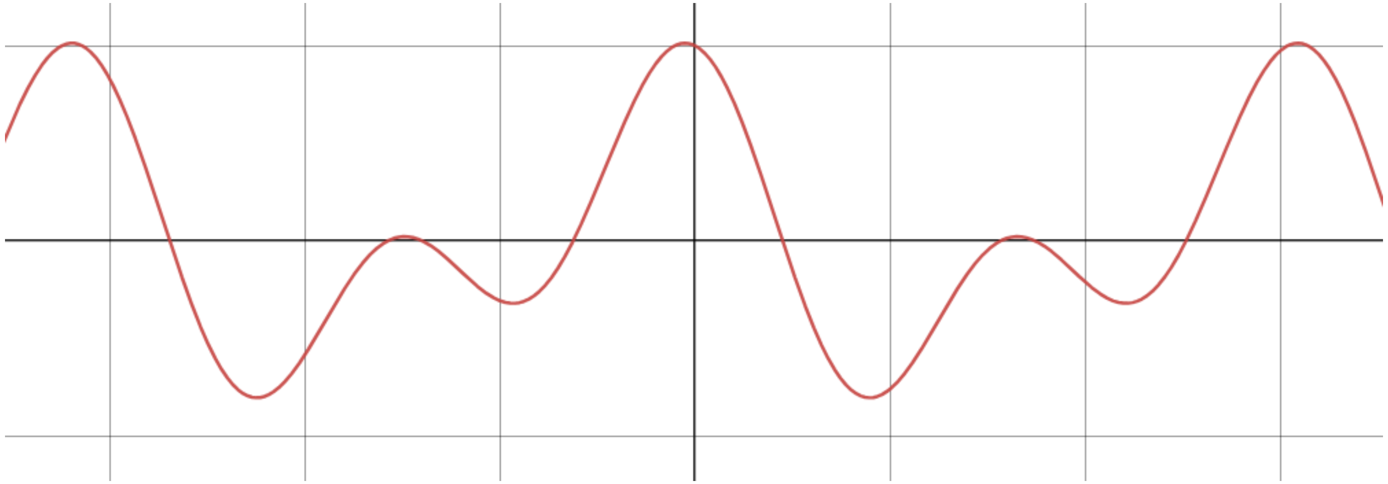
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Exemple : Les polynômes trigonométriques (ou séries de Fourier tronquées)

$$\mathbb{T}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix) \mid a_i, b_i \epsilon \, \mathbb{R} \right\}$$

avec l'addition et la multiplication par un scalaire usuelle sur les fonctions vérifient les 10 propriétés d'un espace vectoriel. Un signal peut donc être vu comme un ***vecteur*** *qui se décompose dans une* ***base*** *de sin et cos :*



Remarque : Si $n \to \infty$, on obtient les séries de Fourier qui forment un espace vectoriel de dimension infinie. Ces espaces vectoriels sont riches en applications : traitement de signal, compression JPEG et mp3, etc.

6.2 Base d'un espace vectoriel

On caractérise ici un outil qu'on utilise toujours lorsqu'on travaille avec des vecteurs : Les bases.

Rappel : Indépendance linéaire

Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ est dit **linéairement indépendant** si la solution triviale $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ est l'unique solution de l'équation suivante :

$$k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

De façon équivalente, l'ensemble est linéairement indépendant si aucun des vecteurs ne peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $n-1$ autres.

Un ensemble qui n'est pas linéairement indépendant est dit linéairement dépendant.

Base

Définition : Un ensemble de vecteurs $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ est une **base** d'un espace vectoriel V si les deux conditions suivantes sont respectées.

- L'ensemble $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ est linéairement indépendant.
- Tous les vecteurs de V peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}$. En d'autres mots, $span\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\} = V$.

Remarque : La deuxième condition garantit que tout vecteur $\boldsymbol{v} \in V$ peut s'écrire comme

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$$

tandis que la première condition garantit qu'il y a une unique façon de le faire.
Les $c_i \in \mathbb{R}$ sont alors appelées les **composantes** de $\boldsymbol{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 1 : Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \middle| \, v_i \in \mathbb{R} \right\}$.

On appelle l'ensemble suivant la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Montrez que c'est une base.

Exemple 2 : Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \middle| \; v_i \in \mathbb{R} \right\}$.

Vérifions que :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

N'est pas une base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Est une base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

N'est pas une base

Dimension d'un espace vectoriel

Théorème : Soit l'ensemble de vecteurs $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ et A la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\boldsymbol{b_i}$. Alors,

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\} \text{ est une base} \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{b_1} & \dots & \boldsymbol{b_n} \\ | & | & | \end{pmatrix} \sim I_{nxn}.$$

En particulier, le nombre de vecteurs dans $\mathcal{B}$ doit être égal au nombre de composantes.

Définition : Le nombre de vecteurs n dans une base d'un espace vectoriel V est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel. On note $\dim V = n$.

Rappel : Base canonique de $\mathbb{R}^n$

La base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ est formée des n vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad \boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la base :

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où les x_i sont appelées les composantes de $\boldsymbol{x}$ dans la base canonique.

Composantes d'un vecteur

Soit $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ une base d'un espace vectoriel V. Tout vecteur $v \in V$ peut s'écrire comme

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}.$$

On appelle les c_i les **composantes** de v dans la base $\mathcal{B}$ et on note :

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Remarque sur la notation

Base canonique

$$\mathcal{E} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n})$$

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e_1} + v_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + v_n\boldsymbol{e_n}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Base quelconque

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$$

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$$

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

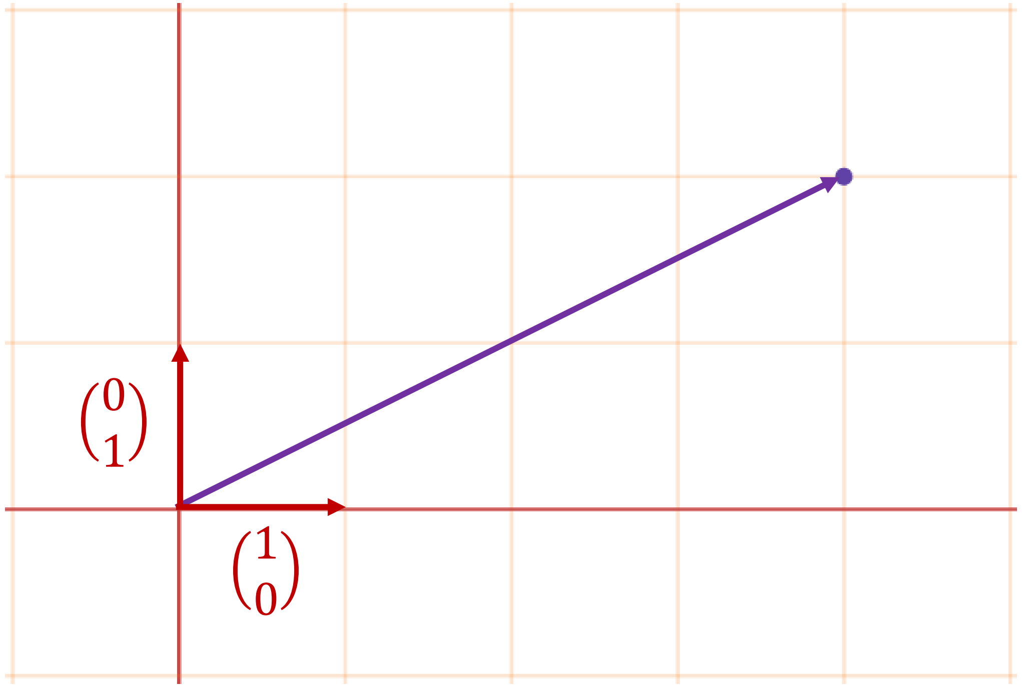
Lorsqu'on travaille dans la base canonique, on se permet de simplement écrire $\boldsymbol{v}$.
Par contre, dans toute autre base $\mathcal{B}$, on indique explicitement la base $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$.

Exemple : *Un vecteur représenté dans deux bases différentes*

Base canonique

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

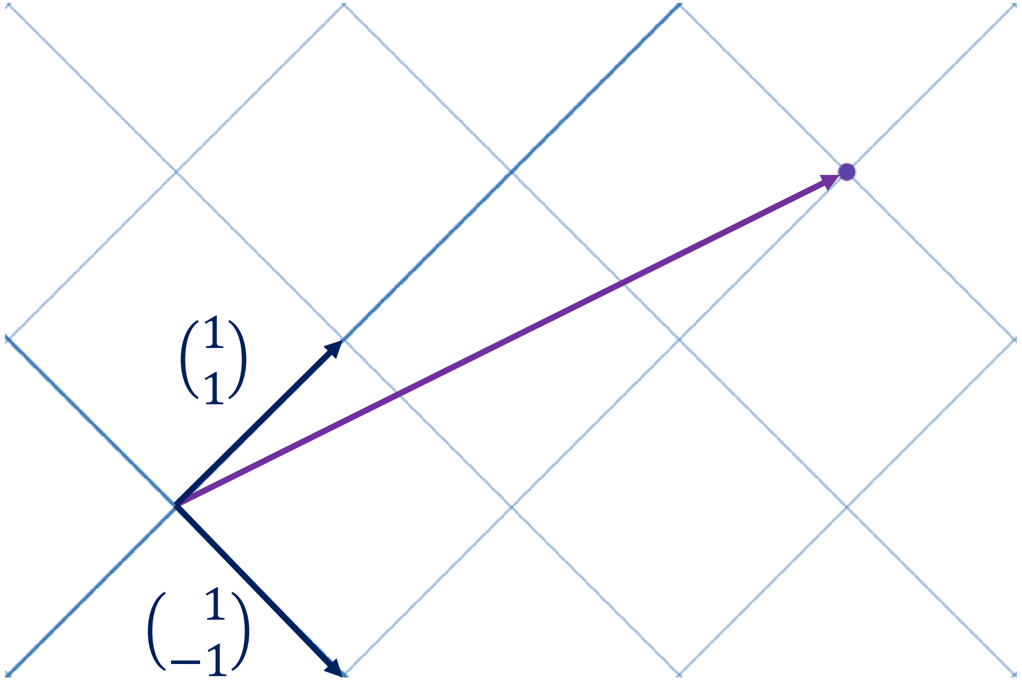
$$\boldsymbol{x} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Base quelconque

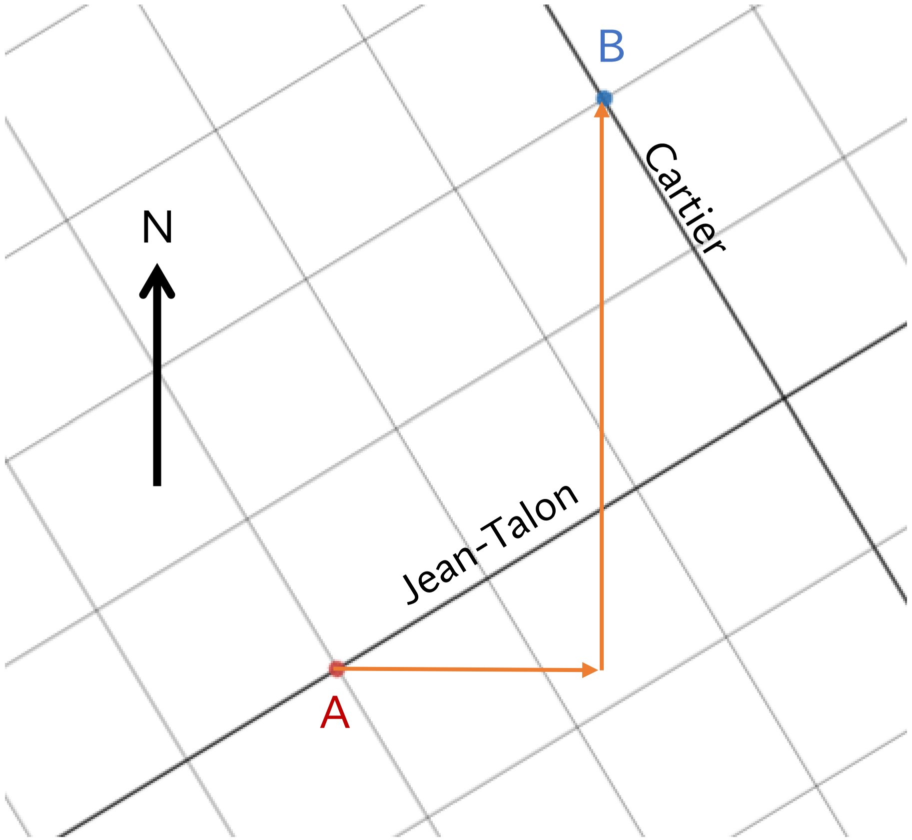
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boldsymbol{x} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

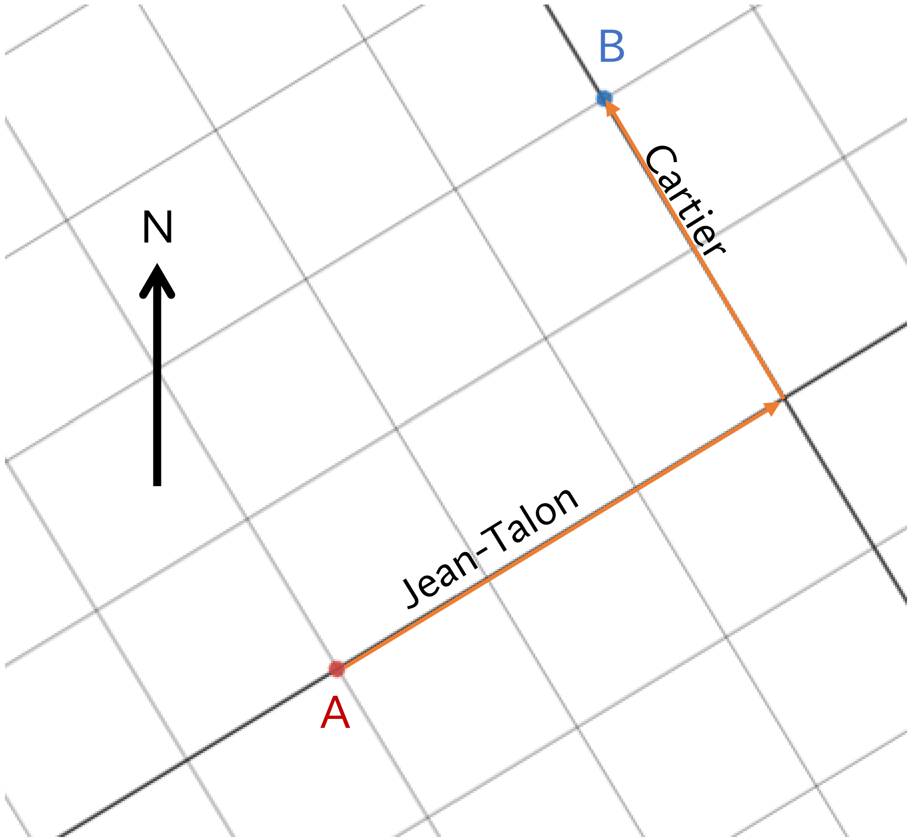


6.3 Changement de bases

300 m vers l'est et 800 m vers le nord



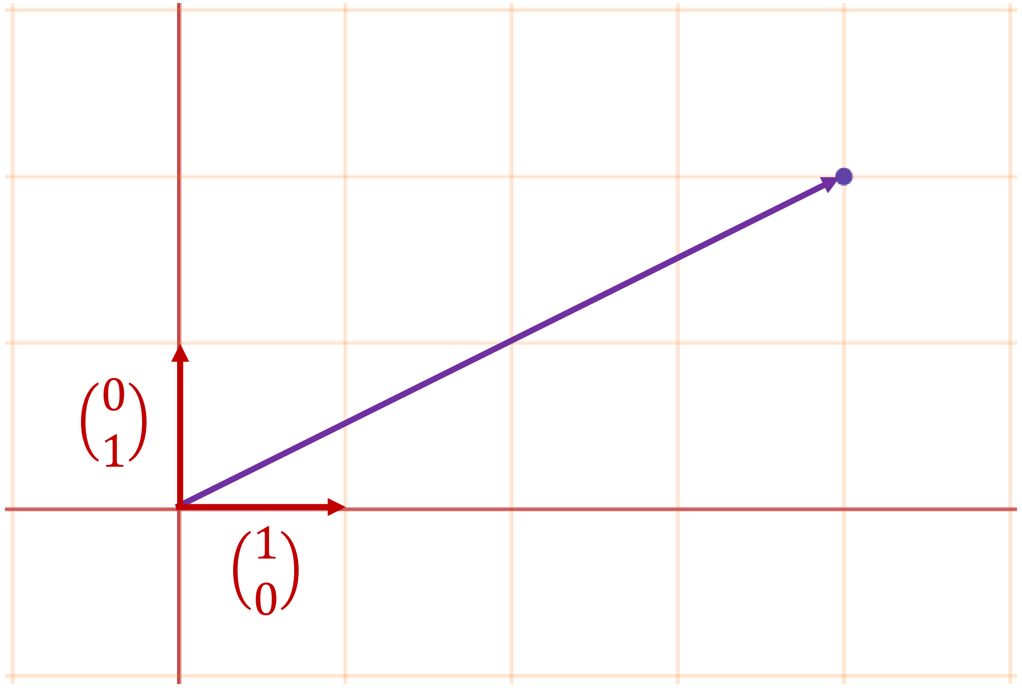
3 blocs sur Jean-Talon, tourne à gauche sur Cartier et marche 2 blocs



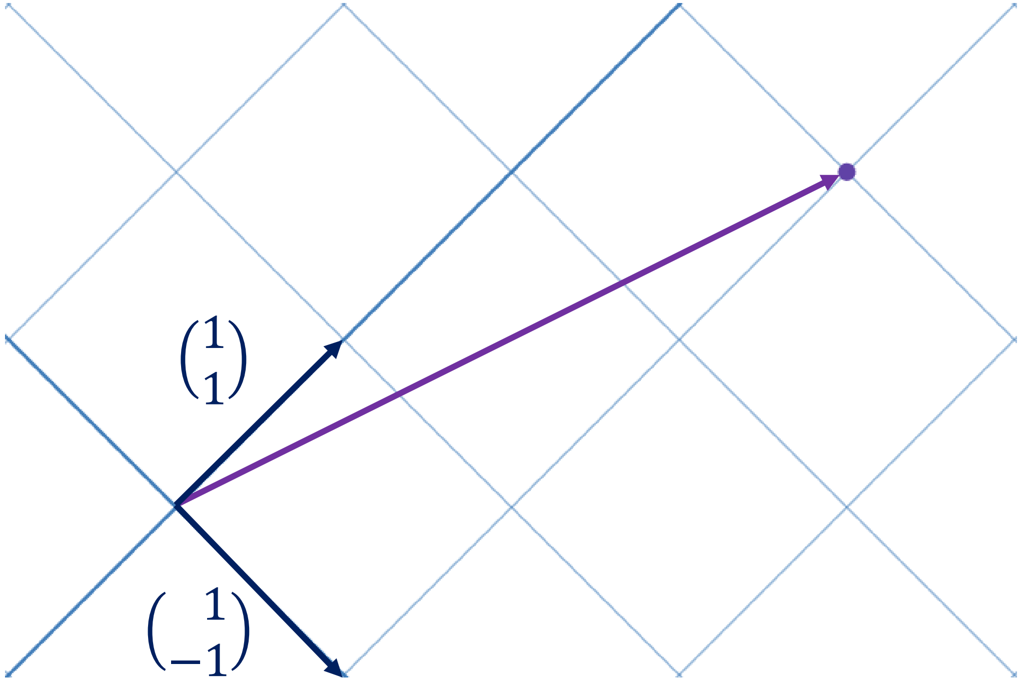
Dans certains contextes, la base canonique n'est pas nécessairement la base la plus naturelle.
Comment passer d'une base à une autre ?

Exemple 3 : a) $x = ?$ si $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $[y]_{\mathcal{B}} = ?$ si $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$



Matrice de changement de base

Théorème : Soit $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_n\}$ deux bases d'un espace vectoriel V. Il existe une unique matrice $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ telle que pour tout vecteur $\boldsymbol{x} \in V$ on a

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Les colonnes de la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = ([\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \dots [\boldsymbol{b}_n]_{\mathcal{C}})$$

Remarque : *La matrice inverse a la propriété que* $P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$. *C'est donc la matrice de passage de C vers B.*

$$P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$$

Preuve : Soit $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ et $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$.

Il existe des composantes telles que $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = (y_1, \dots, y_n)^T$ *et* $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = (z_1, \dots, z_n)^T$.
Alors on a,

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = [z_1\boldsymbol{c_1} + \cdots + z_n\boldsymbol{c_n}]_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$$

$$= [y_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + y_n\boldsymbol{b_n}]_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$$

Éqn vectorielle $= y_1[\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{C}} + \cdots + y_n[\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{C}}$

↓

Éqn matricielle $= \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ [\boldsymbol{b_1}]_{\mathcal{C}} & \dots & [\boldsymbol{b_n}]_{\mathcal{C}} \\ | & & | \end{pmatrix}}_{P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}}$

$$= \quad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Exemple 4 : Soient $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ et $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\boldsymbol{b_1} = 4\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2} \quad et \quad \boldsymbol{b_2} = -6\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}.$$

Trouvez $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$ si $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2}$.

Exemple 5 : Soient $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Trouvez $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Matrice de changement de base

Remarque : Soit $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\}$ et $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$ deux bases d'un espace vectoriel V.

Si on connait les composantes des vecteurs *dans la base canonique $\mathcal{E}$,* alors

$$[\boldsymbol{c_1} \ \dots \ \boldsymbol{c_n} | \boldsymbol{b_1} \ \dots \ \boldsymbol{b_n}] \sim [\, I \mid P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \,].$$

Exemple 6 : Soient $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Trouvez $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

6.4 Sous-espaces vectoriels

Définition : Un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$, noté W, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui respecte les trois conditions suivantes.

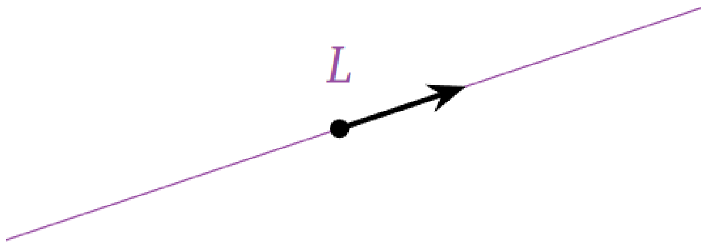
1. $\mathbf{0} \in W$.
2. Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$, alors $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$.
3. Si $\boldsymbol{u} \in W$, alors $k\boldsymbol{u} \in W \ \forall k \in \mathbb{R}$.

Remarque : *Les conditions se résument essentiellement à « toute combinaison linéaire de vecteurs de* W est aussi dans W». Ceci veut donc dire que ***tout span est un sous-espace et tout sous-espace est un span.***

Visualiser un sous-espace vectoriel

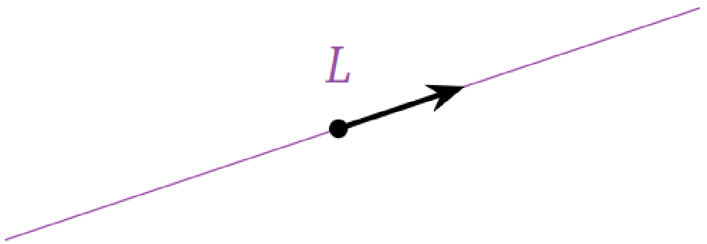
On peut penser à un sous-espace vectoriel comme un espace vectoriel imbriqué dans un espace vectoriel plus grand.

Par exemple :



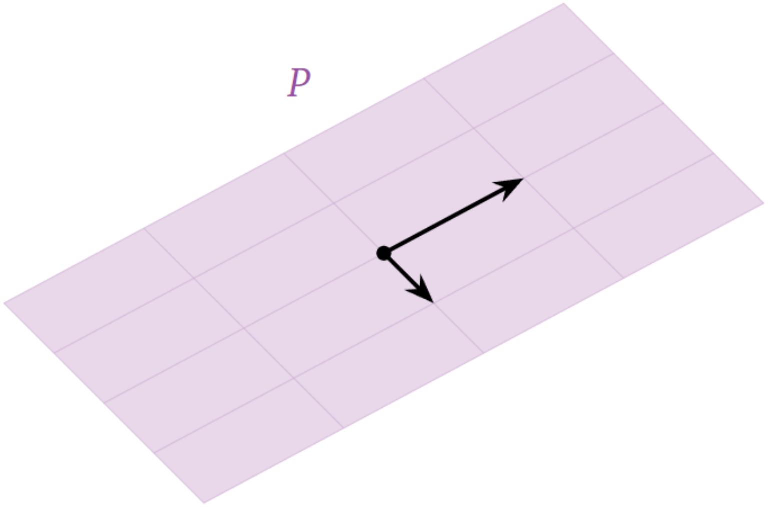
Une droite engendrée par $\boldsymbol{v} = \binom{3}{1}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

$$W = span\{\boldsymbol{v}\}$$



Une droite engendrée par $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

$$W = span\{\boldsymbol{v}\}$$



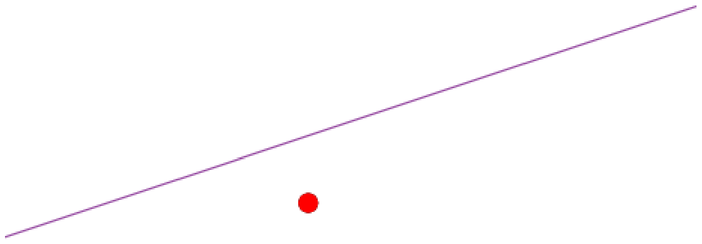
Un plan engendré par $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

$$W = span\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$$

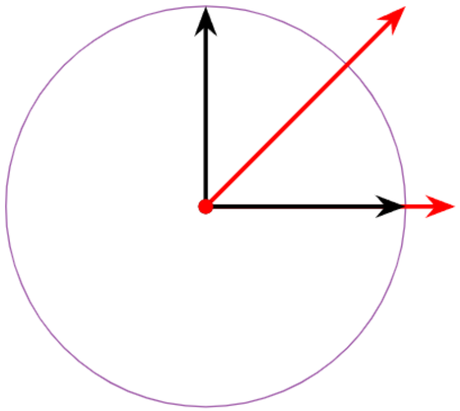
Non-exemples

Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ne forme pas un sous-espace vectoriel.

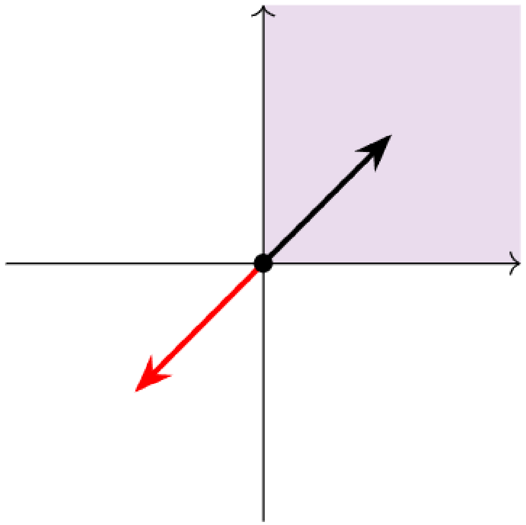
Par exemple :



Une droite ne passant pas par l'origine n'est pas un sous-espace à cause de la condition 1.



Un cercle n'est pas un sous-espace car il ne respecte aucune des conditions.



Le premier quadrant de $\mathbb{R}^2$ ne respecte pas la condition 3.

Exemple 7 : Montrez que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2a = 3b \right\}$$

Exemple 8 : Montrez que U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ab = 0 \right\}$$

Suggestion : Trouvez deux vecteurs de U dont la somme n'est pas dans U.

Deux sous-espaces importants

Considérons A_{mxn}. On s'intéresse à deux sous-espaces définis par la matrice :

- $Col(A) = span(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$: *L'espace engendré par les colonnes de la matrice A est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^m$.

- $Nul(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = 0\}$: *L'ensemble solution de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Rappel (Théorème du rang) : $\dim Col(A) + \dim Nul(A) = n$

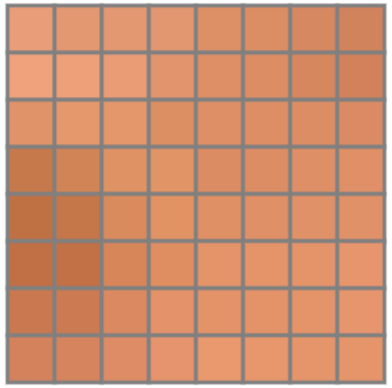
$\# \, pivots + \# \, var.libres = \# \, colonnes$

Exercice : Montrez que ce sont des sous-espaces vectoriels.

6.5 Algorithme de compression JPEG

On illustre dans cette section comme les notions de changements de base peuvent être utiles pour faire de la compression de données. En particulier, on suit la présentation de l'algorithme de compression JPEG tel que présenté dans Understanding Linear Algebra.

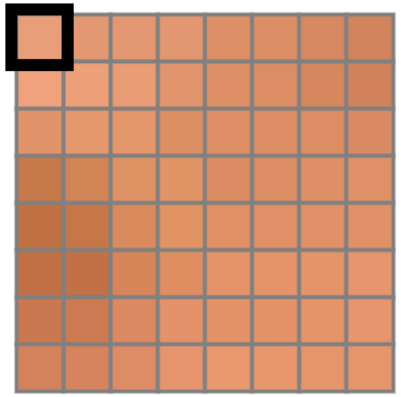
1440 x 1468 pixels

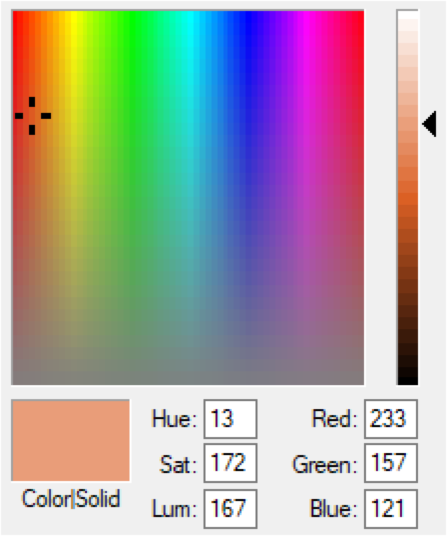


8 x 8 pixels

Format BMP et modèle RGB

La couleur d'un pixel est déterminée par trois entiers $(R, G, B)^T$ entre 0 et 255 représentant respectivement l'intensité de rouge, de vert et de bleu.





$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233 \\ 157 \\ 121 \end{pmatrix}$$

Donc 1 pixel s'encode à l'aide de 3 x 8 bits ou encore 3 octets.
C'est l'encodage utilisé dans un fichier bitmap (BMP).

Compression JPEG

Résolution : 1440 x 1468 pixels

Poids : 3 x 1440 x 1468 = 6 341 760 octets

Il faut donc **6.3 Mo** pour enregistrer l'image en BMP.

Avec un algorithme de compression JPEG on peut produire une version de bonne qualité pesant seulement 467 359 octets, soit **environ 7% du poids initial**.

Ceci n'est pas surprenant considérant que la moitié de l'image est essentiellement bleue et uniforme !

Premier changement de base : RGB vs $Y'C_bC_r$

On introduit une deuxième base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ pour décrire un pixel où

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.34413 \\ 1.772 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1.402 \\ -0.71414 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On nomme alors les composantes

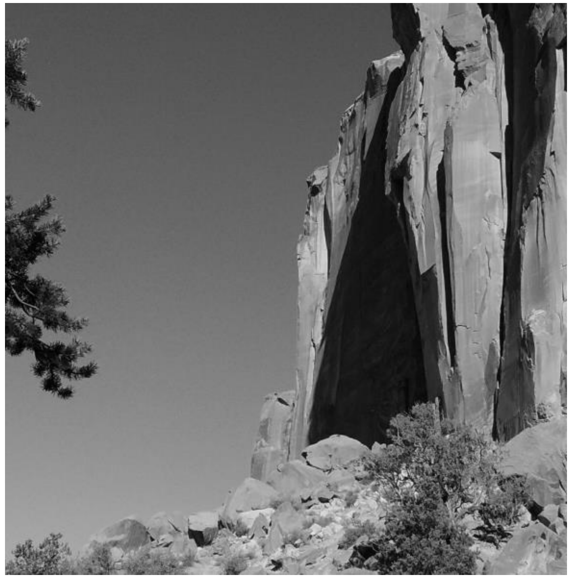
$$\left[\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} Y' \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix}$$

où *Y’* représente la *luma*, C_b représente la *chrominance bleue* et C_r la *chrominance rouge*.

Remarque : Il faudrait également ajouter +127.5 à C_b et C_r pour qu’elles soient entre [0, 255] mais par simplicité nous les garderons entre [-127.5, 127.5].

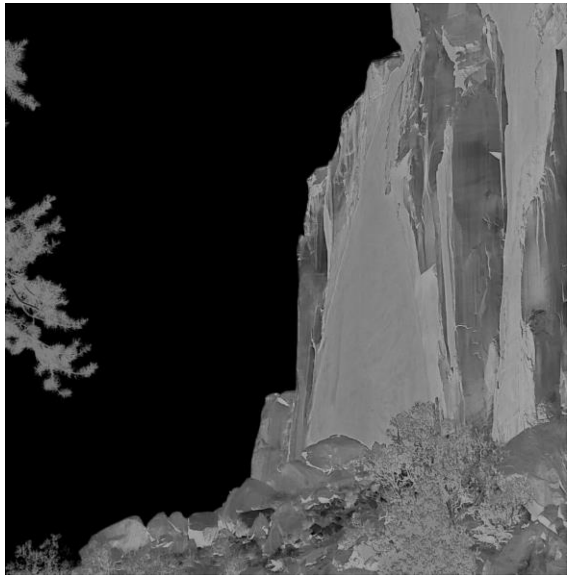
Premier changement de base

Image initiale



Y' en tons de gris

C_b en tons de gris



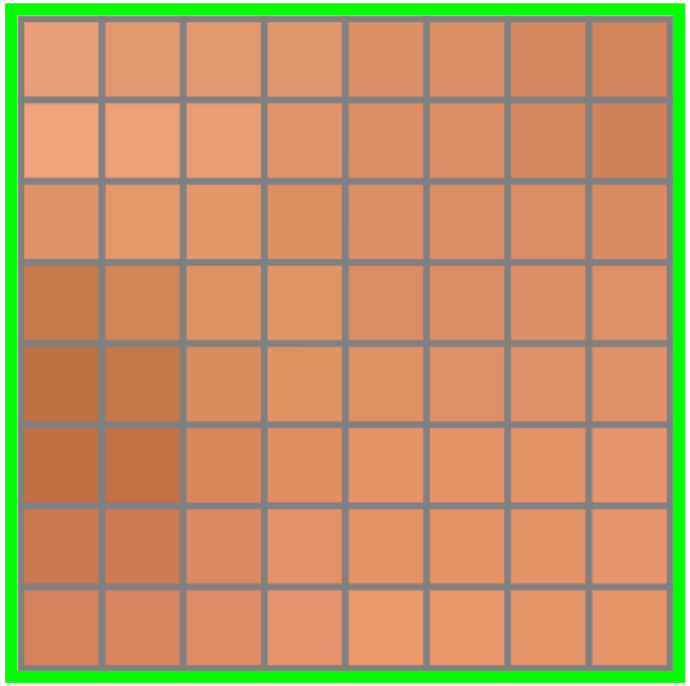
C_r en tons de gris

$$\begin{pmatrix} Y' \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Intensité lumineuse} \\ \text{Importance du bleu} \\ \text{Importance du rouge} \end{array}$$

On remarque que les détails les plus importants sont dans Y'.
C_r et C_b servent à encoder les couleurs plus que les formes.

Compression JPEG

Décomposons maintenant notre image en blocs de 8 x 8 pixels.

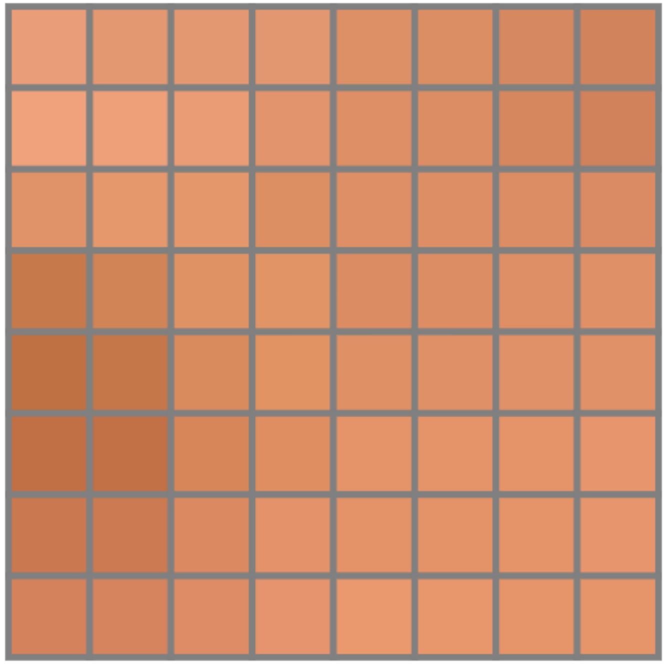


Bloc 8 x 8 pixels

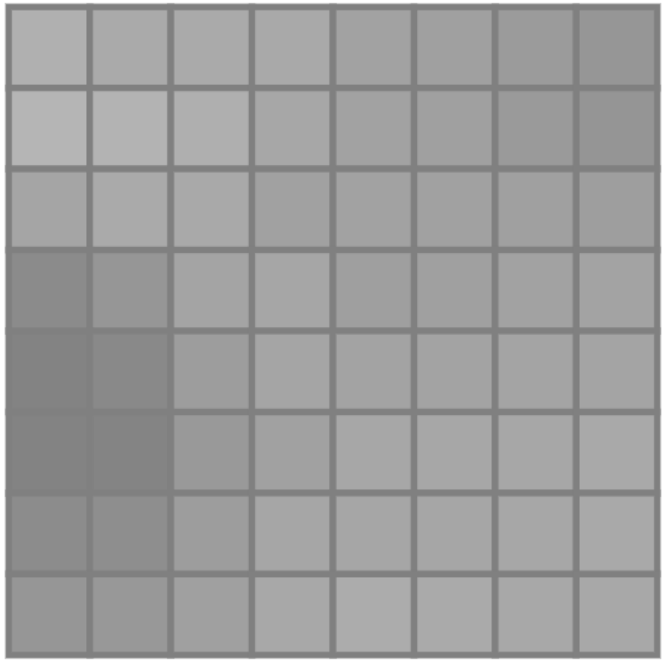
Un bloc est minuscule dans l'image. On peut alors se permettre d'uniformiser le bloc sans que le résultat soit très perceptible.

Compression JPEG

Par exemple, le luma Y' de chaque pixel ne varie pas beaucoup dans le bloc. On va effectuer un deuxième changement de base qui va nous permettre de tirer avantage de ceci. Travaillons sur une colonne du bloc à la fois :



Bloc 8 x 8 pixels



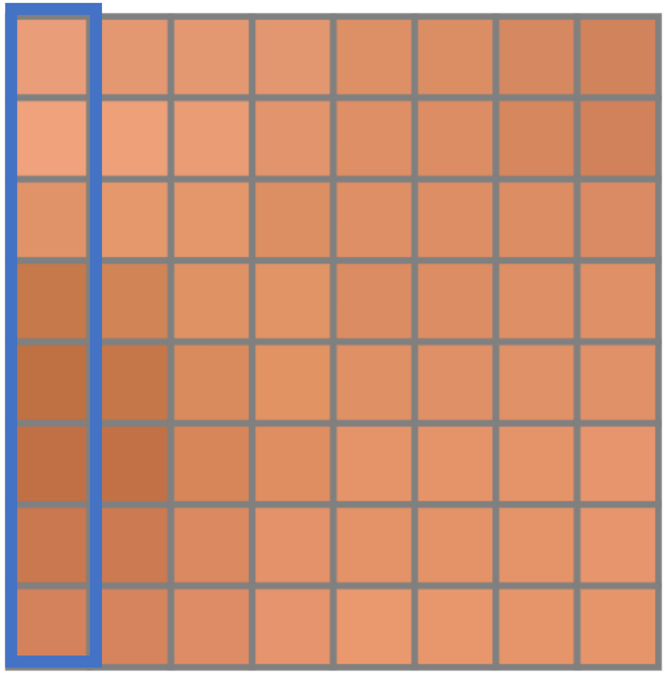
Composante Y' du bloc

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

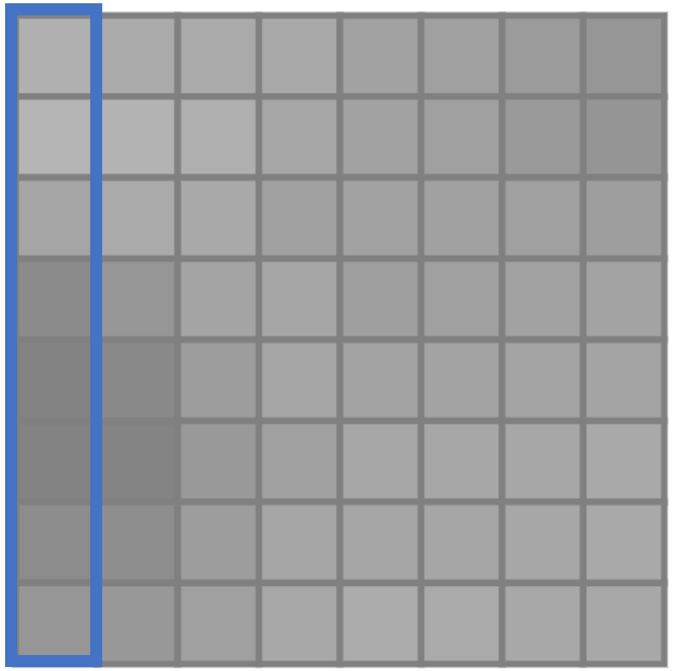
Composante Y' du bloc

Compression JPEG

Par exemple, le luma Y' de chaque pixel ne varie pas beaucoup dans le bloc. On va effectuer un deuxième changement de base qui va nous permettre de tirer avantage de ceci. Travaillons sur une colonne du bloc à la fois :



Bloc 8 x 8 pixels



Composante Y' du bloc

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

Composante Y' du bloc

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^8$$

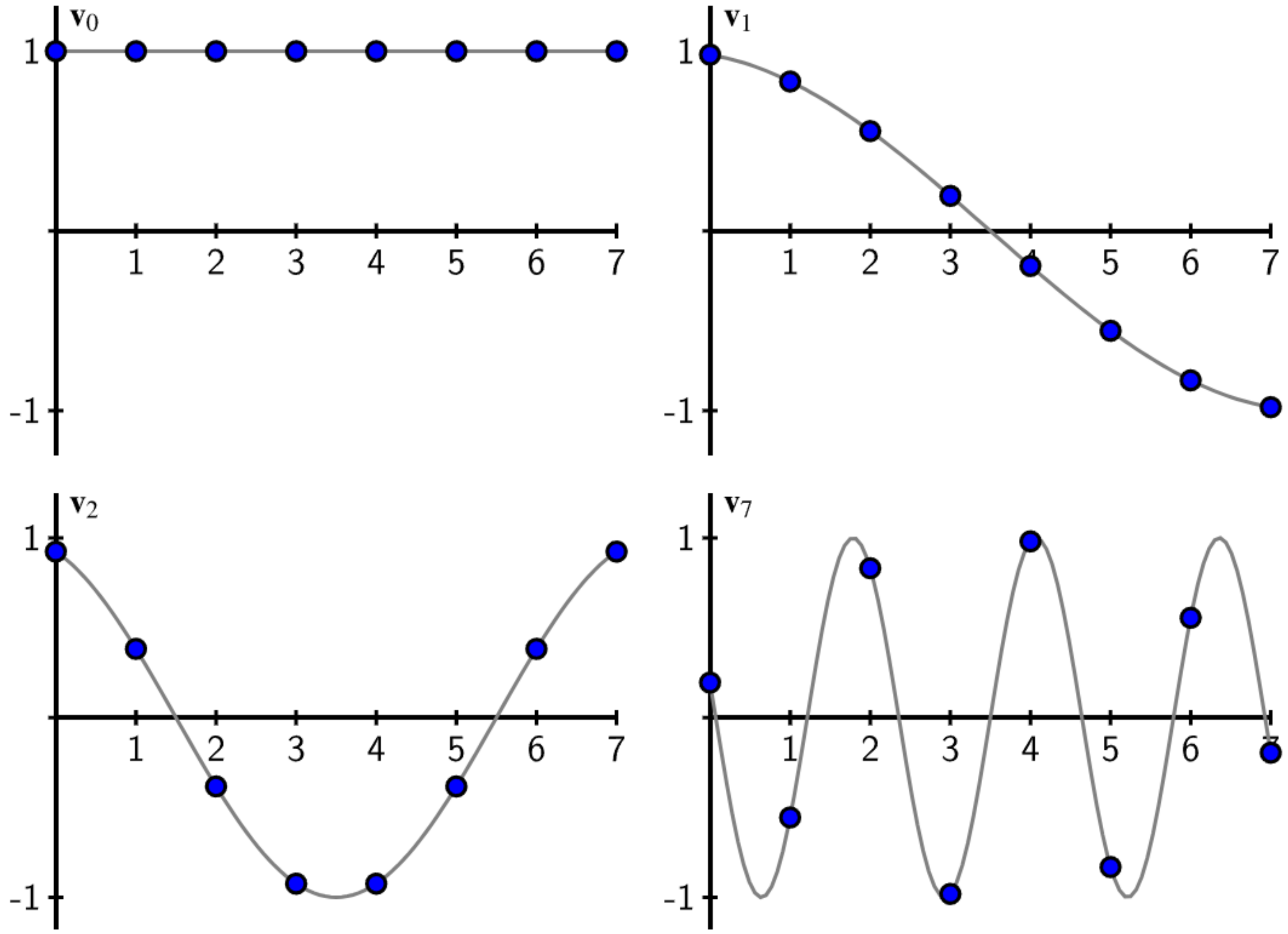
Deuxième changement de base

Chaque colonne de luma $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^8$ va être réécrite dans une nouvelle base $\mathcal{F} = \{v_0, v_1, \ldots, v_7\}$.
On appelle ce changement de base une ***Transformée de Fourier discrète (TFD).***

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 0\pi}{16}\right) \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 0\pi}{16}\right) \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 0\pi}{16}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 7+1)\cdot 0\pi}{16}\right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 1\pi}{16}\right) \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 1\pi}{16}\right) \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 1\pi}{16}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 7+1)\cdot 1\pi}{16}\right) \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 7\pi}{16}\right) \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 7\pi}{16}\right) \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 7\pi}{16}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(2\cdot 7+1)\cdot 7\pi}{16}\right) \end{bmatrix}$$

Deuxième changement de base

Les vecteurs de $\mathcal{F} = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$ peuvent sembler intimidants, mais leur interprétation graphique est plutôt simple.

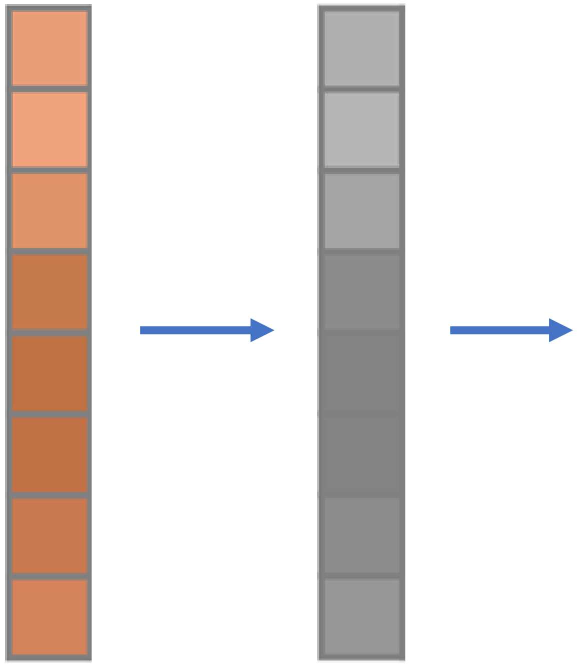


Les composantes de $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{F}$ sont nommées les coefficients de Fourier.

- $\boldsymbol{v_0}$ mesure la valeur moyenne des composantes
- $\boldsymbol{v_1}$ mesure les variations lentes des composantes
- $\boldsymbol{v_2}$ mesure des variations un peu plus rapides des composantes
- $\boldsymbol{v_7}$ mesure des variations très rapides des composantes

Deuxième changement de base

Par exemple, si on prend la première colonne de notre bloc de luma 8x8 :



$$\underbrace{\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 176 \\ 181 \\ 165 \\ 139 \\ 131 \\ 131 \\ 140 \\ 150 \end{bmatrix}}_{\textit{Composante Y' de la colonne}} \longrightarrow \underbrace{[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 151.6 \\ 20.0 \\ 15.3 \\ -6.0 \\ -3.7 \\ -3.1 \\ -0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 152 \\ 20 \\ 15 \\ -6 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\textit{Composantes de Fourier de la colonne}}$$

On remarque que les premières composantes sont significatives tandis que les dernières le sont moins.

Deuxième changement de base

On peut ainsi transformer chaque colonne de notre bloc de Y' dans la base $\mathcal{F}$:

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

Composante Y' du bloc 8 x 8

$$\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 151.6 & 154 & 163.1 & 165.4 & 164.1 & 163.4 & 162.1 & 161.3 \\ 20 & 18 & 8.8 & 0.5 & -4.2 & -4.7 & -7 & -10.1 \\ 15.3 & 9.9 & 3 & 2.4 & 2.7 & 1.4 & -1.3 & -2.9 \\ -6 & -9.2 & -3.7 & 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -3.7 & -2.5 & -0.5 & 2.3 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -3.1 & -2 & -0.8 & 0.1 & -1.5 & -0.8 & 0.6 & 1.7 \\ -0.4 & -1 & -1.4 & -2 & 1.4 & 1.1 & 1.1 & 1.2 \\ 0.7 & 0.5 & -0.4 & -0.3 & 0 & -0.2 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Composantes de Fourier

Deuxième changement de base

On peut ainsi transformer chaque colonne de notre bloc de Y' dans la base $\mathcal{F}$:

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

Composante Y' du bloc 8 x 8

$\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 151.6 & 154 & 163.1 & 165.4 & 164.1 & 163.4 & 162.1 & 161.3 \\ 20 & 18 & 8.8 & 0.5 & -4.2 & -4.7 & -7 & -10.1 \\ 15.3 & 9.9 & 3 & 2.4 & 2.7 & 1.4 & -1.3 & -2.9 \\ -6 & -9.2 & -3.7 & 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -3.7 & -2.5 & -0.5 & 2.3 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -3.1 & -2 & -0.8 & 0.1 & -1.5 & -0.8 & 0.6 & 1.7 \\ -0.4 & -1 & -1.4 & -2 & 1.4 & 1.1 & 1.1 & 1.2 \\ 0.7 & 0.5 & -0.4 & -0.3 & 0 & -0.2 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Composantes de Fourier

Chaque colonne ne variant pas beaucoup, on a pu transformer la base $\mathcal{F}$ pour mettre l'information importante dans les premières composantes de chaque colonne.

Troisième changement de base

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

Composante Y' du bloc 8 x 8

$$\begin{bmatrix} \boxed{151.6 & 154 & 163.1 & 165.4 & 164.1 & 163.4 & 162.1 & 161.3} \\ 20 & 18 & 8.8 & 0.5 & -4.2 & -4.7 & -7 & -10.1 \\ 15.3 & 9.9 & 3 & 2.4 & 2.7 & 1.4 & -1.3 & -2.9 \\ -6 & -9.2 & -3.7 & 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -3.7 & -2.5 & -0.5 & 2.3 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -3.1 & -2 & -0.8 & 0.1 & -1.5 & -0.8 & 0.6 & 1.7 \\ -0.4 & -1 & -1.4 & -2 & 1.4 & 1.1 & 1.1 & 1.2 \\ 0.7 & 0.5 & -0.4 & -0.3 & 0 & -0.2 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Composantes de Fourier

On fait maintenant la même remarque à propos de chaque ligne dans la matrice des composantes de Fourier ! *On va donc à nouveau faire un changement de base vers $\mathcal{F}$, mais cette fois-ci pour chaque ligne de la matrice de droite.*

Troisième changement de base

On peut ainsi transformer chaque *ligne* dans la base $\mathcal{F}$:

$$\begin{bmatrix} \boxed{151.6 & 154 & 163.1 & 165.4 & 164.1 & 163.4 & 162.1 & 161.3} \\ 20 & 18 & 8.8 & 0.5 & -4.2 & -4.7 & -7 & -10.1 \\ 15.3 & 9.9 & 3 & 2.4 & 2.7 & 1.4 & -1.3 & -2.9 \\ -6 & -9.2 & -3.7 & 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -3.7 & -2.5 & -0.5 & 2.3 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -3.1 & -2 & -0.8 & 0.1 & -1.5 & -0.8 & 0.6 & 1.7 \\ -0.4 & -1 & -1.4 & -2 & 1.4 & 1.1 & 1.1 & 1.2 \\ 0.7 & 0.5 & -0.4 & -0.3 & 0 & -0.2 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 160.6 & -4.0 & -4.8 & -1.7 & 0.0 & 0.9 & 0.8 & 0.3 \\ 2.7 & 14.7 & 3.8 & 1.1 & -1.6 & -0.3 & -0.3 & -0.4 \\ 3.8 & 7.0 & 2.1 & 2.9 & 0.8 & -0.2 & -0.3 & -0.3 \\ -2.4 & -3.9 & -1.9 & 0.1 & 1.2 & 1.2 & 0.7 & 0.1 \\ -0.6 & -1.4 & -1.5 & -0.9 & 0.2 & 0.6 & -0.2 & -0.5 \\ -0.7 & -1.6 & 0.0 & -1.1 & 0.0 & 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.0 & -1.4 & 0.4 & 0.9 & 0.1 & -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.0 & -0.0 & -0.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

On remarque similairement que les premières composantes de la ligne sont significatives tandis que les dernières le sont moins.

Compression de données

On peut ainsi transformer chaque *ligne* dans la base $\mathcal{F}$:

$$\begin{bmatrix} 151.6 & 154 & 163.1 & 165.4 & 164.1 & 163.4 & 162.1 & 161.3 \\ 20 & 18 & 8.8 & 0.5 & -4.2 & -4.7 & -7 & -10.1 \\ 15.3 & 9.9 & 3 & 2.4 & 2.7 & 1.4 & -1.3 & -2.9 \\ -6 & -9.2 & -3.7 & 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -3.7 & -2.5 & -0.5 & 2.3 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -3.1 & -2 & -0.8 & 0.1 & -1.5 & -0.8 & 0.6 & 1.7 \\ -0.4 & -1 & -1.4 & -2 & 1.4 & 1.1 & 1.1 & 1.2 \\ 0.7 & 0.5 & -0.4 & -0.3 & 0 & -0.2 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 160.6 & -4.0 & -4.8 & -1.7 & 0.0 & 0.9 & 0.8 & 0.3 \\ 2.7 & 14.7 & 3.8 & 1.1 & -1.6 & -0.3 & -0.3 & -0.4 \\ 3.8 & 7.0 & 2.1 & 2.9 & 0.8 & -0.2 & -0.3 & -0.3 \\ -2.4 & -3.9 & -1.9 & 0.1 & 1.2 & 1.2 & 0.7 & 0.1 \\ -0.6 & -1.4 & -1.5 & -0.9 & 0.2 & 0.6 & -0.2 & -0.5 \\ -0.7 & -1.6 & 0.0 & -1.1 & 0.0 & 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.0 & -1.4 & 0.4 & 0.9 & 0.1 & -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.0 & -0.0 & -0.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Toute l'information importante sur les composantes Y' de notre image sont maintenant encodées dans un bloc de dimensions beaucoup plus petites.

Compression de données

En particulier, si on arrondit à des valeurs entières :

$$\begin{bmatrix} 161 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 15 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beaucoup des données sont maintenant zéro. Ceci nous permet de sauver beaucoup d'espace !

Compression de données

D'autant plus si on retire les coefficients qui sont plus petits où égaux à 2 :

$$\begin{bmatrix} 161 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On mémorise donc seulement 12/64 coefficients $\approx 19\%$ des données !

Compression de données

On pourrait faire un choix plus restrictif et éliminer tout coefficient plus petit ou égal à 4 :

$$\begin{bmatrix} 161 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

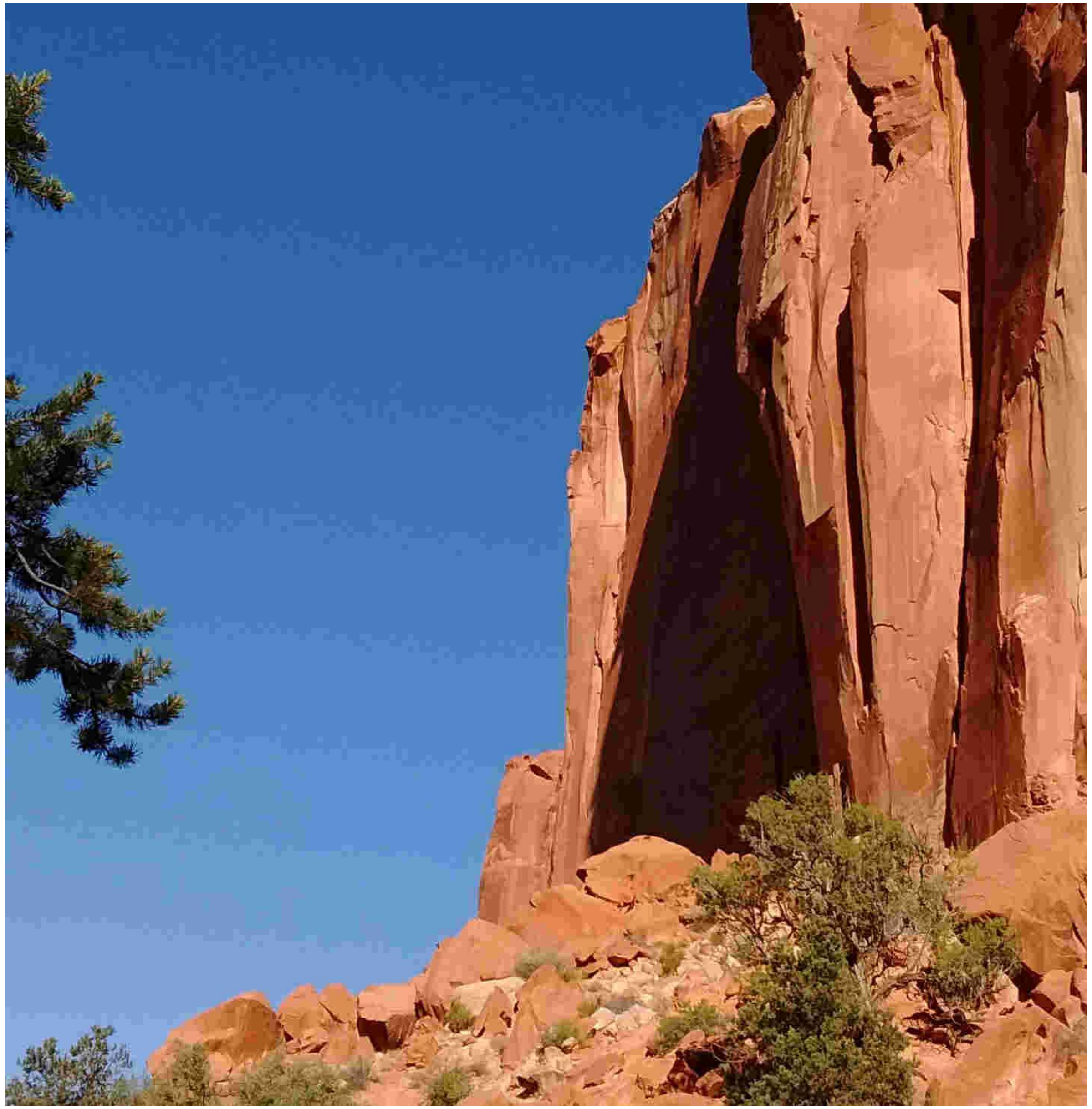
On mémorise alors seulement 5/64 coefficients $\approx 8\%$ des données !

Qualité de la compression

Certains logiciels offrent un choix de qualité de compression en JPEG qui dépend directement du nombre de coefficients de Fourier qui sont préservés.

Qualité de la compression

Bonne qualité



Mauvaise qualité

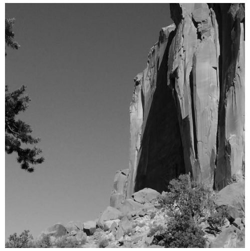
Résumé

- *Chaque pixel est encodé en* (R, G, B) *puis transformé en* (Y', C_b, C_r)
- *On sépare l'image en blocs de 8 x 8 pixels*
- *Pour chaque bloc on a trois matrices : une pour* Y'*, une pour* C_b*, une pour* C_r
- *Pour chaque matrice, on transforme ses colonnes dans la base de Fourier.*
- *On transforme ensuite chaque ligne dans la base de Fourier.*
- *On arrondit aux entiers puis on élimine les coefficients en-dessous d'une valeur choisie*
- *Il reste alors seulement quelques coefficients non-nuls à mémoriser, desquels on peut reconstruire une approximation de l'image.*

Remarque : Une stratégie similaire est utilisée pour compresser des fichiers audios en mp3

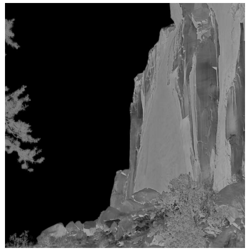
Résumé

1. $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$



Y'

C_b



C_r

Blocs 8x8

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

…

176	170	170	169	162	160	155	150
181	179	175	167	162	160	154	149
165	170	169	161	162	161	160	158
139	150	164	166	159	160	162	163
131	137	157	165	163	163	164	164
131	132	153	161	167	167	167	169
140	142	157	166	166	166	167	169
150	152	160	168	172	170	168	168

…

2. $P_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}$

TFD (colonnes)

$$\begin{bmatrix} 151.6 & 154 & 163.1 & 165.4 & 164.1 & 163.4 & 162.1 & 161.3 \\ 20 & 18 & 8.8 & 0.5 & -4.2 & -4.7 & -7 & -10.1 \\ 15.3 & 9.9 & 3 & 2.4 & 2.7 & 1.4 & -1.3 & -2.9 \\ -6 & -9.2 & -3.7 & 0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -3.7 & -2.5 & -0.5 & 2.3 & -0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -3.1 & -2 & -0.8 & 0.1 & -1.5 & -0.8 & 0.6 & 1.7 \\ -0.4 & -1 & -1.4 & -2 & 1.4 & 1.1 & 1.1 & 1.2 \\ 0.7 & 0.5 & -0.4 & -0.3 & 0 & -0.2 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

3. $P^T_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}$

TFD (lignes)

$$\begin{bmatrix} 160.6 & -4.0 & -4.8 & -1.7 & 0.0 & 0.9 & 0.8 & 0.3 \\ 2.7 & 14.7 & 3.8 & 1.1 & -1.6 & -0.3 & -0.3 & -0.4 \\ 3.8 & 7.0 & 2.1 & 2.9 & 0.8 & -0.2 & -0.3 & -0.3 \\ -2.4 & -3.9 & -1.9 & 0.1 & 1.2 & 1.2 & 0.7 & 0.1 \\ -0.6 & -1.4 & -1.5 & -0.9 & 0.2 & 0.6 & -0.2 & -0.5 \\ -0.7 & -1.6 & 0.0 & -1.1 & 0.0 & 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.0 & -1.4 & 0.4 & 0.9 & 0.1 & -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.0 & -0.0 & -0.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Arrondir + Compresser

$$\begin{bmatrix} 161 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$