Université du Québec (UQ)
École de technologie supérieure
Service des enseignements généraux

MAT-165 ALGÈBRE LINÉAIRE ET ANALYSE VECTORIELLE

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE MATRICIELLE

NOTES DE COURS

Document préparé par

Kathleen Pineau
Robert Michaud

Rédigé le 28 août 1998
Révisé en avril 2010

TABLE DES MATIÈRES

Le but de ce texte est de présenter des méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires. La notation matricielle permet de décrire sous forme synthétique tous les systèmes d'équations linéaires et l'algèbre matricielle permet de résoudre ces systèmes d'équations. Nous allons donc présenter l'algèbre matricielle suivie de la notion de déterminant pour terminer par trois méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires; il s'agit de la méthode d'élimination de Gauss-Jordan, de l'utilisation de la matrice inverse d'une matrice et de la règle de Cramer.

1. ALGÈBRE MATRICIELLE

Dans cette section, nous présentons les notions et notations de base associées aux matrices. Nous abordons ensuite les différentes opérations qui sont définies sur l'ensemble des matrices et qui forment l'algèbre matricielle.

1.1 DÉFINITIONS DE BASE

Une matrice de format $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn éléments disposés entre parenthèses sur m lignes et n colonnes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

On désigne souvent une matrice par $A = \left[a_{ij}\right]$ où a_{ij} est le **terme général** de la matrice A et représente l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

Exemple : Soit la matrice $A = \left[a_{ij}\right]$, de format 2×3, définie par

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3{,}5 & \pi \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les éléments de A sont $a_{11} = -2$, $a_{12} = 3{,}5$, $a_{13} = \pi$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 0$ et $a_{23} = 1$.

Exemple : Soit la matrice $A = \left[a_{ij}\right]$, de format 2×3, dont le terme général est donné par $a_{ij} = 2i - 3j$ alors

$$A = \begin{bmatrix} 2(1)-3(1) & 2(1)-3(2) & 2(1)-3(3) \\ 2(2)-3(1) & 2(2)-3(2) & 2(2)-3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Deux **matrices** sont **égales** lorsqu'elles sont de même format et que leurs entrées correspondantes sont égales. Lorsque deux matrices A et B sont égales, on écrit $A=B$ et lorsqu'elles ne sont pas égales, on écrit $A \neq B$. Une

matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls; on désigne par $O_{m\times n}$ la matrice nulle de format $m\times n$. Une **matrice** A est dite **carrée d'ordre *n*** si son format est $n\times n$.

<u>La diagonale principale d'une matrice</u>

Pour $A=\left[a_{ij}\right]$ une matrice carrée d'ordre n, la **diagonale principale** de $A=\left[a_{ij}\right]$ est la suite $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ des éléments situés sur sa diagonale.

Exemple : La diagonale principale de la matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est formée des éléments -2, 7, -3 et 0.

<u>La matrice identité d'ordre *n*</u>

La **matrice identité** d'ordre n, notée I ou plus précisément I_n, est la matrice carrée d'ordre n dont les éléments de la diagonale principale sont 1 tandis que toutes les autres entrées sont nulles.

Exemple : La matrice identité d'ordre 3 est

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Les matrices triangulaires</u>

Une matrice carrée $A=\left[a_{ij}\right]$ est dite **triangulaire supérieure** lorsque $a_{ij}=0$ pour $i>j$, c'est-à-dire que toutes les entrées sous la diagonale principale sont nulles. La matrice est dite **triangulaire inférieure** lorsque $a_{ij}=0$ pour
$i<j$, c'est-à-dire que toutes les entrées au-dessus de la diagonale principale sont nulles.

Exemple : Soit les matrices

$$M=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice M est triangulaire supérieure tandis que N est une matrice triangulaire inférieure.

La matrice augmentée

Soit A, de format $m\times n$, et B de format $m\times p$, deux matrices ayant le même nombre de lignes. La **matrice *A* augmentée de la matrice *B*** est la matrice de format $m\times(n+p)$, désignée par $[A|\,B]$, obtenue en concaténant B à la droite de la matrice A.

Exemple : Soit les matrices suivantes,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 5 & 7\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}.$$

Augmenter la matrice A de la matrice B n'est pas équivalent à augmenter la matrice B de la matrice A, en effet, les matrices 2×5 obtenues sont différentes,

$$[A|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 4 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 7 & 3 & -2\end{array}\right] \text{ et } [B|\,A]=\left[\begin{array}{cc|ccc}0 & 1 & 1 & 4 & -1\\ 3 & -2 & 0 & 5 & 7\end{array}\right].$$

1.2 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Les opérations de base définies sur l'ensemble des matrices sont analogues aux opérations habituellement définies sur l'ensemble des nombres réels.

La somme de deux matrices

Soit $A=\left[a_{ij}\right]$ et $B=\left[b_{ij}\right]$ deux matrices de même format. La **somme** de A et de B, notée $A+B$, est la matrice de même format obtenue en additionnant leurs éléments correspondants, $\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$.

Exemple : Les matrices, de format 2×3,

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3{,}5 & \pi\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

ont pour somme la matrice, de format 2×3,

$$\begin{bmatrix}-2 & 3{,}5 & \pi\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)+1 & 3{,}5+(-2) & \pi+0\\ 3+2 & 0+(-1) & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1{,}5 & \pi\\ 5 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

La différence de deux matrices

Soit $A=\left[a_{ij}\right]$ et $B=\left[b_{ij}\right]$ deux matrices de même format. La **différence** de A et de B, notée $A–B$, est la matrice de même format obtenue en soustrayant leurs éléments correspondants, $\left[a_{ij}\right]-\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]$.

Exemple : La différence $A-B$ des matrices de format 2×3,

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3{,}5 & \pi\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

est la matrice, de format 2×3,

$$\begin{bmatrix} -2 & 3{,}5 & \pi \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)-1 & 3{,}5-(-2) & \pi-0 \\ 3-2 & 0-(-1) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5{,}5 & \pi \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Attention. *On ne peut pas additionner ni soustraire des matrices de formats différents. La somme et la différence de deux matrices ne sont définies que lorsque les matrices ont exactement le même format.*

Le produit par un scalaire

Le **produit** d'une matrice A **par un scalaire** c, noté $c{\cdot}A$ ou cA, est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de A par c, $cA = c\left[a_{ij}\right] = \left[ca_{ij}\right]$.

Exemple : Soit la matrice,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3{,}5 & \pi \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et le scalaire $c = 3$. Alors,

$$3A = 3\begin{bmatrix} -2 & 3{,}5 & \pi \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) & 3(3{,}5) & 3(\pi) \\ 3(3) & 3(0) & 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 10{,}5 & 3\pi \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemple : Soit la matrice,

$$\begin{bmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{bmatrix}.$$

On peut mettre en évidence le scalaire 1/23 et écrire

$$\begin{bmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{bmatrix} = \frac{1}{23}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -6 \\ 8 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 15 \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs lignes et les vecteurs colonnes

On appelle **vecteur ligne** d'ordre n une matrice de format $1\times n$ et un **vecteur colonne** d'ordre n, une matrice de format $n\times 1$.

Exemple : La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0{,}5 & -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur ligne d'ordre 3 tandis que $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur colonne d'ordre 2.

<u>Le produit scalaire de deux vecteurs</u>

Le **produit scalaire** d'un vecteur ligne *U* par un vecteur colonne *V*, tous les deux du même ordre *n*, est le nombre réel

$$U \cdot V = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \, .$$

Exemple : Le produit scalaire $U \cdot V$ du vecteur ligne $U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ par le vecteur colonne $V = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ est

$$U \cdot V = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = (3)(-1) + (-2)(5) + (2)(4) = -3 - 10 + 8 = -5 \, .$$

<u>Le produit de deux matrices</u>

Soit $A = \left[a_{ij} \right]$ une matrice de format *m*×*n* et $B = \left[b_{ij} \right]$ une matrice de format *n*×*p*. Le **produit** de *A* par *B* est une matrice de format *m*×*p* dans laquelle l'élément à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est le résultat du produit scalaire de la i^{e} ligne de *A* par la j^{e} colonne de *B*,

$$A \cdot B = AB = \left[a_{ij} \right] \left[b_{ij} \right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right].$$

Exemple : Le produit *AB* de la matrice *A*, de format 2×3, par la matrice *B*, de format 3×4 pour

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

est la matrice de format 2×4

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 19 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Attention. *Le produit de matrices est défini seulement lorsque le nombre de colonnes de la matrice de gauche correspond exactement au nombre de lignes de la matrice de droite.*

Exemple : Une matrice est inchangée par la multiplication avec une matrice identité compatible. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

multipliée à droite par la matrice identité d'ordre 3, I_3, est encore *A*,

$$AI = AI_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

De même, *A* est inchangée par la multiplication à gauche par l'identité d'ordre 2, I_2,

$$IA = I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

La matrice inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée *A* est **inversible** s'il existe une matrice de même format *B* telle que *AB*=*BA*=*I*. Cette matrice inverse est alors notée A^{-1} et est déterminée par les relations $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Exemple : Les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{bmatrix}$$

sont inverses l'une de l'autre car

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$BA = \begin{bmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $A = B^{-1}$, *A* est l'inverse de *B*, et $B = A^{-1}$, *B* est l'inverse de *A*.

Nous verrons plus loin deux méthodes pour calculer l'inverse, A^{-1}, d'une matrice carrée *A*.

La transposée d'une matrice

La **transposée** d'une matrice $A = \left[a_{ij}\right]$ de format *m*×*n*, notée A^t, est la matrice de format *n*×*m* obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de *A*, $A^t = \left[a_{ji}\right]$.

Exemple : La transposée de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

On peut vérifier que quel que soit le scalaire c et les matrices A et B, on a toujours les égalités

$$\left(A^t\right)^t = A \qquad (A+B)^t = A^t + B^t \qquad (AB)^t = B^t A^t \qquad (cA)^t = c\left(A^t\right).$$

Les opérations élémentaires de ligne

On appelle **opération élémentaire de ligne** sur une matrice l'une ou l'autre des trois opérations suivantes :

- multiplier une ligne par un scalaire (nombre réel) non nul; on désigne par $L_i := cL_i$ la multiplication de la ligne i par le scalaire c ($c \neq 0$), selon cette notation, la ligne i devient c fois la ligne i;
- permuter deux lignes; on désigne par L_{ij} l'échange de la ligne i avec la ligne j;
- ajouter à une ligne un scalaire fois une autre ligne ; on désigne par $L_i := L_i + cL_j$ l'ajout de c fois ($c \neq 0$) la ligne j à la ligne i, selon cette notation, la ligne i est remplacée par la ligne i à laquelle on a ajouté c fois la ligne j ($i \neq j$).

Exemple : Soit la matrice,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La multiplication de la ligne 3 de la matrice A par 4, donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 := 4L_3}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 20 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

La permutation des lignes 1 et 3 de la matrice A donne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_{13}}{\mapsto} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

La ligne 3 à laquelle on ajoute 2 fois la ligne 1 est l'opération élémentaire désignée par $L_3 := L_3 + 2L_1$ et donne, lorsqu'elle est appliquée à la matrice A,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 := L_3 + 2L_1}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Les matrices ligne-équivalentes

Deux matrices A et B sont dites **ligne-équivalentes** si elles sont de même format et si B peut être obtenue à partir de la matrice A par applications successives d'un nombre fini d'opérations élémentaires de ligne; on écrit alors $A \overset{\ell}{\sim} B$.

Exemple : Les matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-6&-12\\12&15&18\end{bmatrix}$$

sont ligne-équivalentes, $A \overset{\ell}{\sim} B$, puisque la matrice B peut être obtenue de la matrice A par la suite des opérations élémentaires suivantes :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \overset{L_2:=3L_2}{\mapsto} \begin{bmatrix}1&2&3\\12&15&18\\7&8&9\end{bmatrix} \overset{L_{23}}{\mapsto} \begin{bmatrix}1&2&3\\7&8&9\\12&15&18\end{bmatrix} \overset{L_2:=L_2-7L_1}{\mapsto} \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-6&-12\\12&15&18\end{bmatrix}=B.$$

Même si les opérations définies sur l'ensemble des matrices sont analogues aux opérations définies habituellement sur l'ensemble des nombres réels, celles-ci possèdent néanmoins des propriétés différentes. Par exemple, contrairement à l'opération de produit entre nombres réels, le **produit matriciel** n'est, en général, **pas commutatif**.

Exemple : Il se peut que le produit BA ne soit pas défini même si AB l'est. Soit les matrices,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}0&1\\3&-2\\1&0\end{bmatrix}.$$

Le produit AB est de format 1×2 tandis que la multiplication de B par A n'est pas définie; $AB=\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}$ tandis que BA n'existe pas. En effet, les formats des matrices ne sont pas compatibles pour le produit BA puisque le nombre de colonnes de B ne correspond pas au nombre de lignes de A.

Même si les matrices AB et BA sont définies, elles ne sont pas forcément de même format. Soit les matrices,

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\2&1\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&2&1\end{bmatrix}.$$

La matrice AB est de format 3×3 tandis que la matrice BA est de format 2×2,

$$AB=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&4\\0&-1&3\\1&0&7\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad BA=\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\5&2\end{bmatrix}.$$

De plus, même dans le cas où AB et BA sont toutes les deux définies et de même format, on n'a pas nécessairement $AB=BA$. Soit les matrices,

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}.$$

Les produits AB et BA ne sont pas égaux.

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7\\-2&-3\end{bmatrix} \text{ et } BA=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\2&1\end{bmatrix}.$$

Pour deux nombres réels a et b, on sait que l'égalité ab=0 implique a=0 ou bien b=0. Cette implication est intimement liée au théorème fondamental de l'algèbre, mais on ne trouve pas directement son équivalent chez les matrices puisque le résultat du produit de deux matrices peut être une matrice nulle sans que l'une des deux matrices du produit soit nulle.

Exemple : Soit les matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier que le produit AB est la matrice nulle de format 3×2, pourtant ni la matrice A, ni la matrice B ne sont nulles,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trois nombres réels a, b et c, on sait que si $a \neq 0$, l'égalité $ab = ac$ implique $b = c$. Il n'en est pas de même pour les matrices. En fait, $AB = AC$ n'implique pas nécessairement que $B = C$. Ceci signifie qu'on ne peut pas simplifier algébriquement les matrices comme on le fait pour les nombres réels.

Exemple : Soit les matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le produit AB

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est identique au produit AC

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mais B n'est pas égal à C, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \neq C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$

Il faut donc faire attention lorsqu'on fait de l'algèbre matricielle, ce n'est pas tout à fait comme l'algèbre des nombres réels. On peut toutefois vérifier que l'ensemble des matrices possède les propriétés suivantes : on suppose ici que A, B et C sont des matrices de même format $m \times n$ et que c et d sont des scalaires quelconques.

$A+B=B+A$	commutativité
$(A+B)+C=A+(B+C)$	associativité
$A+O_{m\times n}=A$	neutre de l' addition
$A+(-A)=O_{m\times n}$	matrice opposée
$1A=A$	unitarité
$(c+d)A=cA+dA$	distributivité
$c(A+B)=cA+cB$	distributivité
$c(dA)=(cd)A$	associativité

On suppose dans les énoncés suivants que les matrices *A*, *B* et *C* sont compatibles sous les opérations utilisées.

$(AB)C=A(BC)$	associativité
$AI_n=A$ et $I_mA=A$	neutres de la multiplication
$AO_{n\times r}=O_{m\times r}$ et $O_{s\times m}A=O_{s\times n}$	absorbant
$c(AB)=(cA)B=A(cB)$	associativité
$A(B+D)=AB+AD$	distributivité
$(B+D)C=BC+DC$	distributivité

1.3 EXERCICES

Il est suggérer de faire les numéros soulignés à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul symbolique.

1. Soit $A=\begin{bmatrix}4&-1&0\\2&9&6\\4&-3&7\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}-1&3&0\\0&7&4\\-2&-3&0\end{bmatrix}$. Trouver $4A+2B$ et $4B-A$.

2. Soit $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&-2\\3&1&1\end{bmatrix}$ et $C=\begin{bmatrix}-1&-1&3\\2&2&0\end{bmatrix}$. Effectuer, si possible, les opérations

a) $A+B$ b) AB c) BC d) $(A+C)B$ e) AC f) A^tC g) $AB+C$.

3. Soit $A=\begin{bmatrix}2&2\\3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&1\\-1&0\\4&2\end{bmatrix}$ et $C=\begin{bmatrix}4&0&1\\1&-1&2\\3&1&1\end{bmatrix}$. Effectuer, si possible, les opérations

a) BA b) CBA c) $CBA-IB$.

4. Soit $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&c\end{bmatrix}$. Trouver la valeur *c* pour laquelle l'équation $AB=I$ est vérifiée.

5. Trouver les valeurs *c* et *d* pour lesquelles l'équation $c\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}$ est vérifiée.

6. Soit $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

a) Trouver une matrice C telle que $2A+C=B$.

b) Trouver une matrice D telle que $A+B+D=I$.

7. En utilisant les matrices du numéro 6, calculer AB et BA. Que constate-t-on ?

8. En utilisant les matrices du numéro 6, calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que constate-t-on ?

<u>9.</u> Soit $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ et $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?

<u>10.</u> Soit $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$. Calculer A^2, A^3 et A^4.

<u>11.</u> Soit $A=\begin{bmatrix}4{,}00 & 3{,}35 & 2{,}74\\ 5{,}72 & 4{,}20 & 3{,}87\\ 11{,}42 & 0{,}00 & 5{,}67\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0{,}23 & 1{,}45 & 3{,}00\\ 2{,}75 & -1{,}90 & 2{,}30\\ 5{,}21 & -7{,}40 & 9{,}01\end{bmatrix}$. Évaluer a) AB^t b) $3A^2B+5B^3-7BA$.

SOLUTIONS DES EXERCICES DE LA SECTION 1.3

1. $4A+2B=\begin{bmatrix}14 & 2 & 0\\ 8 & 50 & 32\\ 12 & -18 & 28\end{bmatrix}$ et $4B-A=\begin{bmatrix}-8 & 13 & 0\\ -2 & 19 & 10\\ -12 & -9 & -7\end{bmatrix}$.

2. a) non définie b) $AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 10 & 0 & 7\end{bmatrix}$ c) non définie d) $(A+C)B=\begin{bmatrix}10 & 3 & 4\\ 10 & 4 & 5\end{bmatrix}$

e) non définie f) $A^tC=\begin{bmatrix}4 & 4 & 6\\ -3 & -3 & 3\\ 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$ g) $AB+C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 12 & 2 & 7\end{bmatrix}$.

3. a) $BA=\begin{bmatrix}9 & 7\\ -2 & -2\\ 14 & 10\end{bmatrix}$ b) $CBA=\begin{bmatrix}50 & 38\\ 39 & 29\\ 39 & 29\end{bmatrix}$ c) $CBA-IB=\begin{bmatrix}47 & 37\\ 40 & 29\\ 35 & 27\end{bmatrix}$.

4. $c=3$ **5.** $c=2$ et $d=-1$ **6.** a) $C=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -9 & 2\end{bmatrix}$ b) $D=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}$

7. $AB = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = BA$

8. $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ tandis que $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -8 & 21 \end{bmatrix}$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

9. $AB = AC = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mais ici, $B \neq C$. La simplification «$AB = AC \Rightarrow B = C$» n'est pas valide

10. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ et par la suite $A^3 = A^4 = \cdots = A^n = \mathbf{0}_{3\times3}$.

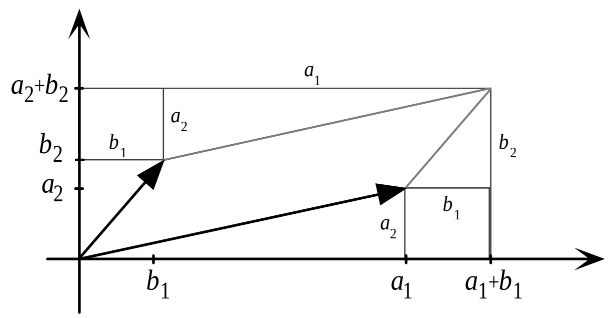
11. a) $AB^t \approx \begin{bmatrix} 14{,}00 & 10{,}94 & 20{,}74 \\ 19{,}02 & 16{,}65 & 33{,}59 \\ 19{,}64 & 44{,}45 & 110{,}59 \end{bmatrix}$ b) $3A^2B + 5B^3 - 7BA \approx \begin{bmatrix} 1077{,}98 & -1564{,}07 & 3102{,}40 \\ 1543{,}52 & -1785{,}24 & 3548{,}23 \\ 2304{,}46 & -3373{,}35 & 6208{,}78 \end{bmatrix}$.

2. DÉTERMINANTS DE MATRICES

À toute matrice carrée est associée un scalaire qu'on appelle le déterminant de la matrice. Nous commençons cette section par une introduction aux déterminants des matrices de formats 2×2 et 3×3 utilisés respectivement dans le calcul de l'aire d'un parallélogramme et dans le calcul du volume d'un parallélipipède. Nous présentons ensuite la règle de Laplace pour le calcul des déterminants de matrices carrées d'ordre *n*, où *n* est un entier positif quelconque. Enfin, afin de réduire certains calculs, nous examinons les propriétés des déterminants et, pour terminer, nous présentons l'utilisation des déterminants dans le calcul de la matrice inverse d'une matrice carrée.

2.1 AIRES ET VOLUMES

Considérons le parallélogramme engendré par les deux vecteurs non nuls $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ et $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ du plan cartésien. Supposons pour l'instant que leurs vecteurs position ont leurs extrémités dans le premier quadrant et qu'ils ne sont pas parallèles.



Un argument géométrique simple nous permet d'affirmer que l'aire du parallélogramme est obtenue de l'aire du rectangle de côtés $a_1 + b_1$ par $a_2 + b_2$ moins les aires des différentes parties intérieures au rectangle, mais extérieures au parallélogramme,

$$\begin{aligned} Aire &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - 2\frac{a_1 a_2}{2} - 2\frac{b_1 b_2}{2} - 2a_2 b_1 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 - 2a_2 b_1 \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}$$

La quantité $a_1 b_2 - a_2 b_1$ est exactement ce qu'on appelle le **déterminant** de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

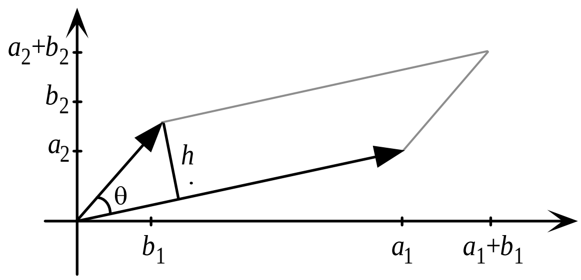
Elle est désignée par $\det(A)$ ou bien $|A|$ et on écrit

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

L'expression $a_1 b_2 - a_2 b_1$ évalue *l'aire algébrique* (l'aire signée) du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ et $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ et tient compte de leur position respective selon la règle de la main droite. En fait, quels que soient les vecteurs $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ et $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ dans le plan, l'aire du parallélogramme engendré par ceux-ci est donnée par la valeur absolue du déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

On arrive à la même conclusion par un argument plus algébrique. En effet, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ et $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ est le produit de la longueur de la base par la hauteur du parallélogramme.



base $= \| \vec{a} \|$

hauteur $= h = \| \vec{b} \| \sin\theta$

$$Aire = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \sin\theta = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

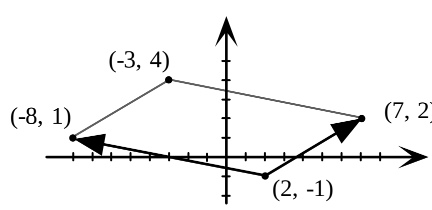
Sachant que le produit scalaire s'écrit $\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos\theta$, en prenant le carré des deux côtés de l'expression pour l'aire ci-dessus on obtient, à l'aide des identités trigonométriques habituelles et d'une simplification algébrique,

$$\begin{aligned} Aire^2 &= \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 \sin^2\theta = \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 \left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 - \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 \cos^2\theta = \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 - \left(\| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos\theta\right)^2 \\ &= \| \vec{a} \|^2 \| \vec{b} \|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 \\ &= \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2. \end{aligned}$$

Prenant la racine carrée de ce résultat, on obtient une expression pour l'aire en terme de la valeur absolue

$$Aire = \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|.$$

Exemple : Trouvons l'aire du parallélogramme de sommets $(-8, 1)$, $(-3, 4)$, $(7, 2)$ et $(2, -1)$.



On peut considérer les vecteurs

$$\vec{a} = \langle -8, 1 \rangle - \langle 2, -1 \rangle = \langle -10, 2 \rangle \text{ et } \vec{b} = \langle 7, 2 \rangle - \langle 2, -1 \rangle = \langle 5, 3 \rangle$$

comme engendrant le parallélogramme illustré à la figure ci-dessus. Ainsi, son aire est la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -30 - 10 = -40 \ ;$$

l'aire est donc de 40 unités de surface.

Rappelons que c'est à l'aide de la matrice symbolique suivante qu'on calcule le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{c}$, des vecteurs $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ et $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$,

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

que la norme du produit vectoriel est égale à l'aire du parallélogramme engendré par ces vecteurs et que le volume du parallélipipède engendré par les trois vecteurs $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ et $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ est donné par la valeur absolue du produit mixte $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right)$ où

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) &= \vec{a} \cdot \left\langle \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right\rangle \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le **déterminant d'ordre 3**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

correspond exactement à ce produit mixte,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \ ;$$

il suffit d'effectuer les calculs comme pour le produit vectoriel mais en y remplaçant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par les composantes du vecteur $\vec{a}$. On constate que pour calculer un déterminant d'ordre 3, on doit calculer des déterminants d'ordre 2.

Exemple : Le volume du parallélipipède engendré par les vecteurs $\langle 4, 2, 3 \rangle$, $\langle 2, 1, 4 \rangle$ et $\langle 5, 3, 2 \rangle$ est obtenu à l'aide du déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4(2 - 12) - 2(4 - 20) + 3(6 - 5) = -5 \end{aligned}$$

et le volume cherché est alors de $|-5| = 5$ unités de volume.

On désigne le type de calcul effectué à l'exemple précédent comme étant le développement du déterminant selon la première ligne puisque ce sont les éléments de cette première ligne qui multiplient les déterminants des sous-matrices d'ordre 2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{4}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{4}(2-12) - \mathbf{2}(4-20) + \mathbf{3}(6-5) = -5$$

Ceci est un cas particulier d'une procédure plus générale, appelée le développement de Laplace pour le calcul d'un déterminant, qui permet d'évaluer le déterminant de n'importe quelle matrice carrée selon n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

2.2 DÉVELOPPEMENT DE LAPLACE POUR LE CALCUL D'UN DÉTERMINANT

La règle de Laplace pour le calcul d'un déterminant repose sur les deux définitions suivantes :

Le mineur d'un élément d'une matrice

Soit *A*, une matrice carrée d'ordre *n* et *i* et *j*, des indices tels que $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$. On appelle **mineur** A_{ij} de l'élément a_{ij}, la sous-matrice carrée de format $n-1$ obtenue à partir de la matrice *A* en éliminant sa ligne *i* et sa colonne *j*.

Exemple : Le mineur A_{23} est obtenu en éliminant la ligne 2 et la colonne 3 de la matrice *A* tandis que le mineur A_{21} est obtenu en éliminant la ligne 2 et la colonne 1 de la matrice *A*,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le cofacteur d'une matrice *A* d'indice (*i, j*)

Soit *A*, une matrice carrée d'ordre *n* et *i* et *j*, des indices tels que $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$. On appelle le **cofacteur** de *A* d'indice (*i*, *j*) le scalaire $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Exemple : Les cofacteurs α_{23} et α_{21} de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

sont respectivement

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \text{ et } \alpha_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-10) = 10.$$

Le facteur $(-1)^{i+j}$ est toujours égal à +1 ou à -1 selon les indices *i* et *j* du cofacteur. Le cofacteur d'indice (i, j) d'une matrice est donc le « déterminant signé » du mineur de même indice. Les signes qui accompagnent les mineurs sont toujours en alternance. Pour une matrice carrée d'ordre 3, nous avons les signes suivants :

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Le développement de Laplace

Soit *A*, une matrice carrée d'ordre *n* et *i* un indice tel que $1 \le i \le n$. Le **déterminant** de la matrice *A* s'obtient en effectuant le produit scalaire de la ligne *i* de *A* par le vecteur des cofacteurs correspondants,

$$\det(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \text{ est fixe}}}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} .$$

Cette sommation s'appelle le développement de Laplace du déterminant selon la ligne *i*. Pour effectuer le développement de Laplace du déterminant selon la colonne *j*, on considère l'indice *j* tel que $1 \le j \le n$ et on calcule le produit scalaire de la colonne *j* de *A* par le vecteur des cofacteurs correspondants,

$$\det(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ j \text{ est fixe}}}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} .$$

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

en effectuant son développement de Laplace selon la deuxième ligne,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} a_{2j}\alpha_{2j} &= a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{23} \\ &= \mathbf{2}(-1)^{2+1} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) + \mathbf{1}(-1)^{2+2} \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right) + \mathbf{4}(-1)^{2+3} \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= -2(4-9) + (8-15) - 4(12-10) \\ &= -5. \end{aligned}$$

Reprenons le calcul du déterminant de la matrice *A*, mais cette fois en effectuant son développement de Laplace selon la troisième colonne,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} a_{i3}\alpha_{i3} &= a_{13}\alpha_{13} + a_{23}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} \\ &= \mathbf{3}(-1)^{1+3} \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \mathbf{4}(-1)^{2+3} \det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \mathbf{2}(-1)^{3+3} \det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3(6-5) - 4(12-10) + 2(4-4) \\ &= -5. \end{aligned}$$

Comme on le voit bien, le déterminant d'une matrice est unique et ne dépend ni de la ligne ni de la colonne selon laquelle on le développe.

Le développement de Laplace permet de choisir (préférablement de façon stratégique) la ligne ou bien la colonne selon laquelle développer le déterminant à calculer. Ceci sera particulièrement intéressant lorsque la matrice considérée contiendra des zéros.

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice A de format 4×4 suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

en le développant selon la première ligne. On a

$$\det(A) = \mathbf{3}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-\mathbf{2})(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{5}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il y a maintenant 4 déterminants d'ordre 3 à évaluer. Notons qu'il est inutile de calculer le dernier terme de cette somme puisqu'il contient le facteur 0. En développant le premier déterminant de cette somme selon la deuxième colonne, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & -1 \\ 3 & \mathbf{0} & 5 \\ 7 & \mathbf{5} & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{5}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5(5+3) = -40,$$

le deuxième selon la deuxième ligne, on trouve

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{5}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5(10) = -50$$

et, le troisième selon la première colonne, on trouve

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & 3 & 5 \\ \mathbf{2} & 7 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{2}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{2}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(3-35) + 2(5+3) = -48.$$

Ainsi, le déterminant cherché est

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3(-1)^{1+1}(-40) + (-2)(-1)^{1+2}(-50) + 5(-1)^{1+3}(-48) + 0 \\ &= -120 - 100 - 240 + 0 = -460. \end{aligned}$$

Calculons à nouveau le déterminant de la matrice A en utilisant le fait que la troisième ligne de la matrice A contient deux entrées nulles. En choisissant de développer le déterminant de la matrice A selon cette ligne on obtient :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{3}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{5}(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

où, en développant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{3}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{5}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 5(4) + 0 = -5$$

et, en développant selon la deuxième ligne,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{2}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{1}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{0}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -2(-45) + 1(5) - 0 = 95$$

ainsi $\det(A) = -3(-5) - 5(95) = -460$.

2.3 PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS

Les exemples précédents nous permettent de constater l'ampleur des calculs de déterminants. Dans ce qui suit, nous présentons plusieurs propriétés des déterminants qui aident à réduire la quantité de calculs nécessaires à leur évaluation.

Les propriétés des déterminants

1. Quelle que soit la matrice carrée A, $\det(A) = \det\left(A^t\right)$. Cette propriété a comme conséquence intéressante le fait que toute propriété des déterminants qui fait intervenir des lignes d'une matrice est également valable en remplaçant *ligne* par *colonne* dans l'énoncé de cette propriété.
2. Si une matrice carrée A possède une ligne de zéros (0) (ou une colonne de zéros) alors $\det(A) = 0$.
3. Si deux lignes (ou bien deux colonnes) d'une matrice carrée A sont égales alors $\det(A) = 0$.

Exemple : En développant le déterminant de la matrice suivante selon la première ligne on obtient :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4(2-12) - 2(4-20) + 3(6-5) = -5$$

et on constate qu'il est égal au déterminant de sa transposée,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4(2-12) - 2(4-9) + 5(8-3) = -5.$$

Exemple : En développant les déterminants suivants, selon la ligne ou selon la colonne qui contient les zéros, on trouve des déterminants nuls

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple : Le déterminant de la matrice suivante est nul puisque ses deux premières lignes sont égales. En effet, on peut vérifier ce résultat en développant le déterminant selon la première ligne de la matrice,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4(4-9) - 2(8-15) + 3(12-10) = 0.$$

Ce résultat peut être obtenu directement par un argument géométrique ; en effet, le volume du parallélipidède engendré par les vecteurs $\langle 4,2,3\rangle$, $\langle 4,2,3\rangle$ et $\langle 5,3,2\rangle$ est nécessairement nul puisque la face engendrée par $\langle 4,2,3\rangle$ et $\langle 4,2,3\rangle$ est d'aire nulle.

Les propriétés des déterminants (suite) les opérations élémentaires de ligne

4. Si deux lignes d'une matrice carrée A sont permutées alors le déterminant de la matrice résultante est de signe contraire à celui de la matrice A, il est égal à $-\det(A)$.

5. Si une seule ligne d'une matrice carrée A est multipliée par un scalaire r alors le déterminant de la matrice résultante est égal à r fois celui de A, il est égal à $r\det(A)$.

6. Si le produit d'une ligne de la matrice A par un scalaire r est additionné à une autre ligne de A alors le déterminant de la matrice résultante est égal à celui de A, il est égal à $\det(A)$.

Ne pas oublier que la propriété 1 permet de changer ligne par colonne dans nos énoncés.

Exemple : Le déterminant change de signe si on permute les lignes d'une matrice carrée d'ordre 2,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-(-3) = 11 \text{ tandis que } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3-(8) = -11.$$

De même, les déterminants des matrices carrées d'ordre 3 suivantes sont de signes contraires puisque les deux premières lignes sont permutées,

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4(2-12) - 2(4-20) + 3(6-5) = -5$$

tandis que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(4-9) - (8-15) + 4(12-10) = 5.$$

Exemple : Le facteur 10, commun à chacun des termes de la deuxième ligne, nous permet d'écrire

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 20 & -30 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 10(-9-8) = -170.$$

De la même façon, la mise en évidence du facteur $\frac{1}{3}$ qui est commun à chacun des termes de la deuxième colonne (la propriété 1 permet de changer ligne par colonne dans nos énoncés des propriétés) donne,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2/3 \\ 7 & 4/3 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{3}(20-14) = 2\,.$$

Exemple : L'opération élémentaire de ligne $L_2 := L_2 - 7L_1$ ne change pas la valeur du déterminant. Plus précisément, puisque

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} \overset{L_2:=L_2-7L_1}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix},$$

les déterminants de ces matrices sont égaux

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 48\,.$$

En effet, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -29 + 77 = 48 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 60 = 48\,.$$

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

en utilisant des opérations élémentaires de ligne. On a

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{L_1:=L_1-2L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{L_3:=L_3-3L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & 13 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -10 & 13 \end{vmatrix} = -31$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue en développant le dernier déterminant de format 3×3 selon la première colonne.

<u>Les propriétés des déterminants</u> (suite) divers

7. Si une matrice carrée A est triangulaire (supérieure ou inférieure) alors le déterminant de A est égal au produit des éléments de sa diagonale principale.

8. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

9. Si A et B sont des matrices carrées alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exemple : On constate, en développant successivement les déterminants selon la première colonne, que le déterminant de la matrice triangulaire supérieure suivante est égal au produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot(-3)\cdot 2 = -72$$

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice suivante en utilisant des opérations élémentaires de ligne. Notre objectif est d'obtenir une matrice triangulaire dont le déterminant sera obtenu en effectuant le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2:=L_2-2L_4 \\ L_3:=L_3+L_1 \\ L_4:=L_4-\frac{1}{5}L_1}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & -14/5 & -7/5 & 19/5 \end{vmatrix} \overset{L_4:=5L_4}{=} \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & -14 & -7 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_3:=L_3+\frac{3}{7}L_2 \\ L_4:=L_4+2L_2}}{=} \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 2/7 & 40/7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{L_3:=7L_3}{=} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 40 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_4:=L_4+\frac{1}{2}L_3}{=} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}(5\cdot 7\cdot 2\cdot 19) = 38$$

Exemple : On peut facilement vérifier que les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{bmatrix}$$

sont inverses l'une de l'autre en effectuant leur produit, $AB = BA = I$. Leur déterminants sont aussi des inverses multiplicatifs. En effet,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -23 \text{ tandis que } \det(B) = \begin{vmatrix} -2/23 & 5/23 & -6/23 \\ 8/23 & 3/23 & 1/23 \\ 5/23 & -1/23 & 15/23 \end{vmatrix} = -\frac{1}{23}.$$

Exemple : Soit les matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que leur produit donne la matrice

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 15 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 7 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

et que les déterminants respectifs satisfont la relation $\det(AB) = \det(A)\det(B)$:

$$\det(A) = -9,\ \ \det(B) = 32 \ \text{et}\ \det(AB) = -288.$$

Lorsqu'on calcule un déterminant «à la main», il est souvent avantageux de combiner les méthodes de réduction de matrices au développement de Laplace. Il s'agit d'obtenir, par élimination, une ligne ou une colonne contenant plusieurs 0 pour ensuite développer le déterminant selon cette ligne ou cette colonne.

2.4 CALCUL DE LA MATRICE INVERSE PAR LA MATRICE ADJOINTE

Voici une première méthode de calcul de la matrice inverse d'une matrice carrée. Cette méthode utilise la matrice adjointe, une matrice dont les éléments sont obtenus par des calculs de déterminants.

La matrice adjointe

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. La matrice des cofacteurs de A est définie par

$$cofac(A) := \left[\alpha_{ij}\right]_{n\times n} = \left[(-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)\right]$$

où A_{ij} désigne le mineur de l'élément a_{ij}. La matrice adjointe de la matrice A est alors définie comme la transposée de sa matrice des cofacteurs.

$$adj(A) = \left[cofac(A)\right]^t.$$

Exemple : La matrice des cofacteurs de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

est

$$cofac(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -12 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sa matrice adjointe est alors

$$adj(A) = \left[cofac(A)\right]^t = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

L'inversion de matrice à l'aide de la matrice adjointe

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, telle que $\det(A) \neq 0$. La matrice inverse de la matrice A est obtenue de la matrice adjointe par l'égalité suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,adj(A).$$

Exemple : Le déterminant de la matrice A présentée à l'exemple précédent est

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 - 16 = -2.$$

On peut facilement vérifier que son inverse est bien

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ -12 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 & 1/2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

en effectuant la multiplication

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -7/2 & 1/2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On se rend compte que, du point de vue calcul, l'inversion de matrice par la matrice adjointe n'est pas efficace puisque le nombre d'opérations à faire est très grand. Il est tout de même intéressant, du point de vue théorique, d'avoir une formule explicite pour l'inverse d'une matrice. Elle permet, par exemple, d'établir la règle de Cramer pour la solution des systèmes d'équations linéaires carrés que nous verrons plus loin.

2.5 EXERCICES

1. En utilisant le développement de Laplace, évaluer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer x de telle sorte que $\det(A) = 1$.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -8 & x \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & x \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & x \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. Montrer que l'équation $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} = 0$ représente une droite passant par les points (a,b) et (c,d).

4. Que représente l'équation $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$?

5. Soit A, une matrice carrée d'ordre 3, telle que $\det(A) = 5$. Trouver

a) $\det(-A)$ b) $\det\left(A^2\right)$ c) $\det(2A)$ d) $\det\left(\frac{1}{3}A^4\right)$ e) $\det\left(2A^tA\right)$

6. Trouver x de telle sorte que les matrices suivantes ne possèdent pas d'inverse.

a) $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 16 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

7. Montrer que chacune des matrices suivantes satisfait l'égalité $A^t = A^{-1}$.

a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

8. Trouver l'élément situé à l'intersection de la 3^e ligne et de la 2^e colonne de la matrice adjointe à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Trouver a) $adj(A)$ b) A^{-1}

10. Sachant que $adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, trouver A.

11. Trouver toutes les matrices A, de format 2×2, qui ont la propriété $adj(A) = A$.

SOLUTIONS DES EXERCICES DE LA SECTION 2.5

1. a) -2 b) -9 c) 0 d) 22 e) -216 f) 4π

2. a) $x = -13$ b) $x = \frac{29}{6}$ c) aucun réel

3. $(b-d)x-(a-c)y+ad-bc=0$ est une équation de droite vérifiée par les points (a,b) et (c,d).

4. Le plan $x-2y+z=0$ normal (perpendiculaire) au vecteur $\langle 1,-2,1\rangle$ qui passe par les points $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ et $(9,8,7)$.

5. a) $\det(-A)=-5$ b) $\det\left(A^2\right)=25$ c) $\det(2A)=40$

d) $\det\left(\frac{1}{3}A^4\right)=\frac{625}{27}$ e) $\det\left(2A^tA\right)=200$

6. a) $x=8$ b) $x=\pm 4$ c) $x=-1$ d) $x=1$ ou $x=-2$

8. $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=5$

9. a) $adj(A)=\begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$ b) $A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$

10. $A=\begin{bmatrix} 5 & -1/2 & -21/2 \\ -4 & 1 & 9 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

11. $A=adj(A)=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Une **équation** est dite **linéaire** lorsqu'elle est formée uniquement d'expressions polynomiales dont les termes variables sont de degré un.

Exemple : Les équations $2x+3y=5$ et $x_1-2x_2+x_3=3x_4-1$ sont linéaires (la première en les variables *x* et *y*, la seconde en les variables x_1, x_2, x_3 et x_4) tandis que les équations

$$2x+3xy=1, \quad \frac{2}{x}-5y=1, \quad \sqrt{x}-3y=7 \quad \text{et} \quad 5\sin x-3y=2$$

ne le sont pas. Les trois dernières équations contiennent des termes qui ne sont pas polynomiaux (les termes $\frac{2}{x}$, $\sqrt{x}$ et $\sin x$) et l'équation $2x+3xy=1$ contient le terme $3xy$ qui est de degré deux.

Résoudre une équation, en particulier une équation linéaire, consiste à déterminer l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables de telle sorte que l'équation soit satisfaite.

Exemple : Le triplet $(2,1,0)$ qui correspond à $x=2$, $y=1$ et $z=0$ est une solution de l'équation linéaire $2x-3y+z=1$ puisqu'en substituant 2 à *x*, 1 à *y* et 0 à *z* dans cette équation, on obtient une égalité $2(2)-3(1)+(0)=1$. De même, $(1,1,2)$ correspondant à $x=1$, $y=1$ et $z=2$ est aussi une solution de l'équation $2x-3y+z=1$ puisque $2(1)-3(1)+(2)=1$. Par contre, $(0,1,2)$ n'en est pas une solution puisque $2(0)-3(1)+(2)=-1\neq 1$; le triplet $(0,1,2)$ correspondant à $x=0$, $y=1$ et $z=2$ ne satisfait pas l'équation $2x-3y+z=1$.

<u>Résoudre un système d'équations</u> linéaires consiste à déterminer l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables de telle sorte que <u>toutes les équations du système</u> soient <u>satisfaites simultanément</u>.

Exemple : Le triplet $\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7},1\right)$ est une solution du système de deux équations à trois variables

$$\begin{aligned} 2x-y+4z&=4 \\ x+3y-2z&=1 \end{aligned}$$

puisqu'il satisfait aux deux équations simultanément

$$2\left(\tfrac{3}{7}\right)-\left(\tfrac{6}{7}\right)+4(1)=4 \quad \text{et} \quad \left(\tfrac{3}{7}\right)+3\left(\tfrac{6}{7}\right)-2(1)=1.$$

Par contre, le triplet $(1,2,1)$ n'est pas une solution du système d'équations puisqu'il ne satisfait pas sa deuxième équation, $2(1)-(2)+4(1)=4$ mais $(1)+3(2)-2(1)=5\neq 1$.

Les systèmes d'équations linéaires se distinguent des autres types de systèmes d'équations par le fait que quels que soient le nombre d'équations et le nombre de variables, il est toujours possible de trouver la ou les solutions au système d'équations ou de montrer qu'aucune solution n'existe.

C’est à l’aide des matrices et de l’algèbre matricielle que nous allons résoudre les systèmes d’équations linéaires. En fait, la notation matricielle nous permet de décrire sous forme synthétique tous les systèmes d’équations linéaires et l’algèbre matricielle nous permet de les résoudre. Cette écriture matricielle fait intervenir le produit de matrices et le fait que deux matrices de même format sont égales lorsques leur entrées correspondantes sont égales.

Exemple : Quel que soit le système d’équations linéaires à résoudre, l’ordre d’apparition des variables dans chacune des équations du système doit être identique; on utilise habituellement l’ordre alphabétique,

$$\begin{array}{c} x+2y=9-2z \\ y=-3x \\ x+y+z=4 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1x+2y+2z=9 \\ 3x+1y+0z=0 \\ 1x+1y+1z=4. \end{array}$$

La traduction sous forme d’un produit de matrices est alors naturelle

$$\begin{array}{c} 1x+2y+2z=9 \\ 3x+1y+0z=0 \\ 1x+1y+1z=4 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Notons que la matrice des coefficients augmentée du vecteur des constantes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

contient toutes les informations du système d’équations.

Exemple : Le vecteur colonne

$$S = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

qui correspond à la solution $x=-1$, $y=3$ et $z=2$ du système d’équations

$$\begin{array}{c} x+2y+2z=9 \\ 3x+y=0 \\ x+y+z=4 \end{array}$$

est un vecteur solution (ou simplement une solution) de l’équation matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En effet, il suffit de substituer S à $X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$ dans cette équation matricielle pour vérifier qu’on obtient bien l’égalité matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

De façon générale, le codage matriciel d'un système d'équations linéaires se fait comme suit :

Les systèmes d'équations linéaires

Tout système d'équations linéaires de m équations à n variables peut s'écrire sous la forme $AX=K$ où

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } K=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}.$$

La matrice des **coefficients** A est de format $m\times n$, la matrice des **constantes** K est de format $m\times 1$ et la matrice des **variables** X est de format $n\times 1$. Une **solution** du système d'équations linéaires $AX=K$ est la donnée de n nombre réels $s_1, s_2, \cdots, s_n$ lesquels, substitués aux variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, satisfont simultanément toutes les équations du système. On dit que deux systèmes $A\cdot X = K$ et $B\cdot X = J$ sont **équivalents** s'ils ont exactement les mêmes solutions. Un système est dit **contradictoire** ou **incompatible** s'il ne possède aucune solution.

Dans ce qui suit, nous présentons trois méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires. Il s'agit de la méthode d'élimination de Gauss-Jordan, de l'utilisation de la matrice inverse et de la règle de Cramer.

3.1 MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE GAUSS-JORDAN

Pour résoudre une équation, par exemple $2x-1=0$, on effectue une suite d'opérations algébriques de part et d'autre de l'égalité afin de remplacer l'équation donnée par une équation équivalente qui est plus facile à résoudre,

$$\begin{aligned} 2x-1=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x=1 \quad (+1 \text{ de chaque côté}) \\ &\Leftrightarrow \quad x=\tfrac{1}{2} \quad (\div 2 \text{ de chaque côté}). \end{aligned}$$

Les trois équations $2x-1=0$, $2x=1$ et $x=\tfrac{1}{2}$ sont équivalentes mais la dernière, $x=\tfrac{1}{2}$, est la plus facile à résoudre, il suffit de la regarder !

La résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss-Jordan suit le même principe. Il s'agit d'applications successives et mécaniques d'une suite d'opérations sur un système d'équations afin d'en obtenir un système équivalent qui est plus facile à résoudre. Plus particulièrement, la méthode repose sur le résultat suivant :

Les systèmes équivalents

Soit $[A\,|\,K]$ et $[B\,|\,J]$, deux matrices augmentées d'ordre $m\times(n+1)$. Si les matrices augmentées $[A\,|\,K]$ et $[B\,|\,J]$ sont ligne-équivalentes, $[A\,|\,K]\overset{\ell}{\sim}[B\,|\,J]$, les systèmes d'équations linéaires correspondants $AX=K$ et $BX = J$ sont **équivalents**; ils ont le même ensemble solution.

Exemple : Les matrices $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 5\end{array}\right]$ et $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]$ sont ligne-équivalentes,

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 5\end{array}\right] \overset{L_2:=L_2-3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -4\end{array}\right] \overset{L_2:=-\frac{1}{4}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

et elles correspondent à des systèmes d'équations linéaires équivalents

$$\begin{array}{r}x+y=3\\ 3x-y=5\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r}x+y=3\\ y=1;\end{array}$$

on peut facilement vérifier que leur ensemble solution ne contient que $(x,y)=(2,1)$.

Les opérations élémentaires de ligne permettent de réaliser l'élimination des variables d'un système d'équations linéaires sans perdre ni créer de l'information. La forme la plus simple que l'on puisse obtenir par applications successives d'une suite d'opérations élémentaires de ligne sur une matrice est la matrice dite L-réduite échelonnée.

La matrice L-réduite échelonnée

Soit $R=\left[r_{ij}\right]$, une matrice de format $m\times n$. La matrice R est dite **L-réduite** si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. Toutes les lignes nulles sont en-dessous des lignes non nulles.
2. Dans chaque ligne non nulle, le premier élément non nul est 1. La colonne où se trouve cet élément s'appelle la colonne pivot de la ligne.
3. Dans la colonne pivot d'une ligne, l'élément de chacune des autres lignes est 0.

De plus, R est dite **L-réduite échelonnée** si elle satisfait aussi à la condition suivante :

4. Les colonnes pivots apparaissent en ordre croissant (la lecture se fait de haut en bas).

Exemple : La matrice suivante est L-réduite, mais elle n'est pas échelonnée puisque les colonnes pivots ne sont pas en ordre croissant; ses colonnes pivots sont, dans l'ordre, (2, 1, 4).

$$\begin{bmatrix}0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & -2\\ \mathbf{1} & 0 & 4 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Par contre, la matrice suivante (obtenue de la précédente en permutant les deux premières lignes) est L-réduite échelonnée. Ses colonnes pivots sont, dans l'ordre, (1, 2, 4).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & 0 & 4 & 0 & 7\\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

L'utilisation de la méthode de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires consiste en l'application d'une suite d'opérations élémentaires de ligne sur la matrice augmentée

$$\left[A \mid K\right] \text{ qui correspond au système à résoudre } AX{=}K,$$

dans le but d'obtenir la matrice L-réduite échelonnée $\left[B \mid J\right]$, qui correspond au système équivalent plus simple $BX = J$,

$$\left[A \mid K\right] \overset{\ell}{\sim} \left[B \mid J\right].$$

Exemple : Pour résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} x + 2y &= 9 - 2z \\ y &= -3x \\ x + y + z &= 4, \end{aligned}$$

qui correspond à l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

on considère la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

On doit effectuer des opérations élémentaires de ligne sur cette matrice augmentée dans le but d'obtenir une matrice L-réduite échelonnée qui, interprétée, fournit la solution au système d'équations de départ.

Il y a déjà un 1 comme premier élément de la première ligne de la matrice augmentée, servons nous en comme « pivot » pour placer des 0 dans sa colonne en effectuant les opérations $L_2 := L_2 - 3L_1$ et $L_3 := L_3 - L_1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - L_1}{\overset{L_2 := L_2 - 3L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Notons que nous venons tout juste d'obtenir un système équivalent au système de départ où nous avons <u>éliminé</u> x dans deux de ses trois équations.

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 9 \\ 3x + y &= 0 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 2z &= 9 \\ -5y - 6z &= -27 \\ -y - z &= -5 \end{aligned}$$

Pour placer un 1 à l'intersection de la deuxième ligne et de la deuxième colonne, il suffit d'effectuer successivement les opérations L_{23} et $L_2 := -L_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right] \overset{L_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \end{array}\right] \overset{L_2 := -L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \end{array}\right]$$

Notons que pour placer un 1 à l'intersection de la deuxième ligne et de la deuxième colonne, on aurait pu diviser la ligne 2 par -5, mais ceci aurait introduit des fractions et rendrait les calculs encore plus fastidieux.

Les opérations $L_1 := L_1 - 2L_2$ et $L_3 := L_3 + 5L_2$ introduisent des 0 dans la 2e colonne pivot.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \end{array}\right] \underset{L_3:=L_3+5L_2}{\overset{L_1:=L_1-2L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Nous avons maintenant <u>éliminé</u> y dans deux des trois équations du système,

$$\begin{array}{c} x + 2y + 2z = 9 \\ y + z = 5 \\ -5y - 6z = -27 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = -1 \\ y + z = 5 \\ -z = -2. \end{array}$$

Multipliant la ligne 3 par -1 pour ensuite la soustraire à la ligne 2 nous mène à la matrice L-réduite échelonnée. Cette fois, nous avons <u>éliminé</u> z de deux des trois équations.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \overset{L_3:=-L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right] \overset{L_2:=L_2-L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right]$$

Cette dernière matrice se traduit par le système d'équations suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1x + 0y + 0z = -1 \\ 0x + 1y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + 1z = 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2. \end{array}$$

Il est plus simple que le système de départ puisqu'il fournit directement les valeurs que doivent prendre les variables afin de satisfaire toutes les équations du système simultanément. Il y a donc une seule solution, $x = -1$, $y = 3$ et $z = 2$, au système d'équations

$$\begin{array}{c} x + 2y = 9 - 2z \\ y = -3x \\ x + y + z = 4. \end{array}$$

On peut vérifier cette solution en remplaçant les valeurs que prennent les variables dans chacune des équations du système. En effet, posant $x = -1$, $y = 3$ et $z = 2$ dans ces équations, on a bien les égalités

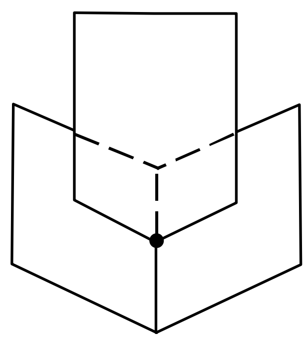
$$\begin{array}{c} -1 + 2(3) = 9 - 2(2), \\ 3 = -3(-1), \\ -1 + 3 + 2 = 4. \end{array}$$

La <u>méthode d'élimination</u> employée à l'exemple précédent est, en gros, celle dite de <u>Gauss-Jordan</u>. Il s'agit d'abord de placer un 1 comme premier élément non nul de la première ligne et de s'en servir comme « pivot » pour placer des 0 dans le restant de sa colonne. On passe ensuite à la deuxième ligne de la matrice pour placer un 1 comme premier élément non nul de cette ligne et on s'en sert maintenant comme pivot... Il s'agit de simplifier la matrice augmentée dans un ordre précis, une colonne à la fois, de gauche à droite. L'intérêt de cette méthode est son caractère automatique, facilement réalisable sur ordinateur, qui permet de traiter des systèmes d'équations linéaires de grande taille. En fait, la méthode d'élimination de Gauss-Jordan est déjà programmée sur la plupart des calculatrices de poche. Il suffit d'aller voir dans l'index du manuel d'utilisation de la calculatrice et d'y chercher les expressions *rref* pour «row reduced echelon form» ou *ref* ou encore *Gauss-Jordan* ou *résolution simultanée*...

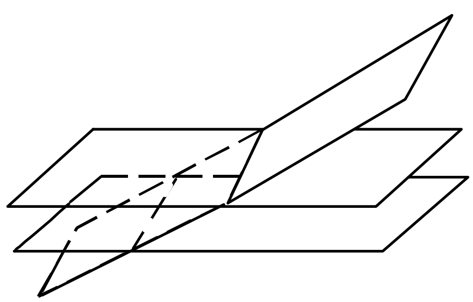
Tout système d'équations linéaires se caractérise par le fait qu'il ne possède aucune solution ou une seule solution (comme c'est le cas à l'exemple précédent) ou encore une infinité de solutions. Considérons un système de 3 équations à 3 inconnues afin d'illustrer géométriquement ce que peuvent représenter ces ensembles solutions. Chacune des équations de ce système représente un plan de l'espace de dimension 3. En effet, l'ensemble des triplets (x, y, z) qui satisfont une équation linéaire $Ax + By + Cz = D$ correspond à un plan normal (perpendiculaire) au vecteur $\langle A, B, C\rangle$. Ainsi, la solution $(-1, 3, 2)$ du système d'équations linéaires de l'exemple précédent peut donc être interprétée comme les coordonnées cartésiennes du point d'intersection des trois plans

$$\begin{gathered} x + 2y + 2z = 9 \\ 3x + y = 0 \\ x + y + z = 4. \end{gathered}$$

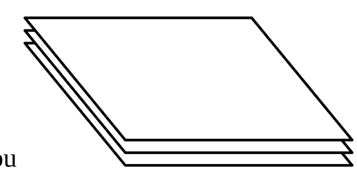
En général, un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues admet une solution unique lorsque les 3 plans se rencontrent en un seul point de l'espace.



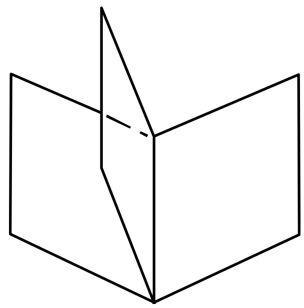
Il n'admet aucune solution lorsqu'au moins 2 des 3 plans sont parallèles



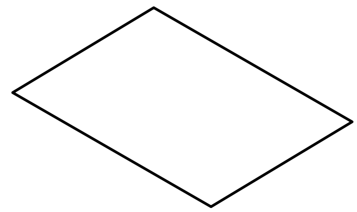
ou



et il en admet une infinité lorsque les 3 plans se rencontrent le long d'une droite ou sont confondus.



ou



Exemple : Le système suivant

$$\begin{aligned} 2x+3y-2z&=5\\ x-2y+3z&=2\\ 4x-y+4z&=1. \end{aligned}$$

ne possède aucune solution. En effet, la troisième ligne de la matrice L-réduite échelonnée obtenue

$$\begin{aligned} 2x+3y-2z&=5\\ x-2y+3z&=2\\ 4x-y+4z&=1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5\\ 1 & -2 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & \frac{5}{7} & 0\\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{8}{7} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

correspond à l'égalité $0x+0y+0z=1$ ou, plus simplement, 0=1 qui est une absurdité. Nous sommes donc en présence d'un système qui n'a aucune solution puisqu'on ne peut pas satisfaire chacune des équations du système simultanément. Le système est dit **contradictoire** (puisque 0 ne peut égaler 1). Géométriquement ceci signifie que les trois plans décrits par ces équations linéaires ne se rencontrent pas tous les trois simultanément dans l'espace.

Exemple : Pour trouver l'intersection des plans $\Pi_1 : 2x-y+4z=4$ et $\Pi_2 : x+3y-2z=1$, il suffit de résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} 2x-y+4z&=4\\ x+3y-2z&=1. \end{aligned}$$

On sait que l'intersection de deux plans peut être vide (les plans sont parallèles), une droite (les plans ne sont pas parallèles) ou bien un plan (les plans sont confondus). Pour le savoir, traduisons le système sous la forme matricielle,

$$\begin{aligned} 2x-y+4z&=4\\ x+3y-2z&=1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

et appliquons la méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour trouver la matrice L-réduite échelonnée correspondante,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{L_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right] \overset{L_2:=L_2-2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & 1\\ 0 & -7 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_2:=-\frac{1}{7}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right] \overset{L_1:=L_1-3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & \frac{10}{7} & \frac{13}{7}\\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right].$$

La dernière matrice correspond au système, équivalent au système initial,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x+\frac{10}{7}z=\frac{13}{7} \\ y-\frac{8}{7}z=-\frac{2}{7}. \end{array}$$

On constate que pour une valeur z donnée, les variables x et y sont complètement déterminées. On peut donc exprimer x et y comme des fonctions de z.

$$\begin{array}{l} x+\frac{10}{7}z=\frac{13}{7} \\ y-\frac{8}{7}z=-\frac{2}{7} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{13}{7}-\frac{10}{7}z \\ y=-\frac{2}{7}+\frac{8}{7}z \end{array}$$

Les variables x et y sont dites **variables pivots** et correspondent aux colonnes pivots tandis que la variable z est dite **libre**.

Rappelons que résoudre un système d'équations à trois variables signifie qu'on trouve tous les triplets de nombres réels qui satisfont simultanément toutes les équations du système. Puisque x et y sont des fonctions de z, on peut utiliser z pour engendrer toutes les solutions du système. Il suffit de lui donner une valeur réelle, disons t, pour que les deux autres variables x et y soient déterminées; d'où l'idée de dire que z est une variable libre.

$$z=t \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{13}{7}-\frac{10}{7}t \\ y=-\frac{2}{7}+\frac{8}{7}t \end{array}$$

L'ensemble des triplets cherchés est donc donné par les équations paramétriques

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7}-\frac{10}{7}t \\ -\frac{2}{7}+\frac{8}{7}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{10}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ où } t\in\Re.$$

Ainsi, pour avoir une solution particulière au système (un point dans l'intersection des deux plans), il suffit de donner une valeur réelle à t. Par exemple, en posant $t = 0$, on engendre la solution $x=\frac{13}{7}$, $y=-\frac{2}{7}$ et $z=0$, on a bien

$$\begin{array}{c} 2\left(\frac{13}{7}\right)-\left(-\frac{2}{7}\right)+4(0)=4 \\ \left(\frac{13}{7}\right)+3\left(-\frac{2}{7}\right)-2(0)=1; \end{array}$$

posant $t = 1$ on engendre la solution $x=\frac{3}{7}$, $y=\frac{6}{7}$, $z=1$, on a bien

$$\begin{array}{c} 2\left(\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{6}{7}\right)+4(1)=4 \\ \left(\frac{3}{7}\right)+3\left(\frac{6}{7}\right)-2(1)=1; \end{array}$$

posant $t=\frac{1}{2}$, on engendre la solution $x=\frac{8}{7}$, $y=\frac{2}{7}$, $z=\frac{1}{2}$, on a bien

$$\begin{array}{c} 2\left(\frac{8}{7}\right)-\left(\frac{2}{7}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ \left(\frac{8}{7}\right)+3\left(\frac{2}{7}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)=1 \end{array}$$

et ainsi de suite. Quelle que soit la valeur t réelle choisie, les équations paramétriques ci-dessus fournissent une solution au système d'équations. Il y a donc une infinité de solutions possibles. On reconnaît, en fait, les équations paramétriques de la droite passant par le point $\left(\frac{13}{7},-\frac{2}{7},0\right)$ qui est parallèle au vecteur $\left\langle -\frac{10}{7},\frac{8}{7},1\right\rangle$.

En général, l'ensemble solution d'un système d'équations linéaires, lorsque celui-ci possède une infinité de solutions, est décrit sous forme *paramétrique* et les paramètres employés correspondent exactement aux variables libres de la matrice L-réduite échelonnée utilisée pour résoudre ce système d'équations linéaires.

Exemple : Considérons les plans d'équations

$$\begin{aligned} 4x+2y-z&=2\\ 8x+4y-2z&=4\\ -2x-y+\tfrac{1}{2}z&=-1. \end{aligned}$$

La deuxième et la troisième ligne de la matrice L-réduite échelonnée obtenue pour ce système sont formées uniquement de 0,

$$\begin{aligned} 4x+2y-z&=2\\ 8x+4y-2z&=4\\ -2x-y+\tfrac{1}{2}z&=-1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 2\\ 8 & 4 & -2 & 4\\ -2 & -1 & \tfrac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La variable x est pivot tandis que les variables y et z sont libres. Posant $y=s$ et $z=t$, on trouve que les solutions du système sont, sous forme paramétrique,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow\quad x+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{4}z=\tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{4}t\\ y&=s\\ z&=t \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} \tfrac{1}{4}\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque les solutions du système sont engendrées en choisissant n'importe quel s et n'importe quel t réels, il y en a une infinité. Géométriquement, ces solutions correspondent aux coordonnées cartésiennes de tous les points sur le plan passant par le point $\left(\tfrac{1}{2},0,0\right)$ qui est perpendiculaire au vecteur $\left\langle -\tfrac{1}{2},1,0\right\rangle \wedge \left\langle \tfrac{1}{4},0,1\right\rangle$. Si on examine bien les trois équations de notre système, on constate que la deuxième et la troisième équations sont, respectivement, 2 fois et $-\tfrac{1}{2}$ fois la première. On était donc en présence de trois équations algébriques représentant le même plan.

Exemple : Résolvons le système de trois équations à cinq variables

$$\begin{aligned} 4x+12y+7v&=22+7u\\ 3z+10u+3v+10&=0\\ z+6u+2v+7&=x+3y \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} 4x+12y-7u+7v&=22\\ 3z+10u+3v&=-10\\ -x-3y+z+6u+2v&=-7 \end{aligned}$$

et donnons l'ensemble des solutions sous forme paramétrique. Trouvons d'abord la matrice L-réduite échelonnée correspondant à ce système.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 12 & 0 & -7 & 7 & 22 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 3 & -10 \\ -1 & -3 & 1 & 6 & 2 & -7 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_{13}} \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & -3 & 1 & 6 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & 12 & 0 & -7 & 7 & 22 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_1:=-L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & 12 & 0 & -7 & 7 & 22 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3:=L_3-4L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 17 & 15 & -6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_2:=\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 17 & 15 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1:=L_1+L_2 \\ \sim \\ L_3:=L_3-4L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & 11 & \frac{22}{3} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_3:=\frac{3}{11}L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & 1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1:=L_1+\frac{8}{3}L_3 \\ \sim \\ L_2:=L_2-\frac{10}{3}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Les colonnes pivots sont 1, 3 et 4. Les variables pivots sont donc x, z et u et les variables libres sont y et v. Exprimons les variables pivots en terme des variables libres.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} x+3y+7v=9 \\ z-9v=-10 \\ u+3v=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x=9-3y-7v \\ z=-10+9v \\ u=2-3v \end{array}$$

En posant $y=s$ et $v=t$, on trouve

$$\begin{array}{c} y=s \\ v=t \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-3s-7t \\ s \\ -10+9t \\ 2-3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et les solutions du système d'équations sont engendrées lorsque s et t parcourent l'ensemble des nombres réels.

Pour classifier correctement les différents types de systèmes d'équations linéaires (contradictoire, à solution unique, à une infinité de solutions), on peut utiliser le résultat suivant :

Le rang d'une matrice

Le **rang** d'une matrice A, noté $r(A)$, est le nombre de lignes non nulles de la L-réduite échelonnée de A. Une matrice A de format $m\times n$ est dite de **plein rang** si $r(A)=m$.

Soit un système d'équations linéaires de la forme $AX=K$ où A est de format $m\times n$ et K, de format $m\times 1$. Alors,

1. Si $r([A|K]) > r(A)$, le système est contradictoire.
2. Si $r([A|K]) = r(A)$, le système admet
   i) une solution unique si $r(A)=n$;
   ii) une infinité de solutions si $r(A)<n$.

Exemple : On a vu précédemment que le système

$$\begin{array}{c} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

est contradictoire; on a bien $r([A|K]) = 3 > r(A) = 2$. On a aussi vu que le système suivant possède une solution unique

$$\begin{array}{c} x+2y=9-2z \\ y=-3x \\ x+y+z=4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right];$$

on voit bien que $r([A|K]) = 3 = r(A)$ et que $n = 3 = r(A)$ est le nombre d'équations du système. De même, les systèmes suivants possèdent une infinité de solutions

$$\begin{array}{c} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=4 \\ 3x+2y+17z=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ où } r([A|K]) = 2 = r(A) < n = 3$$

$$\begin{array}{c} 4x+2y-z=2 \\ 8x+4y-2z=4 \\ -2x-y+\frac{1}{2}z=-1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ où } r([A|K]) = 1 = r(A) < n = 3$$

et sont bien caractérisés par le rang des matrices impliquées.

3.2 MATRICES INVERSES

Rappelons qu'une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice de même format B telle que $AB=BA=I$. Cette matrice inverse est alors notée A^{-1} et est déterminée par les relations $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

L'importance de l'inverse vient, entre autres, du désir de résoudre directement des systèmes d'équations linéaires de la forme $AX = K$. En effet, si A est inversible on trouve immédiatement

$$AX = K \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}K \Leftrightarrow X = A^{-1}K$$

qui est un analogue matriciel de résolution de l'équation $ax=k$ lorsque a, x et k sont des nombres réels

$$ax = k \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}k \Leftrightarrow x = a^{-1}k.$$

La procédure, présentée ici, selon laquelle on calcule la matrice inverse d'une matrice carrée est basée sur la notion de matrice de passage et sur la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

<u>La matrice de passage</u>

Soit A et B deux matrices de format $m \times n$. Si une suite d'opérations élémentaires de ligne transforme A en B, la même suite transforme l'identité en une matrice P telle que $B=PA$. En d'autres termes,

$$[A|I] \overset{\ell}{\sim} [B|P] \quad \Rightarrow \quad B = PA.$$

On dit que la matrice P est la **matrice de passage** de A à B.

La matrice P pour laquelle B=PA est donc un **compilateur** qui tient compte de toutes les opérations élémentaires de ligne effectuées pour passer de A à B.

Exemple : Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

qui, augmentée de la matrice identité I_3, est ligne-équivalente à la matrice suivante

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\ell}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 5/7 & 0 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/7 & 0 & -4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Dans le contexte de la matrice de passage,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/7 \\ 0 & 1 & -8/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 0 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & -4/7 & 1/7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que le produit de P par A donne bien la matrice B, c'est-à-dire que P est la matrice de passage de A à B,

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & -4/7 & 1/7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/7 \\ 0 & 1 & -8/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

En particulier, lorsqu'une matrice carrée A est transformée en la matrice identité I par une suite d'opérations élémentaires de ligne, on obtient $\left[A \middle| I\right] \overset{\ell}{\sim} \left[I \middle| P\right] \Rightarrow I = PA$. Ceci signifie que la matrice A^{-1} est obtenue de la matrice L-réduite échelonnée correspondant à la matrice augmentée $\left[A \middle| I\right]$.

La matrice inverse

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, si $\left[A \middle| I\right] \overset{\ell}{\sim} \left[I \middle| P\right]$ alors $P = A^{-1}$.

Exemple : Trouvons la matrice inverse de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On augmente A de la matrice identité d'ordre 3 et on applique la méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour trouver une forme L-réduite échelonnée.

$$\left[A\middle|I\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&2&2&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right]\underset{L_3:=L_3-L_1}{\overset{L_2:=L_2-3L_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&2&2&1&0&0\\0&-5&-6&-3&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\overset{L_{23}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&2&2&1&0&0\\0&-1&-1&-1&0&1\\0&-5&-6&-3&1&0\end{array}\right]\overset{L_2:=-L_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&2&2&1&0&0\\0&\mathbf{1}&1&1&0&-1\\0&-5&-6&-3&1&0\end{array}\right]$$

$$\underset{L_3:=L_3+5L_2}{\overset{L_1:=L_1-2L_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&0&0&-1&0&2\\0&\mathbf{1}&1&1&0&-1\\0&0&-1&2&1&-5\end{array}\right]\overset{L_3:=-L_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&0&0&-1&0&2\\0&\mathbf{1}&1&1&0&-1\\0&0&\mathbf{1}&-2&-1&5\end{array}\right]$$

$$\overset{L_2:=L_2-L_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&0&0&-1&0&2\\0&\mathbf{1}&0&3&1&-6\\0&0&\mathbf{1}&-2&-1&5\end{array}\right]=\left[I\middle|A^{-1}\right]$$

La matrice inverse cherchée est donc

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\3&1&-6\\-2&-1&5\end{bmatrix}.$$

On vérifie que les matrices sont bien inverses l'une de l'autre en les multipliant.

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&2\\3&1&-6\\-2&-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{ et }A^{-1}A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\3&1&-6\\-2&-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

La résolution de systèmes d'équations linéaires en utilisant la matrice inverse

Si A est une matrice carrée d'ordre n et si A^{-1} existe alors le système d'équations $AX=K$ possède une solution unique donnée par $X=A^{-1}K$.

Ce résultat vient du fait que si A est inversible, on trouve immédiatement

$$AX=K\Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}K\Leftrightarrow X=A^{-1}K.$$

Exemple : Résolvons à nouveau le système

$$\begin{aligned}x+2y&=9-2z\\y&=-3x\\x+y+z&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\0\\4\end{bmatrix}$$

mais cette fois à l'aide de la méthode de la matrice inverse. On a vu précedemment que l'inverse de la matrice des coefficients des variables

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\text{ est }A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\3&1&-6\\-2&-1&5\end{bmatrix}.$$

Ainsi, la solution au système d'équations est donnée par le produit

$$A^{-1}K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2. \end{cases}$$

Si nous voulons plutôt résoudre les systèmes d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

il suffit de multiplier le vecteur des constantes de chacun de ces systèmes par la matrice inverse des coefficients des variables pour obtenir les solutions cherchées,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}K = X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}K = X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -31 \\ 28 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = -31 \\ z = 28. \end{cases}$$

3.3 RÈGLE DE CRAMER

La solution d'un système de deux équations à deux inconnues

$$\left.\begin{aligned} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

peut se faire en toute généralité comme suit : pour trouver x, multiplions la première équation par d et la seconde par b, soustayons les résultats et, en autant que $ad - bc \neq 0$, divisons par le coefficient de x.

$$\left.\begin{aligned} - \quad adx + bdy &= sd \\ \underline{bcx + bdy} &\underline{= tb} \\ (ad - bc)x &= sd - tb \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{sd - tb}{ad - bc}$$

De la même façon, en autant que $ad - bc \neq 0$, on peut trouver y :

$$\left.\begin{aligned} - \quad acx + bcy &= sc \\ \underline{acx + ady} &\underline{= ta} \\ (bc - ad)y &= sc - ta \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{sc - ta}{(bc - ad)} = \frac{-(at - sc)}{-(ad - bc)} = \frac{at - sc}{ad - bc}.$$

On constate d'abord que les dénominateurs des quantités x et y sont tous les deux $ad - bc$ qui correspondent exactement au déterminant de la matrice des coefficients du système d'équations

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

En fait, x et y sont donnés par le quotient de deux déterminants, c'est-à-dire,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{s} & b\\ \mathbf{t} & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}=\frac{sd-bt}{ad-bc}\quad \text{et}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a & \mathbf{s}\\ c & \mathbf{t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}=\frac{at-sc}{ad-bc}.$$

La généralisation de ce résultat est ce qu'on appelle la règle de Cramer.

<u>La règle de Cramer</u>

Soit A, une matrice carrée d'ordre n et K un vecteur colonne d'ordre n. Si $\det(A)\neq 0$ le système d'équations linéaires $AX=K$ possède une solution unique $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^t$ donnée par

$$x_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A)},\quad \text{pour } i=1,2,\cdots,n$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A remplaçant la i^{e} colonne de A par K.

Exemple : Résolvons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}3x-2y+4z&=10\\ 2x+3y-6z&=8\\ 4x-5y+2z&=7\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -6\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 8\\ 7\end{bmatrix}$$

D'abord, selon l'énoncé de la règle de Cramer,

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -6\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\ \text{et}\ K=\begin{bmatrix}10\\ 8\\ 7\end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{10} & -2 & 4\\ \mathbf{8} & 3 & -6\\ \mathbf{7} & -5 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -6\\ 4 & -5 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-368}{-104}=\frac{46}{13},\qquad y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}3 & \mathbf{10} & 4\\ 2 & \mathbf{8} & -6\\ 4 & \mathbf{7} & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -6\\ 4 & -5 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-178}{-104}=\frac{89}{52}\ \text{et}$$

$$z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & \mathbf{10}\\ 2 & 3 & \mathbf{8}\\ 4 & -5 & \mathbf{7}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -6\\ 4 & -5 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-73}{-104}=\frac{73}{104}.$$

Le vecteur solution est donc

$$X=\begin{bmatrix}46/13\\ 89/52\\ 73/104\end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire que $x=46/13$, $y=89/52$ et $z=73/104$. On vérifie la solution en effectuant la multiplication

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 46/13 \\ 89/52 \\ 73/104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Attention. *Si* $\det(A) = 0$*, la règle de Cramer ne permet pas de résoudre le système* $AX = K$*. Il faut alors recourir à la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.*

La démonstration de la règle de Cramer pour un système de 3 équations à 3 inconnues est une belle application du produit scalaire et du produit vectoriel. Supposons d'abord que la matrice *A* suivante est de plein rang,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire qu'elle possède un inverse et que le système d'équations

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= k_3 \end{aligned}$$

possède une solution unique. Vectoriellement, ce système d'équation peut s'écrire

$$x\langle a_{11}, a_{21}, a_{31} \rangle + y\langle a_{12}, a_{22}, a_{32} \rangle + z\langle a_{13}, a_{23}, a_{33} \rangle = \langle k_1, k_2, k_3 \rangle .$$

Posons $\vec{u} = \langle a_{11}, a_{21}, a_{31} \rangle$, $\vec{v} = \langle a_{12}, a_{22}, a_{32} \rangle$, $\vec{w} = \langle a_{13}, a_{23}, a_{33} \rangle$ et $\vec{k} = \langle k_1, k_2, k_3 \rangle$. L'équation vectorielle ci-dessus devient alors $x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w} = \vec{k}$. Sachant que le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$, en effectuant le produit scalaire de part et d'autre de l'équation vectorielle par le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$, on obtient

$$\begin{aligned} (x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{k} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad &\Leftrightarrow \quad x\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + y\,\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + z\,\vec{w} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{k} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ &\Leftrightarrow \quad x\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{k} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}). \end{aligned}$$

Ainsi, en isolant la variable *x*,

$$x = \frac{\vec{k} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}{\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

où la dernière égalité est obtenue du fait que les déterminants d'une matrice et de sa transposée sont égaux. Ceci vérifie donc la règle de Cramer pour *x*. On procède de la même façon pour trouver *y* (on multiplie par $\vec{u} \wedge \vec{w}$) et z (on multiplie par $\vec{u} \wedge \vec{v}$).

3.4 EXERCICES

Il est suggérer de faire les numéros soulignés à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul symbolique.

1. Trouver toutes les solutions aux systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{aligned} x+2y&=4\\ 3x+7y&=2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+y+z&=4\\ 2x+5y-2z&=3 \end{aligned}$ c) $x-2y+z-3w=1$

d) $\begin{aligned} x+y+z+w&=0\\ x+y+z-w&=4\\ x+y-z+w&=-4\\ x-y+z+w&=2 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 2x+3y+4z&=4\\ x-y+z&=1\\ 3x+2y+5z&=6 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x+y-2z+v+3w&=1\\ 2x-y+2z+2v+6w&=2\\ 3x+2y-4z-3v-9w&=3 \end{aligned}$

<u>2.</u> Trouver toutes les solutions non triviales (c'est-à-dire telles que $X \neq \mathbf{0}$) au système $AX = \mathbf{0}$ où

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 7 & -4 & -5\\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. Trouver pour quelles valeurs *h* et *k*, le système suivant possède $\begin{aligned} 2x+hy&=8\\ x+3y&=k \end{aligned}$

a) une solution unique b) aucune solution c) une infinité de solutions

4. Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer.

a) $\begin{aligned} x+8y&=4\\ 3x-y&=-13 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x+y-z&=2\\ x-y+z&=7\\ 2x+2y+z&=4 \end{aligned}$ <u>c)</u> $\begin{aligned} x+y-z+w&=2\\ x-y+z+w&=-1\\ x+y+z-w&=2\\ x+z+w&=-1 \end{aligned}$

5. Résoudre les systèmes du numéro 4 en utilisant la matrice inverse.

<u>6.</u> Pour quelles valeurs *a*, *b* et *c*, le système suivant possède-t-il comme solution $x = 2$, $y = -2$ et $z = 4$?

$$\begin{aligned} -2x-by+cz&=-2\\ ax+3y-cz&=-6\\ ax+by-3z&=-6 \end{aligned}$$

<u>7.</u> Résoudre le système suivant pour α, β et γ de telle sorte que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ et $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} -2\sin\alpha-3\cos\beta+5\tan\gamma&=1\\ 4\sin\alpha+2\cos\beta-2\tan\gamma&=2\\ 2\sin\alpha-5\cos\beta+3\tan\gamma&=7 \end{aligned}$$

8. Résoudre le système suivant pour *x*, *y* et *z*.

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 + 4z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

9. Trouver le polynôme $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 9$ et $P(3) = 28$.

10. Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 qui passe par les points $(-3,4)$, $(1,5)$, $(2,7)$, $(6,-2)$ et $(8,-1)$.

11. Trouver un polynôme de degré 3 qui passe par le point $(1,3)$ avec une pente de -5 et qui passe par le point $(3,-7)$ avec une pente de -1.

12. Trouver un polynôme de degré 3 qui passe par les points $(1,1)$, $(2,11)$ et $(-1,-1)$ et ayant une pente de 3 au point $(1,1)$.

13. La compagnie ING fabrique trois modèles d'un produit de base : le «régulier», le «luxeux» et le «décadent». Les modèles sont fabriqués dans les départements *A*, *B* et *C*. Le modèle «régulier» requiert 3 unités de temps au département *A*, 7 au département *B* et 5 au département *C*. Le modèle «luxeux» requiert 4 unités de temps au département *A*, 8 au département *B* et 7 au département *C*. Le modèle «décadent» requiert 4 unités de temps au département *A*, 9 au département *B* et 6 au département *C*. La compagnie a une commande spéciale qui sera traitée en surtemps. Si le département *A* peut contribuer 129 unités de temps supplémentaire, le département *B* peut en contribuer 285 et le département C peut en contribuer 210, et que les directeurs des départements décident d'utiliser tout le surtemps disponible, combien de chacun des modèles la compagnie peut-elle produire ?

14. Trois types de produits *A*, *B* et *C* sont disponibles et leurs teneurs respectives en éléments *I* et *II* sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	Teneur en I ($\mathrm{kg/m^3}$)	Teneur en II ($\mathrm{kg/m^3}$)
produit *A*	2	10
produit *B*	1,4	7
produit *C*	2	4

Dans quelle proportion devrait-on combiner ces trois produits pour obtenir les mélanges suivants ?

	Teneur en I	Teneur en II
mélange 1	1,8	6
mélange 2	1,5	6
mélange 3	1,5	7

Aide : Pour chacun des mélanges, considérer les proportions du mélange constituées du produit A, du produit B et du produit C comme «variables». Ne pas oublier que la somme des proportions donne **un** tout…

15. Quand Jean, Pierre et Carole travaillent ensemble, ils font un travail en 2 heures. Quand Pierre et Carole travaillent ensemble, ils font le même travail en 4 heures. Quand Jean et Carole travaillent ensemble, ils font le même travail en 2 heures 24 minutes. Combien de temps chacun prendrait-il (elle) pour accomplir ce travail s'il (elle) travaillait seul(e) ?

Aide : Pour chacun des individus, considérer la proportion du travail effectué en une heure comme «variable».

16. Quand Jacques et André travaillent ensemble, ils font un travail en 6 heures. Quand Jacques et Robert travaillent ensemble, ils font le même travail en 8 heures. Quand André et Robert travaillent ensemble, ils font le même travail en 10 heures.

a) Si les trois travaillent ensemble, combien de temps cela prendrait-il ?

b) Combien de temps prend Robert pour faire le travail seul ?

17. Une méthode de cryptage consiste à associer aux lettres de A à Z les nombres de 1 à 26 et l'espace blanc au nombre 0. On subdivise ensuite les nombres en groupe de 3 pour former des vecteurs colonnes et ceux-ci sont cryptés par multiplication par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ pour laquelle } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le message «mission accomplie» est codé par la suite de nombres

13, 9, 19, 19, 9, 15, 14, 0, 1, 3, 3, 15, 13, 16, 12, 9, 5

que l'on subdivise pour obtenir les vecteurs colonne

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ils sont ensuite cryptés par

$$A\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 43 \\ -15 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 19 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 29 \\ -5 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ -12 \\ 13 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 33 \\ -15 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113 \\ 43 \\ -15 \end{bmatrix} \text{ et } A\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Le message transmis est alors

120, 43, -15, 78, 29, -5, -36, -12, 13, 96, 33, -15, 113, 43, -15, -2, 1, 4.

Ce code est très difficile à décrypter puisqu'une même lettre n'est pas toujours codée de la même façon. Par contre, le récepteur du message peut le décrypter en utilisant la matrice A^{-1} et en associant chacun des nombres à la lettre qui lui correspond comme on l'a fait ci-dessus. La complexité d'un tel cryptage dépend de la taille de la matrice utilisée. Il y a un avantage évident à utiliser une matrice qui contient des entiers positifs et pour laquelle l'inverse possède aussi des éléments entiers. On peut facilement changer le code en modifiant la matrice de cryptage.

À l'aide de la matrice A et son inverse A^{-1} ci-dessus, décrypter le message

111, 40, -17, 50, 18, -9, 39, 13, 3, 33, 16, 1, 67, 24, -6, 80, 33, -14.

SOLUTIONS DES EXERCICES DE LA SECTION 3.4

1. Pour a, b et c des réels,

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -7/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ e) aucune solution f) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Pour a et b des réels,

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -5/14 \\ 4/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1/14 \\ 5/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. a) solution unique $\Leftrightarrow h \neq 6, \forall k \in \Re$ b) aucune solution $\Leftrightarrow h = 6$ et $k \neq 4$

c) une infinité de solutions $\Leftrightarrow h = 6$ et $k = 4$

4. a) $\det(A) = -25$, $\det(A_1) = 100$, $\det(A_2) = -25$ d'où $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\det(A) = -9$, $\det(A_1) = -27$, $\det(A_2) = 18$, $\det(A_3) = -18$ d'où $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\det(A) = -4$, $\det(A_1) = -8$, $\det(A_2) = 0$, $\det(A_3) = 6$, $\det(A_4) = 6$ d'où $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$

5. Les matrices inverses à utiliser sont :

a) $\begin{bmatrix} 1/25 & 8/25 \\ 3/25 & -1/25 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -4/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

6. $a = 2$, $b = -1$ et $c = 1$

7. $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi$ et $\gamma = 0, \pi$ ou 2π

8. $x = \pm\sqrt{\frac{11}{7}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}$ et $z = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$

9. $P(x) = 1 + x^3$

10. $P(x) = \frac{713}{385} + \frac{15157}{4620}x + \frac{193}{1320}x^2 - \frac{1423}{4620}x^3 + \frac{269}{9240}x^4$

11. $P(x) = 5 + 2x - 5x^2 + x^3$

12. $P(x) = 1 - x - x^2 + 2x^3$

13. 15 réguliers, 9 luxueux et 12 décadents

14. mélange 1 : 1/6 de *A*, 1/3 de *B* et 1/2 de *C*
mélange 2 : impossible
mélange 3 : 1/12 de *A*, 5/6 de *B* et 1/12 de *C*

15. Jean 4 heures, Pierre 12 heures et Carole 6 heures

16. a) $\frac{240}{47}$ heures b) $\frac{240}{7}$ heures

RÉFÉRENCES

- Beauregard, R. A. et Fraleigh, J. B. *Linear Algebra*, 2e édition, Reading, Addison-Wesley, 1991, 518 p.
- Cullen, Charles G. *Linear Algebra with Applications*, 2e édition, Reading, Addison-Wesley, 1997, 494 p.
- Leroux, P. *Algèbre linéaire, une approche matricielle*, Outremont, Modulo Éditeur, 1983, 500 p.