Atelier d'algèbre 1
MAT145

Kathleen Pineau
École de technologie supérieure
Professeure enseignante associée
Automne 2024

Ressources

- Notes de cours en MAT144
  Pineau, K. et V. Gouaillier, **MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : notes de cours 1re partie**, Mai 2022. Disponible en ligne sur le site du cours MAT144.

- Tutorat par les pairs **Nimbus** offert à l'ÉTS

- Plusieurs sites Internet
  Alloprof, Matema-tic, Khan Academy

Factorisation de polynômes et simplification de fractions rationnelles

1.3. CALCUL ALGÉBRIQUE DES LIMITES 31

Exercices

1.17 Calculez les limites suivantes à l'aide de manipulations algébriques.

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{2h^3+4h^2+5h}{h}$

(b) $\lim_{h\to \infty} \frac{2h^3+4h^2+5h}{h}$

(c) $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)}$

(d) $\lim_{x\to \infty} (x^3-4x^6)$

(e) $\lim_{t\to \infty} \frac{500t}{10+2t}$

(f) $\lim_{t\to \infty} \frac{4t^3+20}{-t^3+10}$

(g) $\lim_{t\to \infty} \frac{2t^5+3t+1}{t^{10}+6}$

(h) $\lim_{t\to 0} \frac{2t^5+3t+1}{t^{10}+6}$

(i) $\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2}$

(j) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-10x+25}{x-5}$

1.18 Considérez la fonction suivante. *Ne tracez pas tout de suite son graphe avec la calculatrice.*

$$f(x) = \frac{12x+5}{2x-8}$$

(a) De quel type de fonction s'agit-il: fonction exponentielle, logarithmique, trigonométrique, polynomiale ou fraction rationnelle?

(b) Donnez le domaine de f.

(c) Y a-t-il une asymptote verticale au graphe de f? Si oui, quelle est son équation? Sinon, expliquez pourquoi. *Pour répondre à cette question, il vous faut évaluer une ou des limites.*

(d) Y a-t-il une asymptote horizontale au graphe de f? Si oui, quelle est son équation? Sinon, expliquez pourquoi. *Pour répondre à cette question, il vous faut évaluer une ou des limites.*

(e) Faites tracer le graphe de f pour valider vos réponses.

1.19 Trouvez, en justifiant la réponse, les trous dans le graphe de f et les asymptotes au graphe de f s'il y en a.

(a) $f(x) = \frac{x^2-10x+25}{x-5}$

(b) $f(x) = \frac{-6x+13}{4x+24}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-4x-12}{2x^2-6x-36}$

(d) $f(x) = \frac{2x^2-x+6}{x^2-4x+8}$

(e) $f(x) = \frac{5x-8}{(x-3)(2x-5)}$

(f) $f(x) = \frac{3x^3+x+2}{x^3-8}$

(g) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-8}$

(h) $f(x) = \frac{2x^3-4x^2+2}{3x^2+4}$

- Une **fonction** est dite **rationnelle** s'il s'agit d'un quotient de polynômes
- Pour répondre à toutes ces questions, on doit savoir
  - évaluer une fonction,
  - déterminer le domaine d'une fonction,
  - factoriser un polynôme et
  - simplifier un quotient de polynômes

Exemples, évaluation d'une fonction

En général :

$$\left.\frac{2x-1}{x+1}\right|_{x=5} = \frac{2(5)-1}{(5)+1} = \frac{10-1}{6} = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

L'ordre de priorité des opérations
Lorsqu'on effectue une suite d'opérations sur des nombres réels, on doit respecter l'ordre de priorité suivant.

1. On commence par effectuer les opérations situées à l'intérieur des parenthèses.
   La barre d'une fraction, un radical ou une valeur absolue joue le rôle de parenthèses.
2. On calcule ensuite les puissances (exposants).
3. On poursuit avec les multiplications et les divisions de gauche à droite.
4. On termine avec les additions et les soustractions de gauche à droite.

Lorsqu'on veut modifier cet ordre, on introduit des parenthèses.

Dans le calcul d'une limite :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{(x-2)^3} = \frac{4-4}{(2-2)^3} = \frac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{forme indéterminée}$$

Factoriser un polynôme

Quelques techniques utiles

- Mise en évidence des facteurs communs
- Inspection (technique produit-somme)
- Produits remarquables

Aide-mémoire algèbre et trigo

Opérations arithmétiques

$a(b+c)=ab+ac$ $\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ $\quad \frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ où $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$x^2+Ax=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}$ (complétion de carré)

$(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$

$(a^3-b^3)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$(a^3+b^3)=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Distributivité et mise en évidence

Opérations arithmétiques

$a(b+c)=ab+ac$ $\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ $\quad \frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Aide-mémoire algèbre et trigo

Distributivité : un facteur se distribue sur des termes

$$2x\cdot(\boxed{3x}+\boxed{5})=\boxed{2x\cdot 3x}+\boxed{2x\cdot 5}=2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot+2\cdot 5\cdot x=6x^2+10x$$

$\longrightarrow$ DÉVELOPPER
(transformer un produit en somme)

$\longleftarrow$ FACTORISER
(transformer une somme en produit)

Mise en évidence : on sort un facteur commun à tous les termes

Tiré des notes de cours de MAT144

Exemple 2.7

Pour chacun des polynômes suivants, effectuez la mise en évidence de tous les facteurs communs.

(a) $5x^4 - 3x^2$
(b) $x^2(1-x) + 5(1-x)$
(c) $5x^2y + 30y^2 + 10y$
(d) $10x^4 + 30x^3 - 2x^2$
(e) $2 \cdot (3x+1) \cdot 3 \cdot (1-2x) + (3x+1)^2 \cdot (-2)$

Solution :

(a) x^2 est le seul facteur commun aux deux termes.

$$5x^2 \cdot x^2 - 3x^2 = x^2 \cdot (5x^2 - 3)$$

Validation. On s'assure que la mise en évidence est juste en distribuant le facteur commun sur l'addition (*faites-le*) et qu'on obtient l'expression de départ.

(b) $(1-x)$ est le seul facteur commun aux deux termes.

$$x^2(1-x) + 5(1-x) = (1-x) \cdot (x^2 + 5)$$

(c) 5 et y sont les seuls facteurs communs aux trois termes.

$$5x^2y + 5 \cdot 6 \cdot y \cdot y + 5 \cdot 2 \cdot y = 5y(x^2 + 6y + 2)$$

(d) Les facteurs communs aux trois termes sont 2 et x^2.

$$10x^4 + 30x^3 - 2x^2 = 5x^2 \cdot 2x^2 + 15x \cdot 2x^2 - 1 \cdot 2x^2 = 2x^2 \cdot (5x^2 + 15x - 1)$$

(e) L'expression à factoriser est celle qu'on obtient lorsqu'on utilise les règles et les formules de dérivation qui sont vues dans un premier cours de calcul différentiel. Elle contient deux termes dont les facteurs communs sont 2 et $3x+1$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3x+1) \cdot 3 \cdot (1-2x) + (3x+1)^2 \cdot (-2) &= 2 \cdot (3x+1) \cdot [3 \cdot (1-2x) + (3x+1)(-1)] \\ &= 2 \cdot (3x+1) \cdot [3 - 6x - 3x - 1] \\ &= 2(3x+1)(2-9x) \end{aligned}$$

Exemple 1.11 de MAT145

Factorisation par mise en évidence du facteur x.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-2)^3} \right) &= \lim_{x \to 2} \left(\frac{\boxed{x \cdot (x-2)}}{(x-2)^3} \right) && \text{limite de la forme } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \to 2} \left(\frac{x}{(x-2)^2} \right) && \text{limite de la forme } \frac{2}{0^+} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et on simplifie un facteur $(x\text{-}2)$ qui est commun au numérateur et dénominateur.

Exemple 1.12 de MAT145

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+10}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(4+\frac{10}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \frac{4+\frac{10}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}} = \frac{4+0}{2+0} = 2$$

Inspection (technique produit-somme)

Tiré des notes de cours de MAT144

$$\boxed{(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)\,x+a\,b}$$

Exemple 2.8

Factorisez les trinômes suivants dans les entiers.

(a) $x^2+11x+30$ (b) x^2-4x-5 (c) $x^2-9x+14$ (d) x^2+3x+5

facteurs de 30	1 et 30	2 et 15	3 et 10	5 et 6
somme des facteurs	31	17	13	11

$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$

facteurs de -5	-1 et 5	1 et -5
somme des facteurs	4	-4

$x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

facteurs de 14	1 et 14	-1 et -14	2 et 7	-2 et -7
somme des facteurs	15	-15	9	-9

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$

facteurs de 5	1 et 5	-1 et -5
somme des facteurs	6	-6

impossible de factoriser x^2+3x+5 dans les entiers.

Aide-mémoire algèbre et trigo

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ où $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\,x+a\,b}$

$x^2+A\,x=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}$ (complétion de carré)

Tiré des notes de cours de MAT144

Exemple 2.16

Quels sont les domaines des fractions rationnelles suivantes ?

(a) $\frac{2x-1}{4}$ (b) $\frac{x+2}{x^2+x-2}$

Solution :

(a) Puisque le dénominateur est 4, il ne s'annule jamais. Le domaine de la fraction est donc $\mathbb{R}$.

(b) On factorise le dénominateur

$$\frac{x+2}{x^2+x-2} = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)}$$

et on utilise la règle du produit nul,

$$\begin{aligned}(x+2)(x-1)=0 &\iff x+2=0 \text{ ou } x-1=0\\ &\iff x=-2 \text{ ou } x=1.\end{aligned}$$

Les valeurs -2 et 1 annulent donc le dénominateur $(x+2)(x-1)$ et le domaine de la fraction rationnelle est alors $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Tiré des notes de cours de MAT144

Exemple 6.19

Déterminez les équations de toutes les asymptotes verticales au graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}.$$

Solution :

On détermine d'abord le domaine de la fonction. Dans ce cas, le dénominateur x^2+4x+3 se factorise facilement par inspection $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ et, par la règle du produit nul,

$$(x+1)(x+3)=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=-3$$

on trouve que le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1; -3\}$.

Asymptotes verticales potentielles…

puisque $$\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x+3)} = \frac{x-2}{x+3} \text{ si } x \neq -1$$

on trouve

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -3^+} \frac{x-2}{x+3} = \frac{-3^+-2}{-3^++3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

tandis que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x-2}{x+3} = \frac{-1^--2}{-1^-+3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

et

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{x+3} = \frac{-1^+-2}{-1^++3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$

Utilisation des produits remarquables

Aide-mémoire algèbre et trigo

Factorisations et développements

$(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$

$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$x^2+Ax = \left(x+\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4}$ (complétion de carré)

Tiré des notes de cours de MAT144

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Aide-mémoire algèbre et trigo

Exemple 2.13

Factorisez les carrés parfaits suivants.

(a) $x^2 + 6x + 9$ (b) $4x^2 - 20x + 25$

Solution :

(a) On soupçonne qu'il s'agit d'un carré parfait (somme), car x^2 et 9 sont des carrés parfaits et $6x = 2 \cdot (x \cdot 3)$, c'est-à-dire $A = x$ et $B = 3$.

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot (x \cdot 3) + 3^2 = (x+3)^2$$

Validation. On effectue la multiplication

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9.$$

(b) On soupçonne qu'il s'agit d'un carré parfait (différence), car $4x^2 = (2x)^2$ et $25 = 5^2$, c'est-à-dire $A = 2x$ et $B = 5$.

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = (2x-5)^2$$

Tiré des notes de cours de MAT144

Exemple 2.14

Factorisez les différences et la somme suivantes.

(a) $x^2 - 25$ (b) $9 - 16x^2$ (c) $x^3 + 125$ (d) $64x^3 - 27$

Solution :

(a) On écrit d'abord $x^2 - 25$ comme une différence de carrés où $A = x$ et $B = 5$.

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$$

(b) $9 - 16x^2$ est une différence de carrés avec $A = 3$ et $B = 4x$.

$$9 - 16x^2 = 3^2 - (4x)^2 = (3-4x)(3+4x)$$

(c) $x^3 + 125$ est une somme de cubes où $A = x$ et $B = 5$.

$$\begin{aligned} x^3 + 125 &= x^3 + 5^3 \\ &= (x+5)(x^2 - x \cdot 5 + 5^2) \quad \text{on utilise le produit remarquable} \\ &= (x+5)(x^2 - 5x + 25) \quad \text{on simplifie} \end{aligned}$$

Pour savoir si $x^2 - 5x + 25$ se factorise, on calcul le discriminant

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=1, b=-5, c=25} = (-5)^2 - 4(1)(25) = 25 - 100 = -75 < 0.$$

Puisqu'il est négatif, $x^2 - 5x + 25$ est irréductible. Le polynôme est donc complètement factorisé.

$$x^3 + 125 = (x+5)(x^2 - 5x + 25)$$

Aide-mémoire algèbre et trigo

$$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Tiré des notes de cours de MAT144

(d) $64x^3 - 27$ est une différence de cubes où $A = 4x$ et $B = 3$.

$$\begin{aligned} 64x^3 - 27 &= (4x)^3 - 3^3 \\ &= (4x-3)((4x)^2 + (4x)(3) + 3^2) && \text{on utilise le produit remarquable} \\ &= (4x-3)(16x^2 + 12x + 9) && \text{on simplifie} \end{aligned}$$

Pour savoir si $16x^2 + 12x + 9$ se factorise, on calcule le discriminant.

$$b^2 - 4ac\Big|_{a=16,b=12,c=9} = 12^2 - 4(16)(9) = -432 < 0$$

On en conclut que $16x^2 + 12x + 9$ est irréductible et que

$$64x^3 - 27 = (4x-3)(16x^2 + 12x + 9)$$

est complètement factorisé.

$$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exemple 1.14 de MAT145

Factorisation d'une différence de carrés

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 4} \frac{t^2 - 16}{t-4} &= \lim_{t\to 4} \frac{\boxed{(\cancel{t-4})(t+4)}}{\cancel{t-4}} \\ &= \lim_{t\to 4} (t+4) \\ &= 4+4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Dom}(f) =]-\infty;4[\cup]4;\infty[= \mathbb{R}\backslash\{4\}$$

Exercices

1.17 Calculez les limites suivantes à l'aide de manipulations algébriques.

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2h^3+4h^2+5h}{h}$

(b) $\displaystyle\lim_{h\to \infty}\frac{2h^3+4h^2+5h}{h}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(x^3-4x^6)$

(e) $\displaystyle\lim_{t\to \infty}\frac{500t}{10+2t}$

(f) $\displaystyle\lim_{t\to \infty}\frac{4t^3+20}{-t^3+10}$

(g) $\displaystyle\lim_{t\to \infty}\frac{2t^5+3t+1}{t^{10}+6}$

(h) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{2t^5+3t+1}{t^{10}+6}$

(i) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t-2}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{x-5}$

1.18 Considérez la fonction suivante. *Ne tracez pas tout de suite son graphe avec la calculatrice.*

$$f(x)=\frac{12x+5}{2x-8}$$

(a) De quel type de fonction s'agit-il : fonction exponentielle, logarithmique, trigonométrique, polynomiale ou fraction rationnelle?

(b) Donnez le domaine de f.

(c) Y a-t-il une asymptote verticale au graphe de f? Si oui, quelle est son équation? Sinon, expliquez pourquoi. *Pour répondre à cette question, il vous faut évaluer une ou des limites.*

(d) Y a-t-il une asymptote horizontale au graphe de f? Si oui, quelle est son équation? Sinon, expliquez pourquoi. *Pour répondre à cette question, il vous faut évaluer une ou des limites.*

(e) Faites tracer le graphe de f pour valider vos réponses.

1.19 Trouvez, en justifiant la réponse, les trous dans le graphe de f et les asymptotes au graphe de f s'il y en a.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-10x+25}{x-5}$

(b) $f(x)=\dfrac{-6x+13}{4x+24}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{2x^2-6x-36}$

(d) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+6}{x^2-4x+8}$

(e) $f(x)=\dfrac{5x-8}{(x-3)(2x-5)}$

(f) $f(x)=\dfrac{3x^3+x+2}{x^3-8}$

(g) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-8}$

(h) $f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2+2}{3x^2+4}$