**Formules de dérivation et d'intégration en MAT165, MAT265 et MAT472**
**Groupes de Michel Beaudin**

## Dérivation (linéarité, règles du produit, du quotient et des fonctions composées)

Si $c$ et $d$ sont des constantes, si $u$ et $v$ sont des fonctions de la variable $x$, alors

1. $(c\,u + d\,v)' = c\,u' + d\,v'$
2. $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$
4. $\Big(v\big(u(x)\big)\Big)' = v'\big(u(x)\big)\,u'(x)$

La règle 4 s'écrit aussi sous la forme $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$. Pour une équation implicite $f(x,y) = 0$, on pourra utiliser la formule qui fait appel à des dérivées partielles : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$. Ou bien dériver par rapport à $x$ en n'oubliant pas que $y$ dépend de $x$.

## Quelques formules de dérivation

La dérivée d'une constante est 0 : $c' = 0\,, c \in \mathbb{R}$. Si $u$ est une fonction de la variable $x$, si $a$ est une constante non nulle, alors les dérivées par rapport à $x$ des fonctions usuelles sont données par les formules suivantes.

1. $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad\Rightarrow\quad (x^n)' = n\,x^{n-1}$
2. $(e^u)' = e^u\,u' \quad\Rightarrow\quad (e^{a\,x})' = a\,e^{a\,x}$
3. $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u} \quad\Rightarrow\quad (\ln(a\,x))' = \dfrac{1}{x}$
4. $(\sin(u))' = \cos(u)\,u' \quad\Rightarrow\quad (\sin(a\,x))' = a\cos(a\,x)$
5. $(\cos(u))' = -\sin(u)\,u' \quad\Rightarrow\quad (\cos(a\,x))' = -a\sin(a\,x)$
6. $(\tan(u))' = \sec^2(u)\,u' \quad\Rightarrow\quad (\tan(a\,x))' = a\sec^2(a\,x)$
7. $(\arcsin(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad\Rightarrow\quad (\arcsin(a\,x))' = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$
8. $(\arctan(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2} \quad\Rightarrow\quad (\arctan(a\,x))' = \dfrac{a}{1+a^2x^2}$

## Intégration (linéarité, intégration par parties, Théorème Fondamental du Calcul)

Dans ce qui suit, $f$ et $g$ désignent des fonctions de la variable $x$, $c$ et $d$ désignent des constantes. Dans la formule 4, on suppose $f$ continue par morceaux et bornée sur l'intervalle $[a,b]$, $F$ désigne une primitive *continue* de $f$ sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ : donc $F'(x) = f(x)$ en tout point de continuité de $f$.

1. $\displaystyle\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int \big(c\,f(x) + d\,g(x)\big)\,dx = c\int f(x)\,dx + d\int g(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (TFC)

## Quelques formules d'intégration

Dans les formules 4 à 8 plus bas, $a$ désigne une constante non nulle. La lettre $x$ désigne la variable d'intégration tandis $C$, $C_1$ et $C_2$ désignent des constantes arbitraires – possiblement complexes. Elles sont ajoutées puisque deux primitives d'une même fonction *continue sur un intervalle* diffèrent par une constante.

1. $\displaystyle\int dx = x + C$
2. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;\; (n \neq -1)$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0 \\ \ln(x) + C_2, & x > 0 \end{cases}$
4. $\displaystyle\int e^{a\,x}\,dx = \frac{1}{a}e^{a\,x} + C$
5. $\displaystyle\int \sin(a\,x)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(a\,x) + C$
6. $\displaystyle\int \cos(a\,x)\,dx = \frac{1}{a}\sin(a\,x) + C$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

**Remarque** : dans la formule 8, le domaine réel de la primitive $\frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ est l'intervalle $|x| < a$. Une autre primitive, avec domaine (réel) $|x| > a$, est donnée par $\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + C_1$.