Section 6.1

1. Soient $z_1 = 4-2i$, $z_2 = 2-5i$ et $z_3 = 3+3i$. Effectuez les opérations suivantes.

   (a) $3z_1 - 4z_2$
   (b) $\overline{z_2} z_3$
   (c) $\dfrac{i^{13} z_3}{z_1}$
   (d) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$
   (e) $\left|\dfrac{1}{z_3}\right|$
   (f) $z_3(z_2 + \overline{z_1})$
   (g) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_2+z_3}{i}\right)$
   (h) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{3z_1 - 2z_2}{-i}\right)$

2. Factorisez complètement les polynômes suivants. Vérifiez ensuite vos réponses en distribuant.

   (a) x^2+1
   (b) $8x^2+2x+1$
   (c) $x^2-8x+17$
   (d) $10x^2-4x+4$
   (e) x^3+9x
   (f) x^5-16x

3. Considérez le nombre complexe $z = 3+i$.

   (a) Calculez iz, i^2z et i^3z et représentez-les graphiquement dans le plan complexe avec z.
   (b) À quelle transformation géométrique correspond la multiplication par i ?
   (c) Calculez maintenant $\overline{z}$ et représentez-le graphiquement dans le plan complexe avec z.
   (d) À quelle transformation géométrique correspond la conjugaison de z? *(Vous pouvez le faire pour plusieurs nombres z pour vous aider au besoin)*

4. Trouvez les racines carrées de $-16+30i$. C'est-à-dire trouvez tous les nombres $z = a+bi$ tels que $z^2 = -16+30i$. [TI]

Section 6.2

5. Exprimez sous forme polaire les nombres suivants. [TI]

   (a) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$
   (b) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$
   (c) -4
   (d) $1-\sqrt{3}i$
   (e) $-6i$

6. Exprimez sous forme cartésienne les nombres suivants. [TI]

   (a) $2e^{i\pi/3}$
   (b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
   (c) $3e^{i\pi}$
   (d) $\sqrt{2}e^{11i\pi/6}$
   (e) $\sqrt{8}e^{5i\pi/4}$

7. Calculez les opérations suivantes sachant que

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}e^{5i\pi/6} \quad \text{et} \quad z_3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

   (a) $z_3 - z_1$
   (b) $z_1 z_2$
   (c) $\dfrac{z_1 z_3}{\overline{z_3}}$
   (d) $\dfrac{z_1}{z_2^2}$
   (e) z_3^4
   (f) $\dfrac{\sqrt{2}z_1}{\overline{z_2}} - z_3$

8. Soit $z = -i$. [TI]

   (a) Calculez les trois racines cubiques de z sous forme polaire.
   (b) Donnez les trois racines cubiques de z sous forme cartésienne.
   (c) Dessinez ces racines dans le plan complexe.

9. Soit $z = -8 + 8\sqrt{3}i$. [TI]

   (a) Calculez les racines quatrièmes de z sous forme polaire.
   (b) Donnez les racines quatrièmes de z sous forme cartésienne.
   (c) Dessinez ces racines dans le plan complexe.

Réponses

1.

(a) $4+14i$

(b) $-9+21i$

(c) $\dfrac{-9+3i}{10}$

(d) $\dfrac{-13-11i}{3}$

(e) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(f) $27+9i$

(g) -2

(h) 8

2.

(a) $(x-i)(x+i)$

(b) $8\left(x+\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{7}}{8}i\right)\left(x+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{7}}{8}i\right)$

(c) $(x-4-i)(x-4+i)$

(d) $10\left(x-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\right)\left(x-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)$

(e) $x(x-3i)(x+3i)$

(f) $x(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$

3.

(a) $iz=-1+3i, \quad i^2z=-3-i, \quad i^3z=1-3i$

(b) La multiplication par i correspond à une rotation antihoraire de $\pi/2$ dans le plan complexe.

(c) $\overline{z}=3-i$

(d) La conjugaison correspond à une réflexion par rapport à l'axe réel (horizontal).

4. $z_1=3+5i$ et $z_2=-3-5i$

5.

(a) $3e^{5i\pi/6}$

(b) $5e^{-3i\pi/4}$

(c) -4

(d) $2e^{-i\pi/3}$

(e) $6e^{-i\pi/2}$

6.

(a) $1+\sqrt{3}i$

(b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

(c) -3

(d) $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

(e) $-2-2i$

7.

(a) $(\sqrt{3}+1)i$

(b) $2\sqrt{2}e^{i\pi/2} = 2\sqrt{2}i$

(c) $2e^{i\pi/6}$

(d) 1

(e) $4e^{-i\pi} = -4$

(f) $-1+i$

8.

(a) $z_0 = e^{-i\pi/6}, \quad z_1 = e^{i\pi/2}, \quad z_2 = e^{7i\pi/6}$

(b) $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

(c)

9.

(a) $z_0 = 2e^{i\pi/6}, \quad z_1 = 2e^{2i\pi/3}, \quad z_2 = 2e^{-5i\pi/6}, \quad z_3 = 2e^{-i\pi/3}$

(b) $z_0 = \sqrt{3}+i, \quad z_1 = -1+\sqrt{3}i, \quad z_2 = -\sqrt{3}-i, \quad z_3 = 1-\sqrt{3}i$

(c)