PHY-144 : Introduction à la physique du génie

Chapitre 5 : Cinématique de translation : mouvement curviligne.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous continuons notre étude des corps en mouvement. Au chapitre 4, nous avons commencé cette étude avec le mouvement rectiligne. Mais, très souvent, le mouvement d'un objet n'est **PAS rectiligne**. Le mouvement est alors « **curviligne** ».

Nous étudierons plus particulièrement deux types de mouvement curviligne. Tout d'abord, nous nous intéresserons au mouvement d'un **projectile**. Par la suite (au chapitre 6), nous caractériserons le mouvement d'un objet ou d'un point se déplaçant sur une trajectoire **circulaire**. Tous les mouvements curvilignes de ce chapitre seront des mouvements dans un plan, c'est-à-dire qu'il ne sera pas nécessaire d'utiliser trois dimensions (x, y, z) pour les analyser.

5.2 Mouvement curviligne - généralités

Comme on l'a vu au chapitre 4, même si le mouvement d'un objet est parfois complexe, le mouvement de son centre de masse est souvent assez simple. La trajectoire du centre de masse d'un boulet de canon lancé à partir d'une colline pourrait, par exemple, ressembler à celle qu'on peut voir à la figure 5.1.

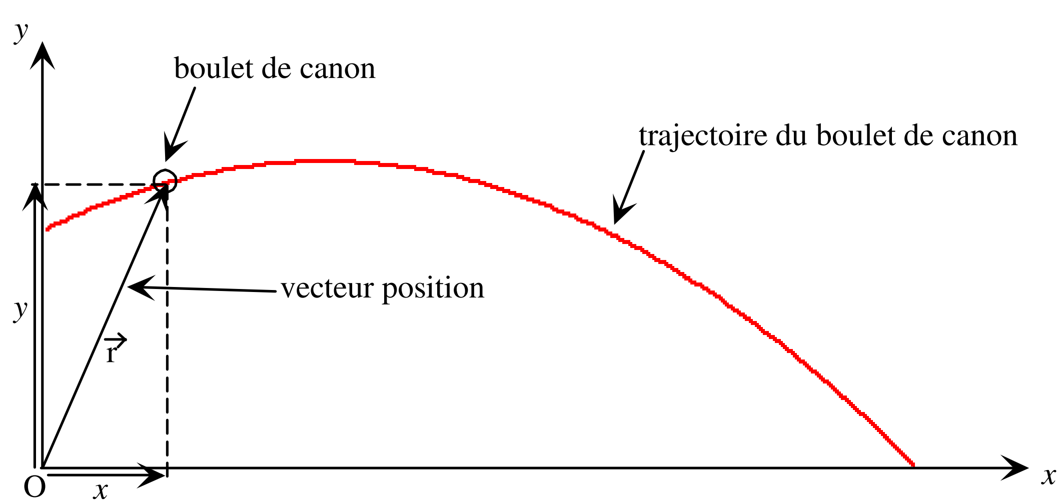


Figure 5.1 : Mouvement curviligne.

5.2.1 La position

On a vu au dernier chapitre que la **position** d'un objet est définie par rapport à une **référence.** Par exemple, dans la figure 5.1, cette référence est le point O.

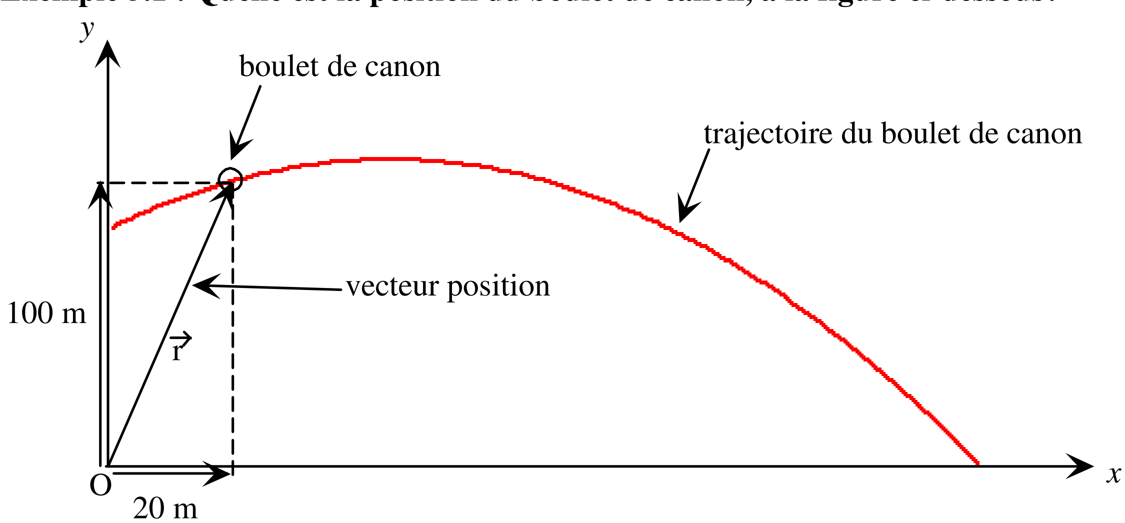
Pour décrire la position d'un objet en mouvement rectiligne (chapitre 4), on utilisait un vecteur $\vec{x}$, qui était dirigé vers les x+ ou vers les x-. On voit que dans le cas d'un mouvement curviligne, un tel vecteur ne serait pas suffisant.

Pour décrire la position d'un objet lors d'un mouvement curviligne dans le plan, on doit utiliser un vecteur à 2 dimensions, qu'on peut appeler $\vec{r}$. Si on utilise des coordonnées cartésiennes (x, y) pour le représenter alors :

vecteur position : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

On peut aussi, si on le désire, utiliser simplement les coordonnées x et y pour décrire la position d'un objet (voir exemple 5.1).

Exemple 5.1 : Quelle est la position du boulet de canon, à la figure ci-dessous?



La position du boulet à cet instant est : $\vec{r} = 20\text{ m }\vec{i} + 100\text{ m }\vec{j}$

ou encore : $x = +20$ m, $y = +100$ m.

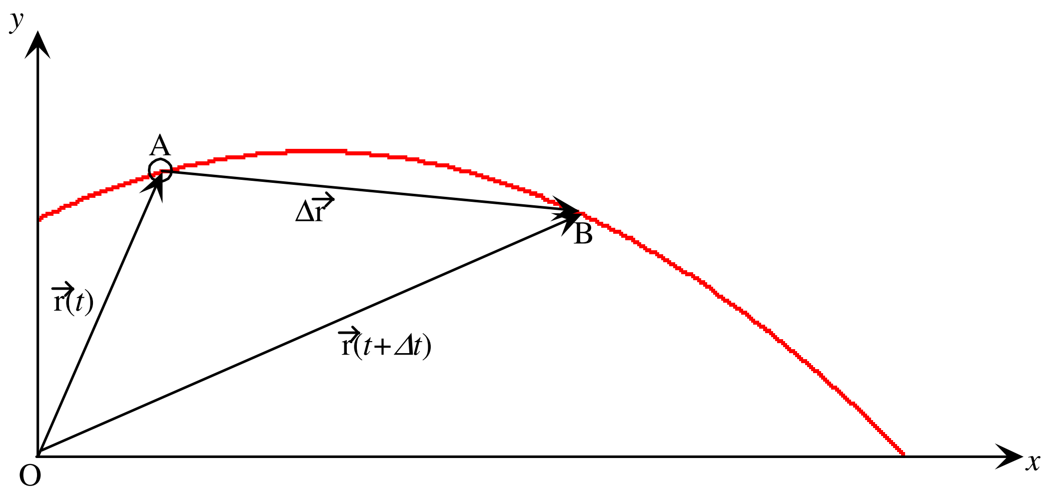
5.2.2 La vitesse

Rappelons la définition de la vitesse vue au chapitre 4.

La vitesse est le taux de variation de la **position** par rapport au temps.

Comme au chapitre 4, « vitesse » et « vitesse instantanée » sont des synonymes. Pour se représenter la vitesse, il faut comparer la position $\vec{r}$ de l'objet à un instant « t » et sa position $\vec{r}$ tout juste après (au temps « $t + \Delta t$ »). Entre ces 2 positions, il y a eu un déplacement $\Delta\vec{r}$.

L'objet est à la position A au temps « t » et à la position B au temps « $t + \Delta t$ ». Si le Δt est grand, on peut voir ce que serait le déplacement $\Delta\vec{r}$ entre la position A et la position B (voir figure 5.2).



Si on diminue l'intervalle de temps Δt :

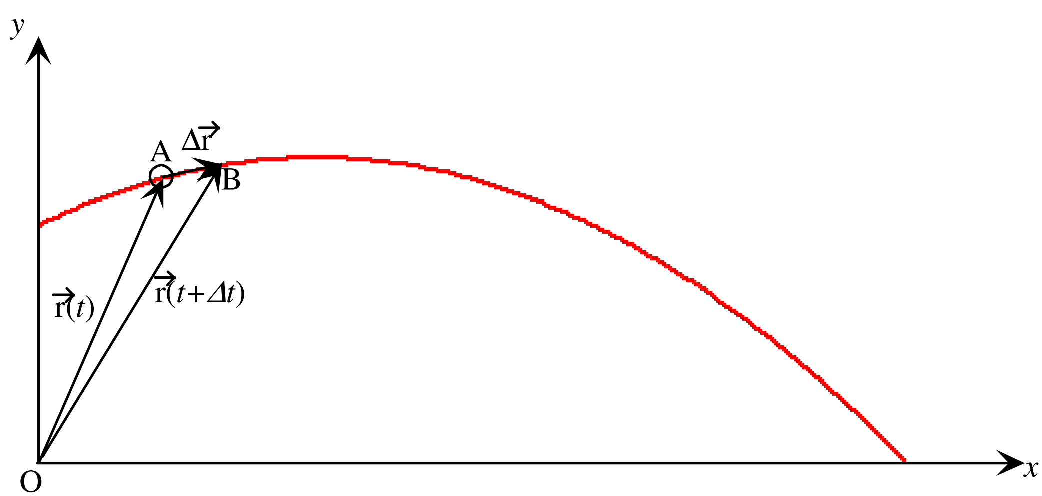


Figure 5.2 : Le déplacement $\Delta\vec{r}$ devient tangent à la trajectoire lorsque Δt tend vers 0.

La vitesse est définie de la même façon qu'au chapitre 4, sauf qu'on utilise $\Delta\vec{r}$ (déplacement en 2D) plutôt que $\Delta\vec{x}$ (déplacement rectiligne) .

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

La vitesse est une division de $\Delta\vec{r}$ par un scalaire (Δt)… et on sait que l'action de diviser un vecteur par un scalaire ne *change pas la direction du vecteur*. Il faut donc conclure que la vitesse est dans la même direction que $\Delta\vec{r}$, et on voit que $\Delta\vec{r}$ est tangent à la trajectoire lorsque Δt tend vers 0. Bref,

La vitesse est un vecteur, toujours tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement.

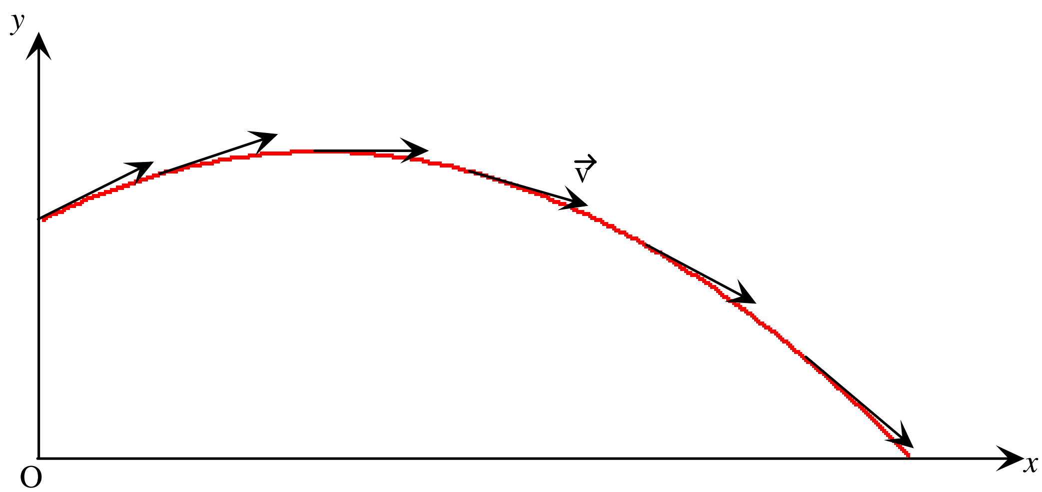


Figure 5.3 : La vitesse est tangente à la trajectoire.

5.2.3 L'accélération

Rappelons la définition de l'accélération vue au chapitre 4.

L'accélération est le taux de variation de la **vitesse** par rapport au temps.

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

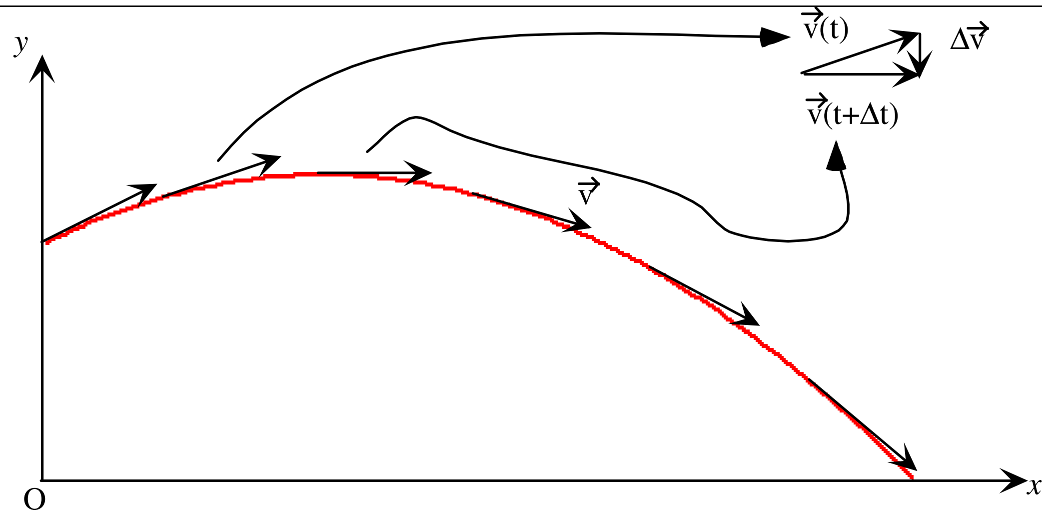


Figure 5.4 : Le vecteur $\Delta\vec{v}$ n'est pas dans le sens du mouvement.

Comme on le voit à la figure 5.4, $\Delta\vec{v}$ (la variation du vecteur vitesse) n'est pas du tout dans la direction du mouvement, même lorsque Δt tend vers 0. Le vecteur $\vec{a}$ est dans la même direction que le vecteur $\Delta\vec{v}$.

L'accélération est un vecteur qui n'est pas nécessairement dans le sens du mouvement.

Par exemple, si, pour notre boulet de canon, la résistance de l'air est négligeable, son accélération est montrée à la figure 5.5.

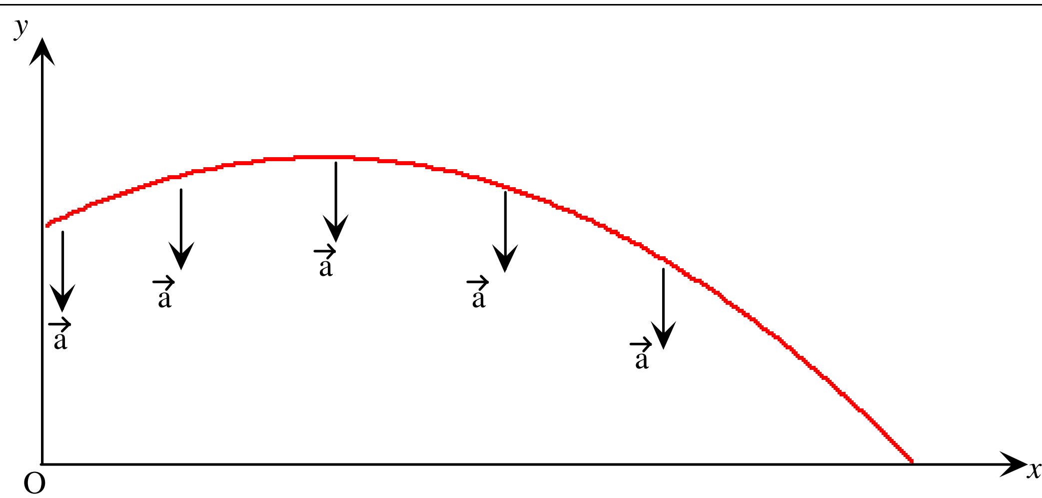


Figure 5.5 : L'accélération du boulet de canon n'est pas dans le sens du mouvement.

5.2.4 Position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes

Le déplacement $\Delta\vec{r}$ peut se décomposer en composantes « x » et « y » (figure 5.6).

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\ \vec{i} + \Delta y\ \vec{j}$$

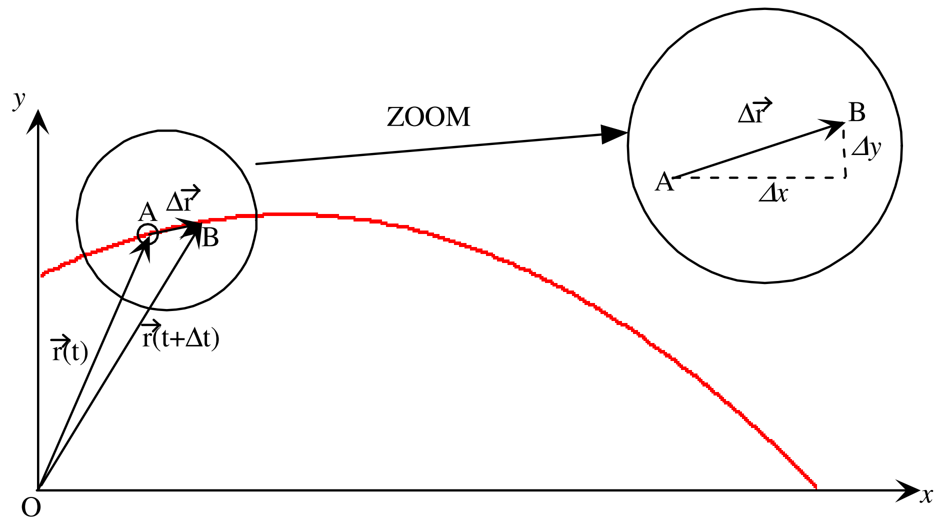


Figure 5.6 : Vecteur $\Delta\vec{r}$.

Alors $\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(\dfrac{\Delta x\ \vec{i}}{\Delta t} + \dfrac{\Delta y\ \vec{j}}{\Delta t})$.

Et comme la vitesse $\vec{v}$ est un vecteur, on peut aussi l'écrire : $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$.

On voit alors que : $v_x \ = \ \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ et $v_y \ = \ \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$.

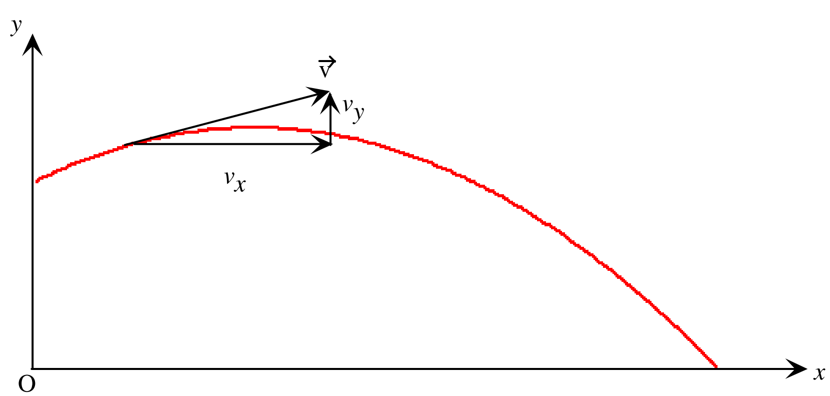


Figure 5.7 : Composantes de la vitesse.

Et on peut ajouter que l'accélération est :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_x \ \vec{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_y \ \vec{j}}{\Delta t} \right).$$

Et comme l'accélération $\vec{a}$ est un vecteur, on peut l'écrire : $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

On voit que $a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ et $a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$.

Comparons maintenant le mouvement rectiligne et le mouvement curviligne :

Mouvement rectiligne :	**Mouvement curviligne :**	
$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$
$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$	$a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$

Dans le cas du mouvement curviligne, les relations entre x, v_x et a_x (ou entre y, v_y et a_y) sont exactement les mêmes que celles qui existent entre x, v et a pour le mouvement rectiligne.

Tout se passe comme si le mouvement curviligne était une combinaison d'un mouvement rectiligne en « x » et d'un mouvement rectiligne en « y » !

Au chapitre 4, nous avions déduit 3 équations simples à partir de ces relations, dans le cas où **l'accélération était une constante (MRUA)**. Si a_x et a_y sont des constantes, nous devrions déduire des équations tout à fait semblables soit :

Résumé : Mouvement curviligne, a_x et a_y constantes.	
Si a_x est constante :	**Si a_y est constante :**
$v_{fx} = v_{ix} + a_x(t_f - t_i)$	$v_{fy} = v_{iy} + a_y(t_f - t_i)$
$x_f = x_i + v_{ix}(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a_x(t_f - t_i)^2$	$y_f = y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a_y(t_f - t_i)^2$
$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y(y_f - y_i)$

5.3 Mouvement curviligne – le projectile

Voyons maintenant un mouvement curviligne classique : celui d'un projectile. **Un projectile est un objet subissant uniquement la force gravitationnelle** (si l'air agit de façon non négligeable sur l'objet, on dit que son mouvement est celui d'un « projectile avec résistance de l'air »).

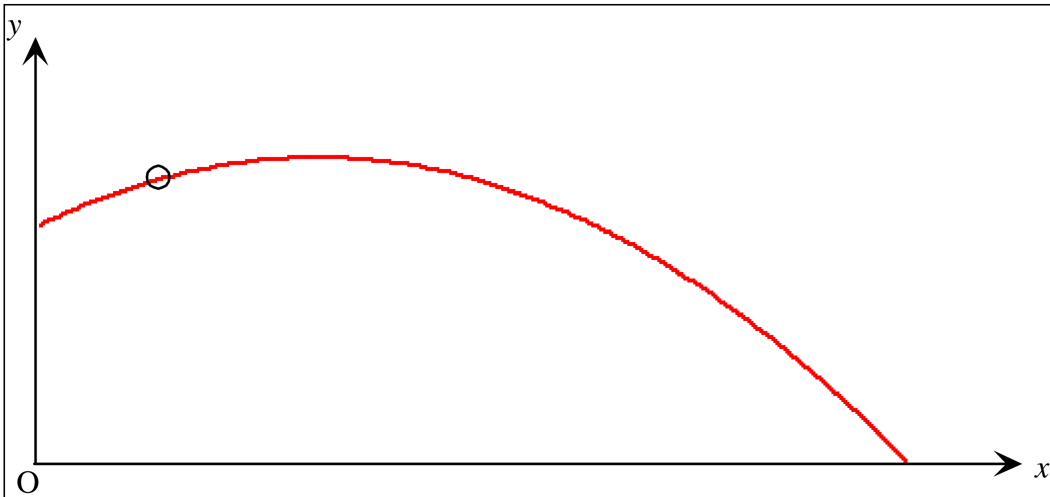
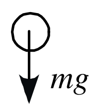


Figure 5.8 : Un boulet de canon en vol est un projectile.

Si on fait le diagramme de forces du boulet de canon (la résistance l'air est considérée négligeable) :



Si on applique la 2ème loi de Newton au boulet :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-mg\ \vec{j} = m\vec{a}$$

$$\text{donc } \vec{a} = -g\ \vec{j} = -9{,}81 \text{ m/s}^2\ \vec{j}$$

Alors $\mathbf{a_y = -9{,}81\ m/s^2}$ et c'est une **constante**.

Si tout ça semble familier, c'est que nous avons vu ces mêmes relations lorsque nous avons traité de la chute libre!

Donc le **mouvement en « *y* »** d'un projectile est, comme la chute libre, **un MRUA avec a_y = - 9,81 m/s².**

Aussi, comme $\vec{a} = -9{,}81\ \text{m/s}^2\ \vec{j}$, alors $\boldsymbol{a_x = 0}$.

Donc : le **mouvement en « *x* »** d'un projectile est **un mouvement rectiligne uniforme (vitesse en « *x* » = constante).**

Les équations du mouvement pour un projectile sont alors:

Résumé : Équations du mouvement pour un projectile.	
$a_x = 0$ $v_{fx} = v_{ix}$ $x_f = x_i + v_{ix}(t_f - t_i)$	$a_y = -9{,}81\ \text{m/s}^2$ $v_{fy} = v_{iy} + a_y(t_f - t_i)$ $y_f = y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a_y(t_f - t_i)^2$ $v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y(y_f - y_i)$

Ces équations peuvent être utilisées :

si la résistance de l'air est négligeable.

si le projectile ne touche à rien (il ne doit subir aucune autre force que la force gravitationnelle!). Dans le cas de notre boulet de canon, les équations ne sont valides qu'**entre le moment où le boulet ne touche plus le canon et le moment où le boulet est sur le point de toucher le sol.**

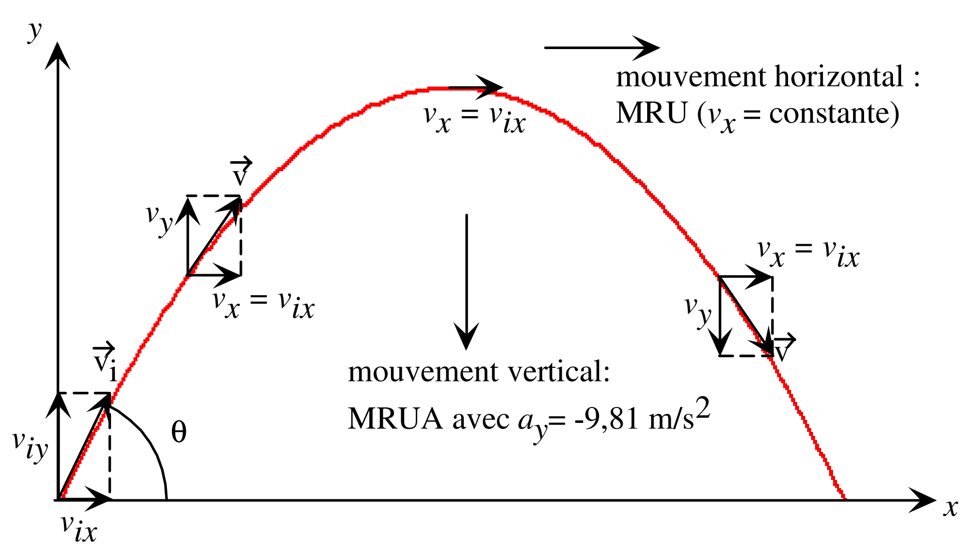


Figure 5.9 : Trajectoire typique d'un projectile.

On peut remarquer plusieurs caractéristiques du mouvement dans cette figure :

a) **la vitesse est toujours dans le sens du mouvement** (tangente à la trajectoire).
b) L'accélération n'est pas dans le sens du mouvement.
c) La vitesse en « x » est constante.
d) Lorsque **le projectile atteint sa hauteur « y » maximale, $v_y = 0$.**

Un cas particulier est le projectile en lancement horizontal, où l'angle de lancement $\theta = 0°$.

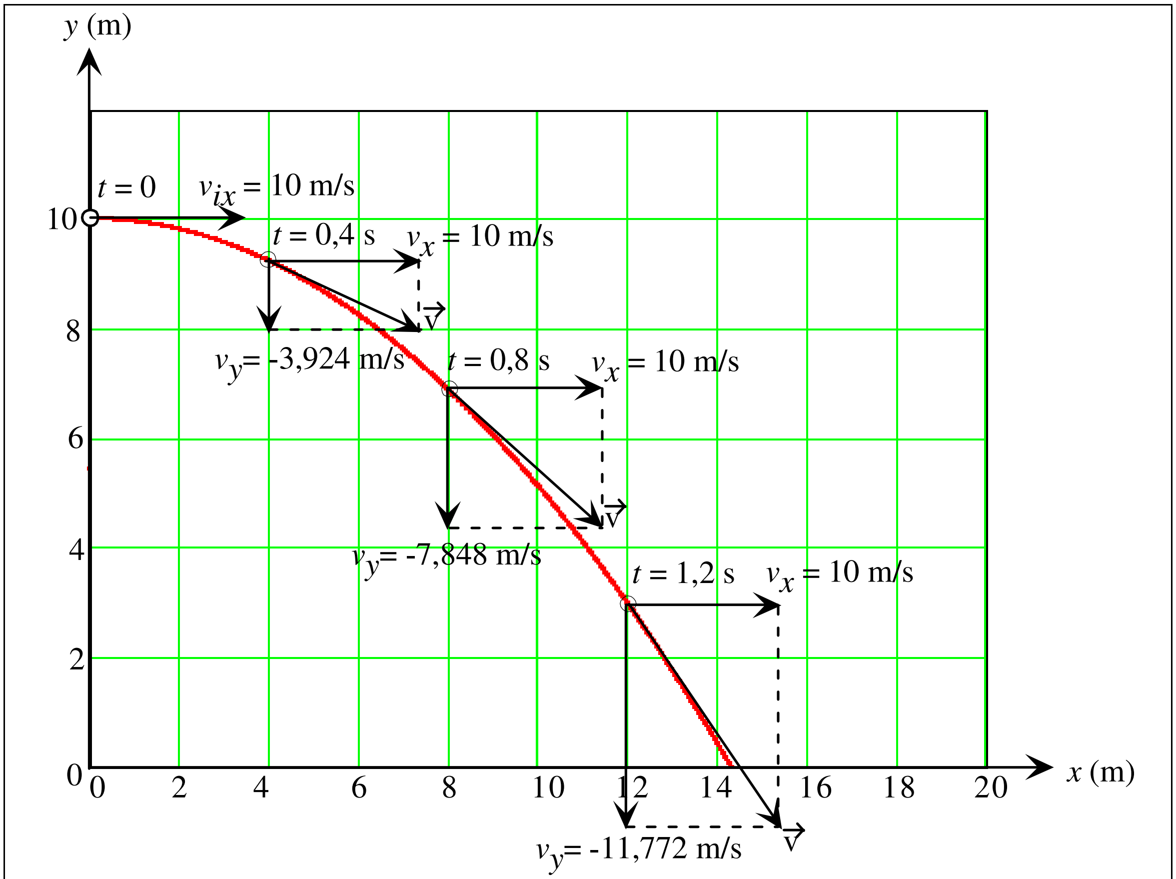
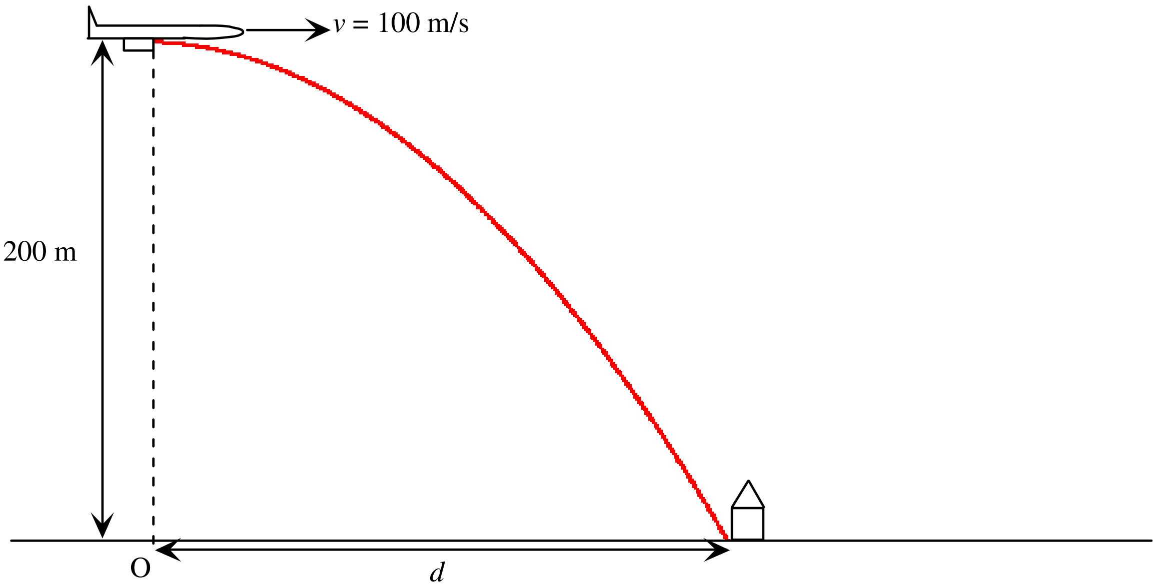


Figure 5.10 : Projectile en lancement horizontal.

Dans l'exemple de la figure ci-dessus, un projectile est lancé horizontalement avec une vitesse initiale de 10 m/s. On peut voir sa position (x, y) à des intervalles de 0,4 s. La vitesse en « x » est constante, alors la position en « x » change de façon uniforme (Δx = 4 m pour chaque intervalle de temps de 0,4 s). La grandeur de la vitesse en « y », par contre, augmente avec le temps (a_y est de même signe que v_y). La position en « y » ne change pas de façon uniforme.

Temps t	Position x	Position y	Vitesse v_x	Vitesse v_y
0 s	0 m	10 m	10 m/s	0 m/s
0,4 s	4 m	9,215 m	10 m/s	-3,924 m/s
0,8 s	8 m	6,861 m	10 m/s	-7,848 m/s
1,2 s	12 m	2,937 m	10 m/s	-11,772 m/s

Exemple 5.1 :



Un avion lâche un paquet de nourriture vers un village du Soudan. Évaluez la distance *d* (à partir de laquelle l'avion doit lâcher le paquet), ainsi que le temps de descente du paquet jusqu'au sol.

Le paquet est lâché avec une vitesse initiale égale à celle de l'avion.
Situation initiale : Nous savons que : v_{ix} = 100 m/s, v_{iy} = 0 m/s, y_i = +200 m, x_i = 0 m (nous choisissons la référence au point O) et t_i = 0 s.
Situation finale : $y_f \approx 0$ m (le paquet est sur le point de toucher au sol), $x_f = d$.

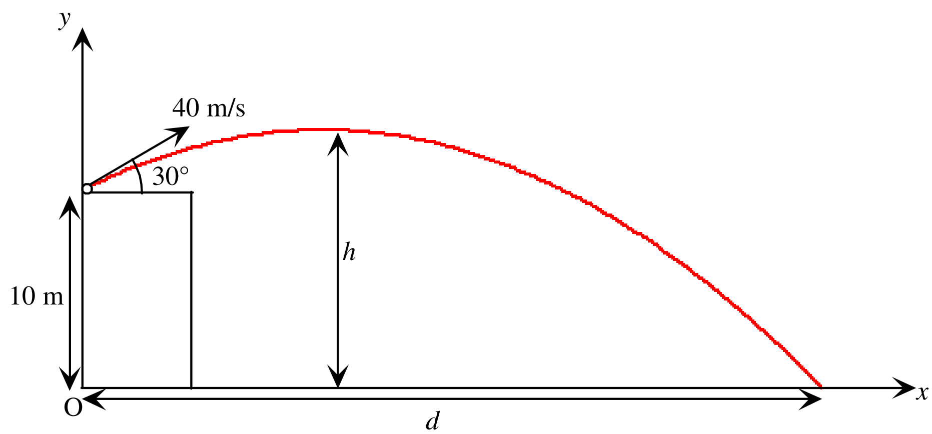
On peut utiliser :

$$y_f = y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2} a_y (t_f - t_i)^2 \quad \text{avec } a_y = -9{,}81 \text{ m/s}^2.$$
$$0 \text{ m} = 200 \text{ m} + 0 \quad + ½\,(-9{,}81 \text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2$$

On résout: $\boldsymbol{t_f}$ **= 6,386 s.**

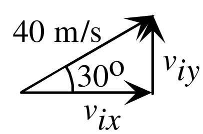
$$x_f = x_i + v_{ix}(t_f - t_i)$$
$$d = 0 \text{ m} + 100 \text{ m/s}(6{,}386 \text{ s} - 0 \text{ s})$$ On résout : ***d* = 639 m**.

Exemple 5.2:



Une balle de golf est frappée sur un tertre de départ surélevé. Sa vitesse, lorsqu'elle quitte le décocheur, est de 40 m/s. a) Quelle sera sa hauteur maximale? b) Quelle sera sa portée « *d* » ? Quelle sera sa vitesse juste avant de toucher le sol?

La vitesse initiale de la balle de golf peut être décomposée en ses composantes :

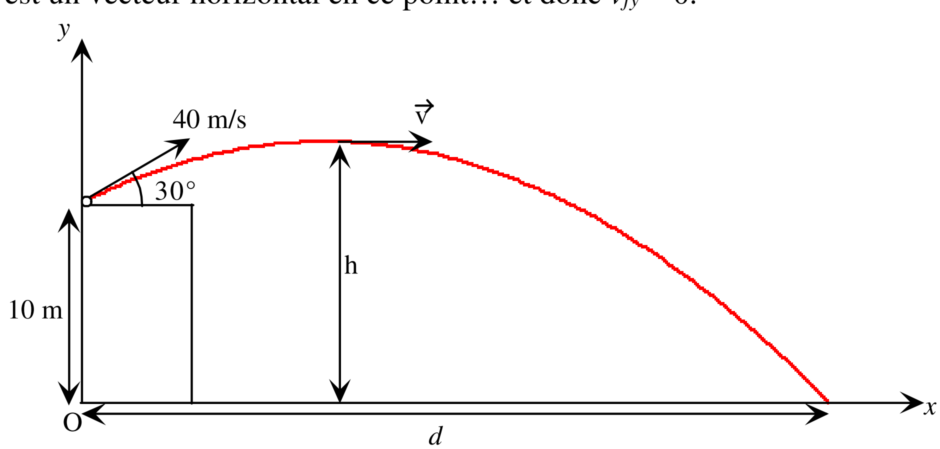


Alors $v_{ix} = 40 \text{ m/s} \cos(30°) = +34{,}64 \text{ m/s}$
$v_{iy} = 40 \text{ m/s} \sin(30°) = +20 \text{ m/s}$

a) Calcul de h :

Nous savons que : $v_{ix} = 34{,}64$ m/s, $v_{iy} = 20$ m/s, $y_i = +10$ m, $x_i = 0$ m (nous choisissons la référence au point O) et $t_i = 0$ s.

Situation finale : $y_f = h$. Comme la vitesse est tangente à la trajectoire, la vitesse est un vecteur horizontal en ce point… et donc $v_{fy} = 0$.



On peut utiliser

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y(y_f - y_i)$$

$$0 = (20\text{ m/s})^2 + 2(-9{,}81\text{ m/s}^2)(h - 10\text{ m})$$

On résout: $\boldsymbol{h}$ **= 30,39 m**. (La balle de golf monte jusqu'à 20,39 m au-dessus du tertre de départ).

b) Calcul de d:

Nous savons que : v_{ix} = 34,64 m/s, v_{iy} = 20 m/s, y_i = +10 m, x_i = 0 m (nous choisissons la référence au point O) et t_i = 0 s.
Situation finale $y_f \approx 0$ m(la balle est sur le point de toucher au sol), $x_f = d$.

Il peut être pratique de combiner les équations en « x » et les équations en « y » pour calculer d.

$$y_f = y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_y(t_f - t_i)^2$$

$$0\text{ m} = 10\text{ m} + 20\text{ m/s}(t_f - 0) + ½(-9{,}81\text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2$$

$$x_f = x_i + v_{ix}(t_f - t_i)$$

$$d = 0\text{ m} + 34{,}64\text{ m/s}(t_f - 0)$$

On résout: $\boldsymbol{d}$ **= 156,8 m (*assez médiocre comme « drive »!*)** et t = 4,53 s.

c) Calcul de la vitesse de la balle tout juste avant de toucher le sol :

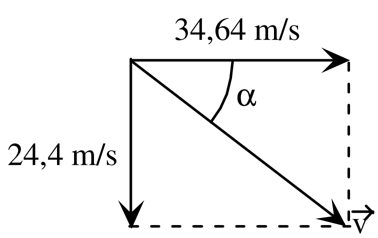
Situation finale $y_f \approx 0$ (la balle est sur le point de toucher au sol).

On peut utiliser :

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y(y_f - y_i)$$

$$v_{fy}^2 = (20\text{ m/s})^2 + 2(-9{,}81\text{ m/s}^2)(0-10\text{ m})$$

On résout : $\boldsymbol{v_{fy}}$ **= 24,4 m/s ou -24,4 m/s**. La solution positive indique une vitesse vers les y+, et la solution négative indique une vitesse vers les y-.Visiblement la solution est $\boldsymbol{v_{fy}}$ **= -24,4 m/s**.
D'autre part la vitesse en « x » est constante : $v_{fx} = v_{ix}$ donc $\boldsymbol{v_{fx}}$ **= +34,64 m/s.**

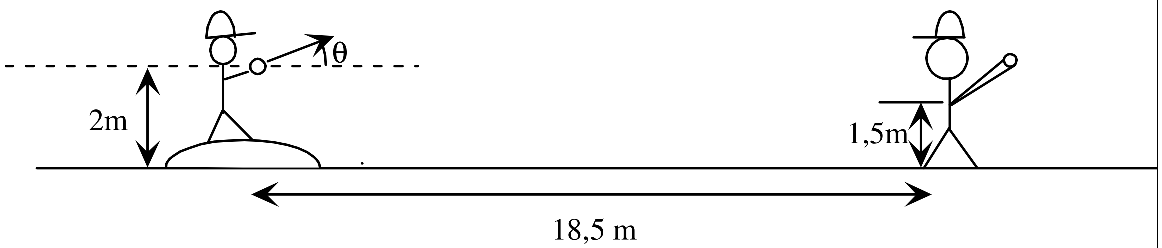


$$v = \sqrt{(24{,}4\text{ m/s})^2 + (34{,}64\text{ m/s})^2} = 42{,}37\text{ m/s}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{24{,}4}{34{,}64}\right) = 35{,}2°$$

Réponse : $\vec{v}$ = 42,37 m/s à 35,2° sous l'horizontale

Exemple 5.3 :



Un lanceur décide d'envoyer une rapide à une vitesse de 150 km/h à un frappeur. Avec quel angle θ la balle doit-elle être lancée, si le lanceur veut atteindre le haut de la zone des prises (à 1,5 m au-dessus du sol)?

Situation initiale :

Vitesse initiale : v_i = 150 km/h × 1000 m/1 km × 1 h/3600 s = 41,67 m/s
v_{ix} = 41,67 m/s cos(θ)
v_{iy} = 41,67 m/s sin(θ).
Position initiale : x_i = 0 m et y_i = + 2 m.

Situation finale : x_f = 18,5 m
y_f = 1,5 m

On peut utiliser, encore cette fois, les 2 équations :

$$y_f = y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2} a_y (t_f - t_i)^2$$

$$1{,}5\text{ m} = 2\text{ m} + 41{,}67\text{ m/s} \sin(\theta)\,(t_f - 0) + \tfrac{1}{2}(-9{,}81\text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2$$

$$x_f = x_i + v_{ix}(t_f - t_i)$$

$$18{,}5\text{ m} = 0\text{ m} + 41{,}67\text{m/s} \cos(\theta)(t_f - 0)$$

Les 2 inconnues sont, cette fois, t_f et θ.

Si on résout les 2 équations, on trouve : t_f = 0,45 s (on remarque que le temps de réaction du frappeur doit être assez court!) et $\boldsymbol{\theta}$ **= 1,45°.**

Remarque : Nous avons négligé l'action de l'air sur tous nos projectiles, ce qui est normal dans un cours d'introduction à la physique. Il faut souligner, cependant, que l'air peut avoir des effets qui doivent être considérés si on veut modéliser complètement le comportement de ces objets. Pour beaucoup d'entre eux, l'air agit principalement comme une « résistance », mais par contre l'air peut aider à « porter », plus loin que prévu, une balle de golf bien frappée.

Problèmes du chapitre 5:

Projectiles : lancement horizontal

Note : <u>on néglige la résistance de l'air.</u>

1. On tire une balle de fusil horizontalement avec une vitesse de 760 m/s. Le fusil est situé à 1,0 mètre au-dessus du sol. En même temps, on laisse tomber une autre balle d'une hauteur de 1,0 mètre.

   a) Quelle balle va frapper le sol la première ?
   b) À quelle distance du point de départ la balle tirée va-t-elle toucher le sol ?

2. Une balle roule sur le toit plat d'une maison et vient frapper le sol, situé à 12 m plus bas, à une distance de 3 m. Calculez la vitesse de la balle au moment où elle quitte le toit.

3. Du sommet d'une colline, on frappe une balle de golf horizontalement. Sa vitesse initiale est de 90 m/s.

   a) Quelle sera la distance verticale parcourue par la balle dans sa chute, après 1, 2 et 3 secondes ?
   b) Quelle sera la distance horizontale parcourue par la balle à ces mêmes instants?

4. Le conducteur d'une automobile animée d'une vitesse constante de 50 km/h laisse tomber une boîte. Si la boîte se trouve à 2 mètres au-dessus du sol au moment où elle est lâchée, quelle distance horizontale parcourra-t-elle avant de frapper le sol ?

Projectiles : lancement avec angle

Note: <u>on néglige la résistance de l'air</u>.

5. Un bombardier, en cours de descente en piqué à 53° par rapport à la verticale, laisse tomber une bombe à une altitude de 730 mètres. La bombe explose 5,0 secondes plus tard.

   a) Quelle était la vitesse du bombardier au moment où il a largué la bombe ?
   b) Quelle est la distance horizontale parcourue par la bombe ?

c) Quelles étaient les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la bombe juste avant de toucher le sol ?

6. Lors d'un botté de dégagement, on a calculé que le ballon avait une vitesse de 20 m/s et un angle d'élévation de 45°. Un joueur adverse, posté sur la ligne des buts à 50 mètres du botteur, part à ce même moment pour attraper le ballon.

   Quelle doit être sa vitesse minimale s'il veut réaliser un attrapé ? (Considérez que sa vitesse de course est constante.)

7. Un joueur frappe la balle dans la direction du champ gauche. La clôture est à 105 mètres du centre et haute de 8 mètres. Si la balle est frappée à 1 mètre du sol et qu'elle part à une vitesse de 35 m/s à un angle de 45°, y aura-t-il un circuit ?

8. On tire un boulet de canon à une vitesse de 400 m/s, avec un angle de 37° avec l'horizontale, sur un terrain plan horizontal.

a) Calculez les composantes x et y de la vitesse à l'instant $t_i = 0$ seconde;
b) À quelle distance du point de départ le boulet va-t-il frapper le sol ?
c) Quelle est la valeur de la vitesse à $t = 10$ secondes ? Et à $t = 40$ secondes ?
d) Déterminez le temps de vol du boulet.

9. On lance un boulet avec une vitesse de 250 m/s du haut d'un édifice, selon un angle de 45° par rapport à l'horizontale (Origine sur toit)

b) Où sera le boulet après 45 secondes ?
b) Quelle sera sa vitesse après 45 secondes ?

Réponses :

1. **a) Les deux balles touchent le sol en même temps. Expliquez pourquoi.**
   b) $x = 343{,}16$ m

2. **$v_i = 1{,}92$ m/s**

3. **a) 4,905 m, 19,62 m, 44,14 m**
   b) 90 m, 180 m, 270 m

4. **$x = 8{,}87$ m**

5. **a) $v_i = 201{,}85$ m/s**
   b) $x = 806{,}01$ m
   c) $v_x = +161{,}2$ m/s, $v_y = -170{,}52$ m/s

6. $v_{\text{joueur}} = 3{,}2$ **m/s**

7. Oui

8. **a)** $v_{ix} = 319{,}45$ **m/s,** $v_{iy} = 240{,}73$ **m/s**
b) $x = 15678{,}07$ **m**
c) à $t = 10$ **s :** $v_x = +319{,}45$ **m/s,** $v_y = +142{,}63$ **m/s**
à $t = 40$ **s :** $v_x = +319{,}45$ **m/s,** $v_y = -151{,}67$ **m/s**
d) $t_{\text{vol}} = 49{,}08$ **s**

9. **a)** $x = 7954{,}85$ **m,** $y = -1977{,}67$ **m**
b) $v_x = 176{,}78$ **m/s,** $v_y = -264{,}67$ **m/s**