Atelier d’algèbre 3
MAT145

Kathleen Pineau
École de technologie supérieure
Professeure enseignante associée
Automne 2024

Simplifier une fraction

Aide-mémoire algèbre et trigo

Opérations arithmétiques

$a(b+c) = ab + ac$ $\qquad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ $\qquad \dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

$$\frac{36}{42} = \frac{6\cdot 6}{6\cdot 7} = \underbrace{\boxed{\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}}}_{1}\cdot\frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{x^2+5x}{5x} = \frac{x\cdot x+5x}{5x} = \frac{x(x+5)}{5x} = \underbrace{\boxed{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}}_{1}\cdot\frac{(x+5)}{5} \overbrace{=}^{\text{si } x\neq 0} \frac{(x+5)}{5}$$

Exemples : Écrire autrement avant de dériver

2.5 Dérivez les fonctions suivantes. Donnez le résultat avec exposants positifs et dénominateur commun.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x - 80$

(b) $f(x) = x^3 + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + x$

(d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

(e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - x^4$

(g) $f(x) = \pi x^2$

(h) $f(x) = \dfrac{2}{x^4}$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^5$

(j) $f(x) = \dfrac{2 + x + 8x^3}{x^4}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}$

(l) $f(x) = x^2(2x^4 - 6x^3)$

(m) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 5}{x^2}$

(n) $f(x) = x + \pi^2$

(o) $f(x) = \dfrac{16x^8 + 6x^4 + 1}{2x^4}$

(p) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2}{x^2}$

(q) $f(x) = 10\sqrt[5]{x^6}$

(r) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

(s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$

(t) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

(u) $f(x) = \dfrac{12x^{10} - 3x^3 + 4}{4x^2}$

Aide-mémoire algèbre et trigo

Opérations arithmétiques

$a(b + c) = ab + ac$ $\qquad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

$\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ $\qquad \dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

Propriétés des exposants et des radicaux

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(ab)^n = a^n b^n$ $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Simplification de la dérivée obtenue

2.5 Dérivez les fonctions suivantes. Donnez le résultat avec exposants positifs et dénominateur commun.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x - 80$

(b) $f(x) = x^3 + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + x$

(d) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

(e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - x^4$

(g) $f(x) = \pi x^2$

(h) $f(x) = \dfrac{2}{x^4}$

(i) $f(x) = \sqrt{3}x^5$

(j) $f(x) = \dfrac{2 + x + 8x^3}{x^4}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}$

(l) $f(x) = x^2(2x^4 - 6x^3)$

(m) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 5}{x^2}$

(n) $f(x) = x + \pi^2$

(o) $f(x) = \dfrac{16x^8 + 6x^4 + 1}{2x^4}$

(p) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2}{x^2}$

(q) $f(x) = 10\sqrt[5]{x^6}$

(r) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

(s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$

(t) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

(u) $f(x) = \dfrac{12x^{10} - 3x^3 + 4}{4x^2}$

Plus petit dénominateur commun

1. Factoriser les dénominateurs de toutes les fractions.
2. Écrire tous les facteurs du dénominateur de la première fraction.
3. Accoler les facteurs du deuxième dénominateur qui n'y sont pas déjà, et ainsi de suite avec les autres dénominateurs.

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3} \longrightarrow \boxed{\frac{}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}}$$

Exemple

$$\frac{1}{3x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{3}$$

Exemple MAT145

MAT145,P1 : p.53, ex. 2.11

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{6x^7}{x^3} - \frac{7x^2}{x^3} + \frac{10}{x^3}\right]' \\
&= [6x^4 - 7x^{-1} + 10x^{-3}]' \\
&= [6x^4]' - [7x^{-1}]' + [10x^{-3}]' \\
&= 6[x^4]' - 7[x^{-1}]' + 10[x^{-3}]' \\
&= 6 \cdot 4x^3 - 7 \cdot (-1)x^{-2} + 10 \cdot (-3)x^{-4} \\
&= 24x^3 + \frac{7}{x^2} - \frac{30}{x^4}
\end{aligned}
$$

Règles de dérivation

1. $(c\,u)' = c\,u'$
2. $(u + v)' = u' + v'$
3. $(u - v)' = u' - v'$
4. $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$
6. $\big(v(u(x))\big)' = v'(u(x))\,u'(x)$
   $= v'(u)\,u'(x) = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

et dénominateur commun ?

Autres types de simplification

Tiré des notes de cours de MAT144

1.51 Les expressions suivantes sont obtenues à l'aide des formules et des règles de dérivation que vous verrez dans le cours de calcul différentiel. Simplifiez chacune des expressions suivantes et donnez la réponse sous forme d'une seule fraction simplifiée.

(a) $-\frac{1}{3}(6x-1)^{-4/3}\cdot 6$

(b) $\frac{1}{2}(5x^2+2x)^{-1/2}(10x+2)$

(c) ★ $\dfrac{(2x-1)^{1/2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{-1/2}\cdot 2}{2x-1}$

Autres types de simplification

Tiré des notes de cours de MAT144

2.14 Les expressions suivantes ont été obtenues à l'aide des formules et des règles de dérivation que vous verrez dans le cours de calcul différentiel. Effectuez la mise en évidence des facteurs communs pour factoriser chacun des polynômes suivants. Simplifiez lorsque possible.

> **Attention !** En calcul différentiel, on cherche souvent à déterminer les points stationnaires d'une fonction (là où sa dérivée est zéro). On écrit donc les dérivées obtenues sous forme factorisée pour facilement en trouver les zéros.

(a) $2A \cdot 3B + A^2 \cdot (-1)$

(b) $2 \cdot (3x-2) \cdot 3 \cdot (1-x) + (3x-2)^2 \cdot (-1)$

(c) $3A^4 + 3B \cdot 4A^3$

(d) $3(x-1)^4 + 3x \cdot 4(x-1)^3$

(e) $3A^2 \cdot 3 \cdot B^5 + A^3 \cdot 5B^4 \cdot 2$

(f) $3(3x+2)^2 \cdot 3 \cdot (2x-1)^5 + (3x+2)^3 \cdot 5(2x-1)^4 \cdot 2$

(g) $9(4x-3)^8 \cdot 4 \cdot (5-x)^4 + (4x-3)^9 \cdot 4(5-x)^3 \cdot (-1)$

2.25 Dérivez les fonctions suivantes et comparez votre résultat avec celui d'un calculateur symbolique.
Conseil: avant d'utiliser la règle de la dérivée d'un produit ou celle d'un quotient, regardez s'il est possible de simplifier l'expression.

(a) $f(x) = x^5 2^x$

(b) $f(x) = e^x \cos(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{2x^3-x^4}$

(g) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

(h) $f(x) = (x^4+1)(x^4-1)$

(i) $f(x) = x^4 \sec(x)$

(j) $f(x) = \sqrt{x}\sin(x)$

(k) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4x^2+3}$

2.26 Dérivez les fonctions
lique.

(a) $f(x) = \cos(2x)$

(b) $f(x) = \sin^3(x)$

(c) $f(x) = \arcsin(x^3)$

(d) $f(x) = \ln(\cos x) - 4x^3$

(e) $f(x) = e^{3x+1}$

(f) $f(x) = \left(5x^2+x+10\right)^6$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(h) $f(x) = \sin(x^3+4x)$

(i) $f(x) = \sin(5)$

(j) $f(x) = \log_2(x^3-1)$

(k) $f(x) = 2\arctan(3x)$

(l) $f(x) = 3\pi^2\ln(2x+1)$

(m) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

2.27 Dérivez les fonctions suivantes et comparez votre résultat avec celui d'un calculateur symbolique.

(a) $f(x) = \dfrac{20}{9+5x}$

(b) $f(x) = \dfrac{9+5x}{20}$

(c) $f(x) = -\dfrac{6}{x^3}$

(d) $f(x) = \dfrac{10+9x+20x^2}{5x}$

(e) $f(t) = t^2 e^{-2t}$

(f) $g(t) = \sqrt{4-t^2}$

(g) $x(t) = \dfrac{t^2+3}{\sqrt{t}}$

(h) $x(t) = 4 - 3t\sin(t^3)$

(i) $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}} + e^{\sqrt{t}}$

(j) $h(t) = e^{-t}\sin(t)$

(k) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+5}$

(l) $x(t) = \dfrac{5}{(t^2-4)^3}$

(m) $T(t) = t^2\sqrt{t^2+1}$

(n) $f(t) = t^3 e^{\sin(t)}$

(o) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

(p) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

(q) $y(x) = e^\pi + x^\pi$

(r) $y(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$

(s) $f(x) = \dfrac{x^2+a^2}{x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$

(s) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x^3+2}{x^3-2}}$

(t) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x-1}}$

(u) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arccos(x^4)$

(v) $f(x) = \cos^2(\sqrt{2x+1})$

Pour répondre aux questions 2.25, 2.26 et 2.27, on doit

- décoder l'expression à l'aide de l'ordre de priorité des opération pour déterminer la bonne règle ou formule de dérivation à utiliser

On procède selon l'ordre contraire de la priorité des opérations

- Simplifier l'expression obtenue

Combien de termes ?
Devrait-on/peut-on simplifier avant de dériver ?
Quelle est la dernière opération (la première à dériver) ?

Règles de dérivation

1. $(c\,u)' = c\,u'$
2. $(u+v)' = u' + v'$
3. $(u-v)' = u' - v'$
4. $(u\,v)' = u'v + u\,v'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$
6. $\left(v(u(x))\right)' = v'(u(x))\,u'(x)$
$= v'(u)\,u'(x) = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

2.25 Dérivez les fonctions suivantes et comparez votre résultat avec celui d'un calculateur symbolique.
Conseil: avant d'utiliser la règle de la dérivée d'un produit ou celle d'un quotient, regardez s'il est possible de simplifier l'expression.

(a) $f(x) = x^5 2^x$

(b) $f(x) = e^x \cos(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{2x^3 - x^4}$

(g) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

(h) $f(x) = (x^4+1)(x^4-1)$

(i) $f(x) = x^4 \sec(x)$

(j) $f(x) = \sqrt{x}\sin(x)$

(k) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4x^2+3}$

(l) $f(x) = \dfrac{4x^2+3}{3x^2}$

(m) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+6\cos(x)}{\cos(x)}$

Combien de termes ?
Devrait-on/peut-on simplifier avant de dériver ?
Quelle est la dernière opération (la première à dériver) ?

2.26 Dérivez les fonctions suivantes et comparez votre résultat avec celui d'un calculateur symbolique.

(a) $f(x) = \cos(2x)$

(b) $f(x) = \sin^3(x)$

(c) $f(x) = \arcsin(x^3)$

(d) $f(x) = \ln(\cos x) - 4x^3$

(e) $f(x) = e^{3x+1}$

(f) $f(x) = \left(5x^2 + x + 10\right)^6$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(h) $f(x) = \sin(x^3 + 4x)$

(i) $f(x) = \sin(5)$

(j) $f(x) = \log_2(x^3 - 1)$

(k) $f(x) = 2\arctan(3x)$

(l) $f(x) = 3\pi^2 \ln(2x+1)$

(m) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

(n) $f(x) = e^{-3x}\cos(5x)$

(o) $f(x) = e^{-x/2}(\cos(3x) + \sin(3x))$

(p) $f(x) = \left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^3$

(q) $f(x) = (4x-3)^9(5-x)^4$

(r) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(s) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x^3+2}{x^3-2}}$

(t) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x-1}}$

(u) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arccos(x^4)$

(v) $f(x) = \cos^2(\sqrt{2x+1})$

Règles de dérivation

1. $(c\,u)' = c\,u'$
2. $(u+v)' = u' + v'$
3. $(u-v)' = u' - v'$
4. $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$
6. $\left(v(u(x))\right)' = v'(u(x))\,u'(x)$

$$= v'(u)\,u'(x) = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Ressources

- Notes de cours en MAT144
  Pineau, K. et V. Gouaillier, **MAT144 Introduction aux mathématiques du génie : notes de cours 1re partie**, Mai 2022. Disponible en ligne sur le site du cours MAT144.
- Tutorat par les pairs **Nimbus** offert à l'ÉTS
- Plusieurs sites Internet
  Alloprof, Matema-tic, Khan Academy
- MAT144

Lien au sondage en ligne
https://forms.gle/pTaBZ6c18f9UQFXB7
on devrait vous l’envoyer par courriel