

Blitz trigonométrie

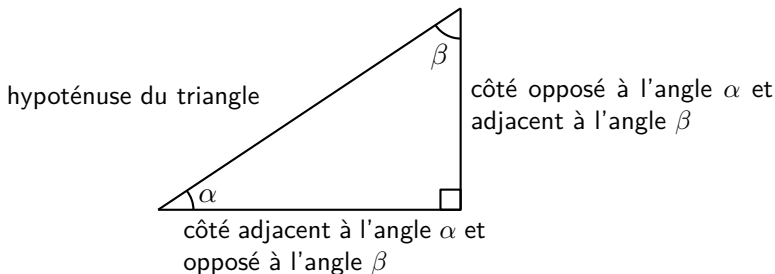
Kathleen Pineau
professeure enseignante associée
École de technologie supérieure

9 mars 2026

- ▶ Les angles et leurs mesures (degrés, radians)
- ▶ Le cercle trigonométrique et comment s'y retrouver
- ▶ Exemples d'intégrales

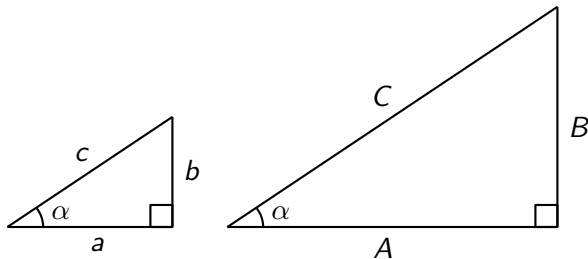
Un peu de terminologie

On désigne les côtés d'un triangle rectangle en fonction de leur position par rapport aux angles. L'**hypoténuse** est le côté qui fait face à l'angle droit. Le **côté opposé** à un angle aigu est le côté qui lui fait face alors que le **côté adjacent** à cet angle est celui qui forme l'angle avec l'hypoténuse.



Les triangles semblables

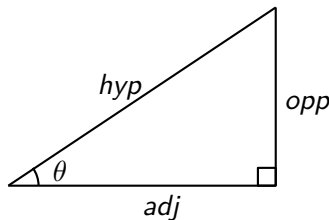
Depuis plus de 2000 ans on sait que, dans le plan, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et que **deux triangles semblables ont des côtés correspondants proportionnels**.



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

Les rapports trigonométriques principaux

Les rapports trigonométriques ne dépendent donc que de l'angle et non du triangle rectangle dans lequel il est plongé.



$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$$

$$\cos(\theta) = \frac{adj}{hyp}$$

$$\tan(\theta) = \frac{opp}{adj}$$

Comme les unités se simplifient, **les rapports trigonométriques donnent des nombres réels sans unités.**

Les six (6) rapports trigonométriques

$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$$

$$\cot(\theta) = \frac{adj}{opp} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

$$\cos(\theta) = \frac{adj}{hyp}$$

$$\sec(\theta) = \frac{hyp}{adj} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

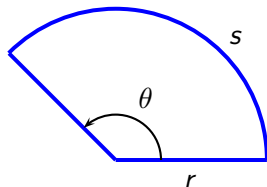
$$\tan(\theta) = \frac{opp}{adj} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\csc(\theta) = \frac{hyp}{opp} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Les radians

La mesure d'un angle en **radians** est définie comme le rapport entre la longueur de l'arc du cercle (notée s) et la longueur du rayon de ce cercle (notée r), exprimées dans la même unité.

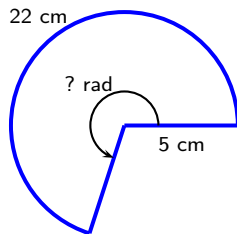
$$\theta \text{ rad} = \frac{s}{r}$$



Les unités des deux longueurs se simplifient et on se retrouve avec une **mesure qui n'a pas d'unités**.

Exemple. Quelle est la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon 5 cm qui intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de 22 cm ?

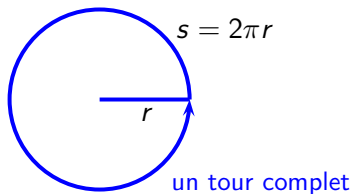
$$\frac{s}{r} = \frac{22 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 4,4 \text{ rad}$$



Puisque les centimètres se simplifient, rad nous rappelle simplement qu'il s'agit d'un angle.

En degrés ?

Traduction de radians à degrés et inversement



$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi \text{ rad}$$

Il y a donc $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$ dans un radian :

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \iff 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \iff 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

Et, il y a $\frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,1745 \text{ rad}$ dans 1° :

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \iff 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \iff 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,1745 \text{ rad}$$

de radians à degrés on utilise

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$4,4 \text{ rad} = 4,4 \cdot 1 \text{ rad} = 4,4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 252,1^\circ$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$$

de degrés à radians on utilise

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

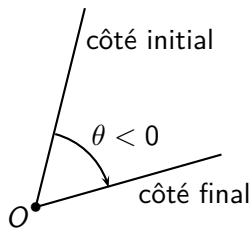
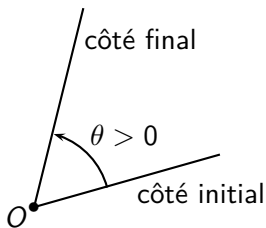
$$60^{\circ} = 60 \cdot 1^{\circ} = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{60\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \approx 1,0472 \text{ rad}$$

$$52^{\circ} = 52 \cdot 1^{\circ} = 52 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{52\pi}{180} \text{ rad} = \frac{13\pi}{45} \text{ rad} \approx 0,9076 \text{ rad}$$

Vers une généralisation des rapports trigonométriques

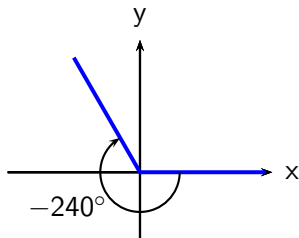
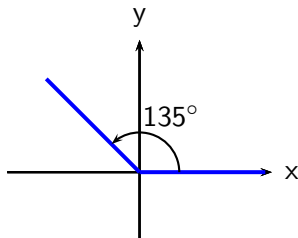
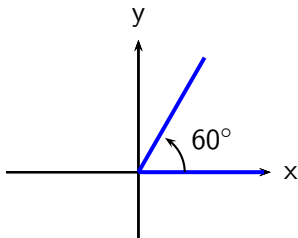
Le signe d'un angle

La mesure de l'angle est représentée par un nombre positif si la rotation s'effectue dans le sens antihoraire et par un nombre négatif si la rotation s'effectue dans le sens horaire.



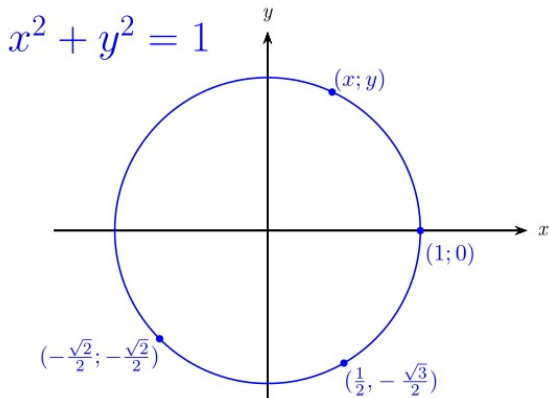
La position standard d'un angle dans le plan

Dans un système de coordonnées rectangulaires, un angle est dit en **position standard** si son sommet est situé à l'origine et son côté initial est placé le long de l'axe horizontal.



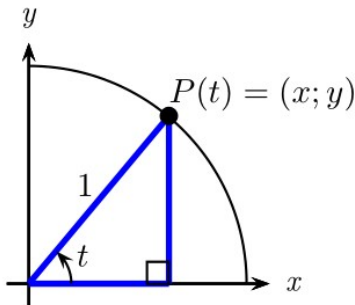
Le cercle trigonométrique $x^2 + y^2 = 1$

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré à l'origine dans le plan cartésien.



Les fonctions trigonométriques

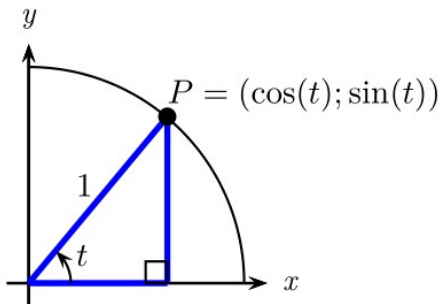
Dans le cas où un angle t est aigu, on peut déterminer les coordonnées du point $P(t)$ sur le cercle trigonométrique à l'aide des rapports dans les triangles rectangles.



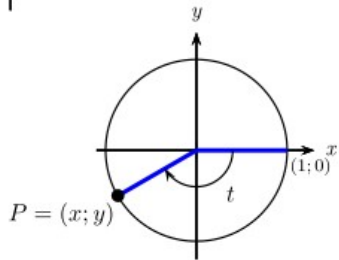
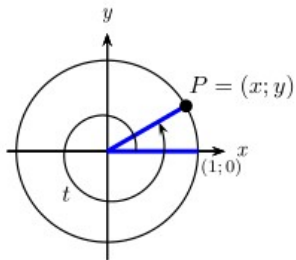
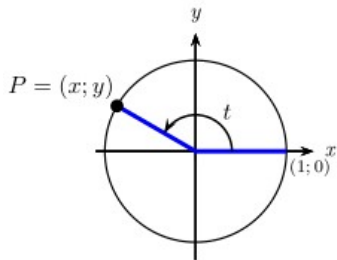
$$\cos(t) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin(t) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{y}{1} = y$$

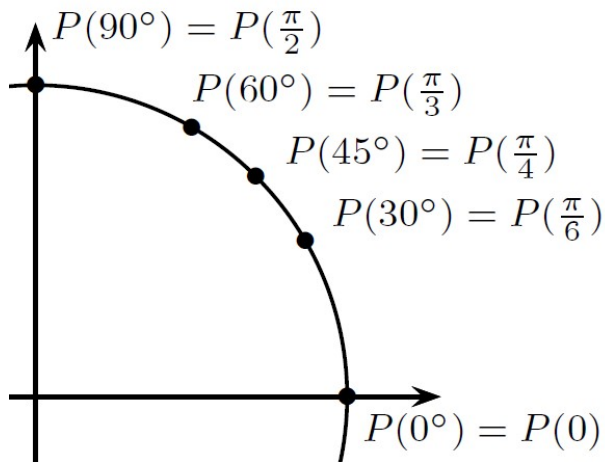
L'abscisse du point P est alors donnée par $\cos(t)$ et l'ordonnée par $\sin(t)$.



Les rapports trigonométriques peuvent maintenant être interprétés en fonction des coordonnées du point correspondant sur le cercle trigonométrique, généralisant ainsi les rapports dans un triangle rectangle.

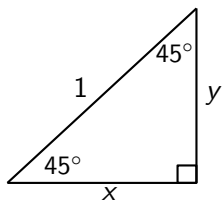


Les points remarquables, premier quadrant



Les coordonnées de $P(45^\circ) = P(\frac{\pi}{4})$

Pour trouver les coordonnées du point, on considère le triangle isocèle dont l'hypoténuse est de longueur 1.



$$x^2 + y^2 = 1$$

par Pythagore

$$x^2 + x^2 = 1$$

on substitue $y = x$

$$2x^2 = 1$$

on réduit

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

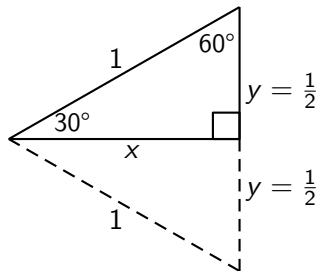
on résout pour x , $x > 0$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Puisque $y = x$, $P(45^\circ) = P(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Les coordonnées de $P(30^\circ) = P(\frac{\pi}{6})$ et de $P(60^\circ) = P(\frac{\pi}{3})$

Pour déterminer les coordonnées de ces points, on considère le triangle équilatéral suivant.



$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{par Pythagore}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{on évalue le carré}$$

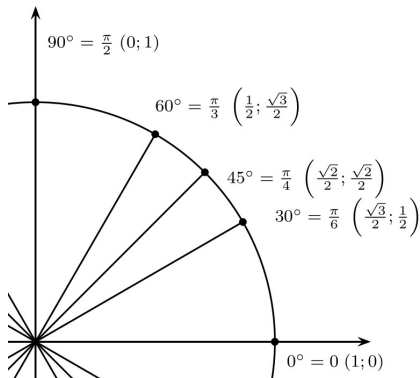
$$x^2 = \frac{3}{4} \quad \text{on isole } x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{on résout pour } x, x > 0$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, $P(30^\circ) = P(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ et $P(60^\circ) = P(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$

L'utilisation du cercle trigo, premier quadrant



$$\sin(60^\circ) = ?$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$$

MAT145 Aide-mémoire algèbre et trigonométrie

c'est direct !

$$\sin(30^\circ) = ?$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

ou presque...

$$\sec(30^\circ) = \frac{1}{\cos(30^\circ)} = ?$$

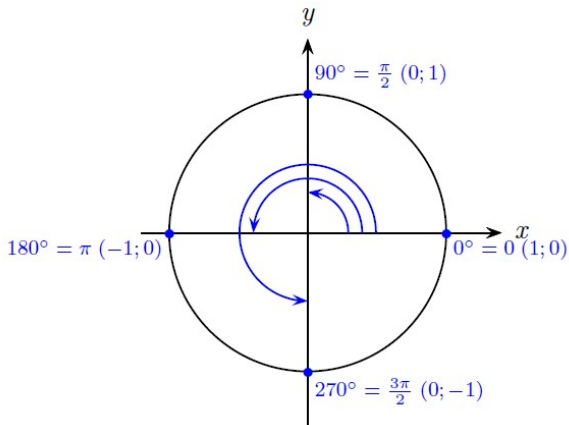
Fonctions trigonométriques, valeurs principales

θ	θ en radians	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\nexists$

que faire pour $\cos(\pi) = ?$ $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = ?$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = ?$

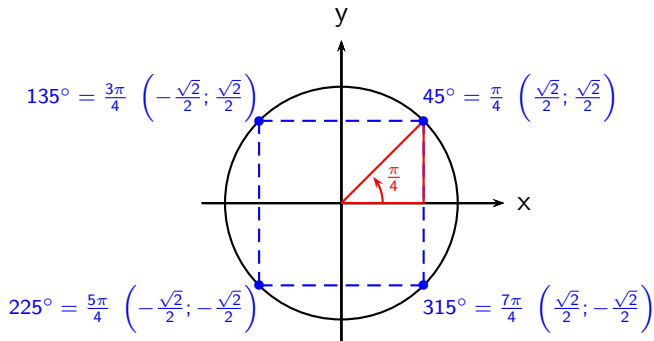
On utilise des symétries...

Les intersections avec les axes



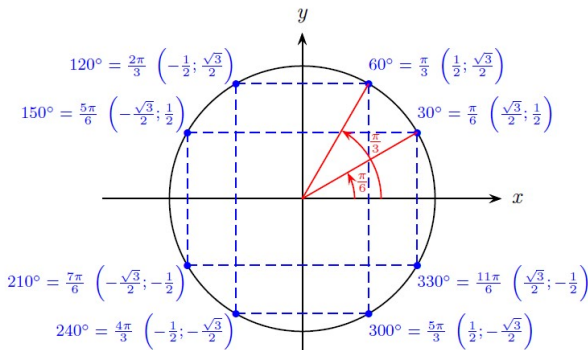
Exemples : $\cos(\pi) = -1$ et $\tan(270^\circ) \nexists$

Les symétries, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$



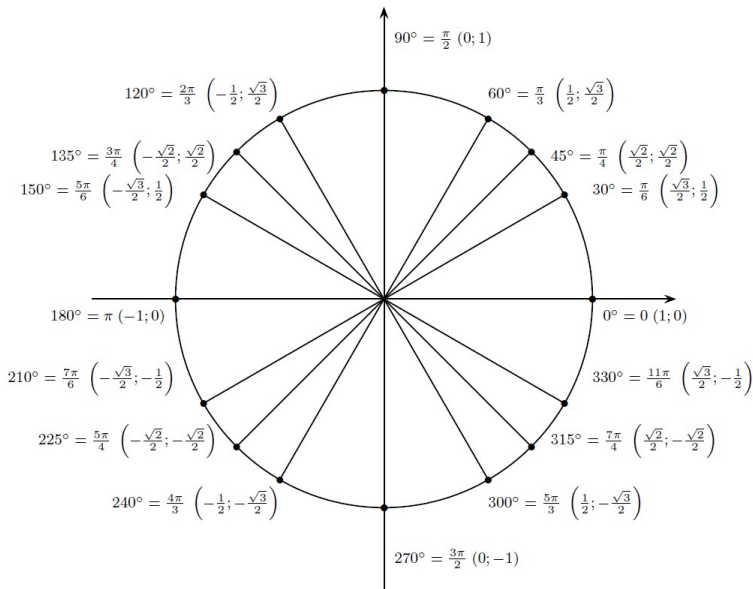
Exemples : $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les symétries, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ et $60^\circ = \frac{\pi}{3}$



Exemple : $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

Le cercle trigonométrique sur $[0; 360^\circ[= [0; 2\pi[$

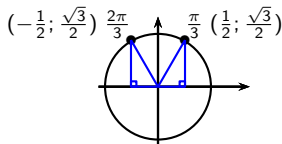


Exemple d'intégrale 1

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx &= \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2x}{3}\right) \Big|_0^\pi \\&= \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{3}{2} \sin(0) \\&= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \\&= \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques, valeurs principales

θ	θ en radians	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\nexists$



Exemple d'intégrale 2

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} \\ &= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(-1)\end{aligned}$$

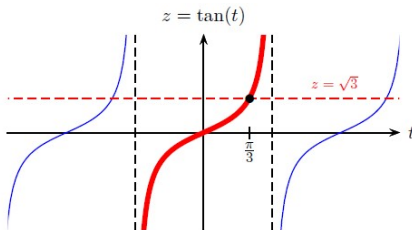
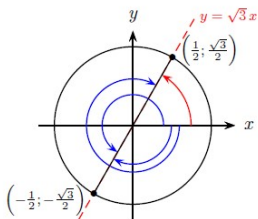
$\arctan(\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3})$ est l'angle dont la tangente est $\sqrt{3}$

Fonctions trigonométriques, valeurs principales

θ	θ en radians	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\nexists$

$$\arctan(\sqrt{3})$$

$\arctan(\sqrt{3})$ est l'angle (sur la b.p. de tan) dont la tangente est $\sqrt{3}$

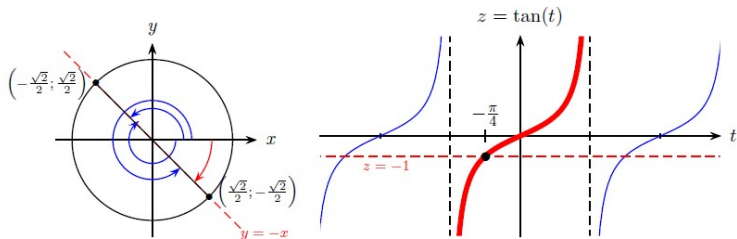


Ainsi,

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan(-1)$$

$\arctan(-1)$ est l'angle (sur la b.p. de $\tan$) dont la tangente est -1



Ainsi,

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

donc...

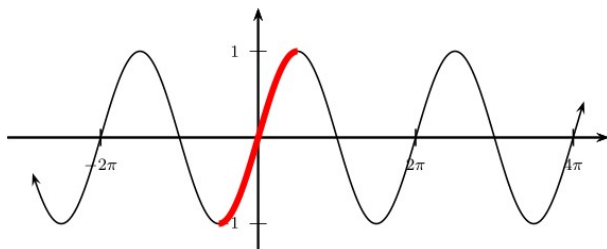
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} \\&= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(-1) \\&= \frac{\pi}{3} - -\frac{\pi}{4} \\&= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\&= \frac{4\pi+3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}\end{aligned}$$

Voir les exercices et le document de référence *Nspire et trigonométrie* sur le site de MAT145.

Référence : K. Pineau, Introduction aux mathématiques du génie,
Notes de cours, partie 2, chapitre 8, février 2022.

s'il y a encore du temps...

La réciproque de la fonction sinus est arcsin



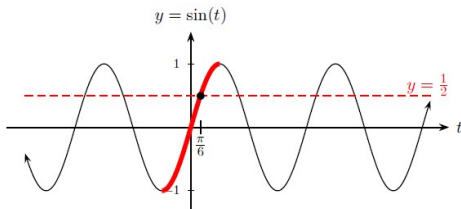
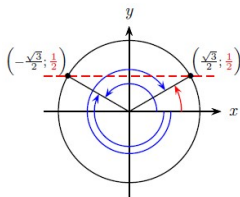
La branche principale du sinus : $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

lorsque $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: $y = \sin(t) \iff t = \arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$

$\arcsin(\square)$ est l'angle dont le sinus est $\square$

Exemple : $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

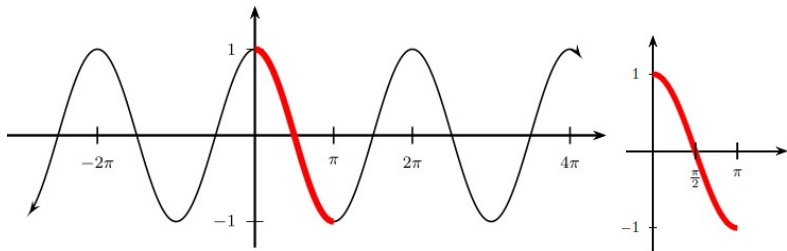
$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ est l'angle (sur la b.p. du sinus) dont le sinus est $\frac{1}{2}$



Ainsi,

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

La réciproque de la fonction cosinus est arccos



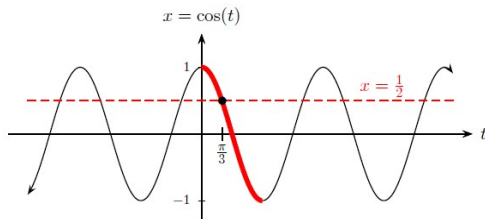
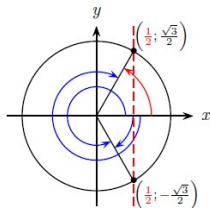
La branche principale du cosinus : $[0; \pi]$

lorsque $t \in [0; \pi]$: $y = \cos(t) \iff t = \arccos(y) = \cos^{-1}(y)$

$\arccos(\square)$ est l'angle dont le cosinus est $\square$

Exemple : $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ est l'angle (sur la b.p. de cos) dont le cosinus est $\frac{1}{2}$



Ainsi,

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$