PHY-144 : Introduction à la physique du génie

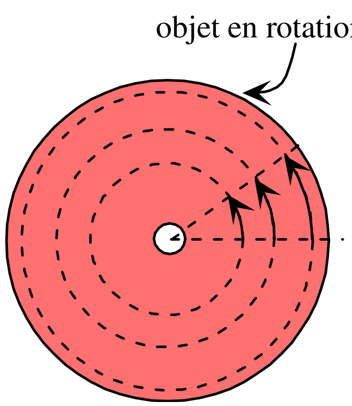
Chapitre 6 : Cinématique de rotation et mouvement circulaire.

6.1 Introduction

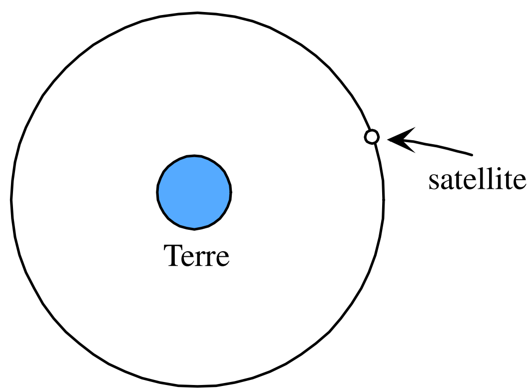
La rotation est un mouvement qui nous est familier. Les exemples d'un tel mouvement sont nombreux: on peut penser à la mèche d'une perceuse, aux engrenages d'un mécanisme de montre, à un disque compact (ou vinyle) ou à notre bonne vieille planète Terre autour de son axe…

Chaque point d'un objet en rotation décrit une trajectoire circulaire (figure 6.1a). Il est donc naturel d'étudier la rotation et le mouvement circulaire dans le même chapitre.

S'il y a toujours des mouvements circulaires dans une rotation, on peut très bien discuter, tout bonnement, de la trajectoire circulaire du centre de masse d'un objet, sans mentionner s'il y a, ou non, rotation de l'objet. Un satellite géostationnaire, par exemple effectue une trajectoire circulaire (figure 6.1b).



a) Rotation : chaque point de l'objet décrit un mouvement circulaire.



b) Trajectoire circulaire d'un satellite géostationnaire.

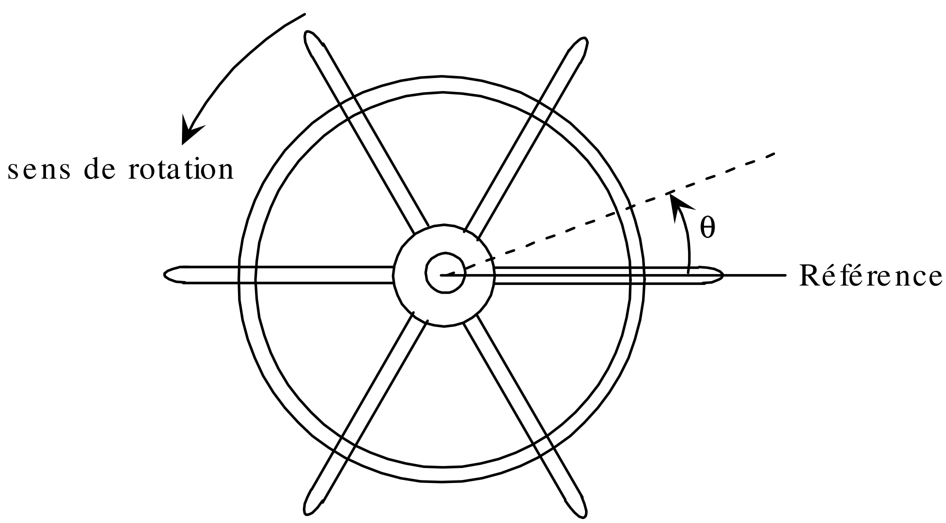
Figure 6.1 Exemples de trajectoires circulaires.

Enfin un objet peut très bien être *à la fois* en translation et en rotation. C'est le cas, par exemple, pour une roue d'automobile, qui translate avec l'automobile ET tourne autour de l'essieu. Ce type de mouvement (même s'il est très intéressant!) dépasse un peu le cadre d'un cours d'introduction.

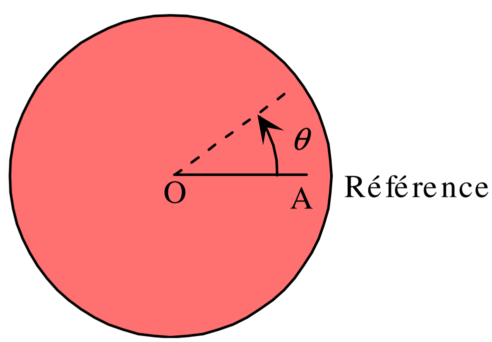
6.2 Mouvement circulaire : paramètres angulaires

6.2.1 Angle (radians, degrés, tours, révolutions)

Si nous observons un objet en rotation, nous pouvons toujours dire qu'il ya un mouvement angulaire, c'est-à-dire qu'un angle (mesuré par rapport à une référence) change lorsque le temps s'écoule. Pour le disque compact, ou pour la roue de bateau (figure 6.2), un angle θ a changé pendant un temps donné.



Roue de bateau : chaque bras a bougé d'un angle θ en un temps de 1 s.



Disque compact : la ligne imaginaire OA a bougé d'un angle θ en un temps de 0,001 s.

Figure 6.2 : Exemples de mouvements angulaires.

Pour mesurer les angles, nous pouvons utiliser des **degrés** (avec lesquels nous sommes déjà familiers) ou des **radians** (symbole: rad).

Qu'est-ce qu'un radian ?

Un radian est l'angle pour lequel l'arc de cercle sous-tendu par l'angle est égal au rayon du cercle.

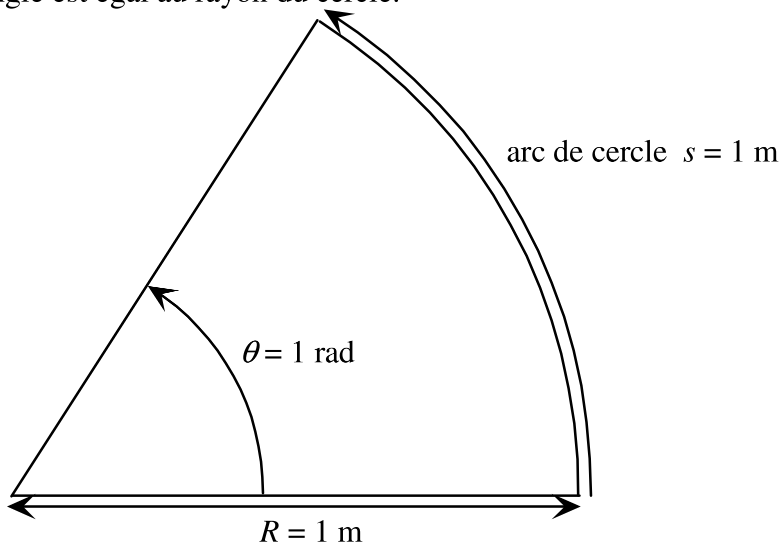


Figure 6.3 : Définition du radian.

Dans cet exemple, si θ = 1 rad et R = 1 m, s = 1 m. Si θ = 2 rad et R = 1 m, s = 2 m, etc. La relation entre s, R et θ est :

$$\boxed{s = R\,\theta}$$

où l'angle θ est en **radians**.

On remarque que les radians n'ont aucune influence sur le calcul des unités :

$$1\text{m} \times 1 \text{ rad} = 1 \text{ m}.$$

Comme on le sait, la circonférence d'un cercle est égale à $2\pi R$. Pour un tour complet, donc, l'arc de cercle $s = 2\pi R$. Et comme $s = R\theta$, l'angle, en radians, correspondant à un tour complet est $\theta = 2\pi$.

La correspondance est donc : **1 révolution (1 tour) = 2π rad = 360°.**

Si on veut transformer des degrés en radians, il suffit, comme d'habitude, de multiplier par « 1 ».

Exemple 6.1:

convertir 30° en radians :

$30° \times 2\pi$ rad/360° = $\pi/6$ rad.

convertir 1 rad en degrés :

1 rad $\times$ 360°/2π rad = 57,3°.

6.2.2 Vitesse angulaire

Comme nous l'avons dit, si un corps est en rotation, l'angle θ va changer avec le temps. Change-t-il beaucoup ou peu pendant un temps donné? Voilà l'information qui est donnée par la **vitesse angulaire**.

La **vitesse angulaire ω** est le taux de variation de l'**angle** par rapport au temps.

Par exemple, suivons la ligne OA sur l'objet en rotation de la figure 6.4. Au temps t_1, elle a tourné d'un angle θ_1; au temps t_2, elle a tourné d'un angle θ_2.

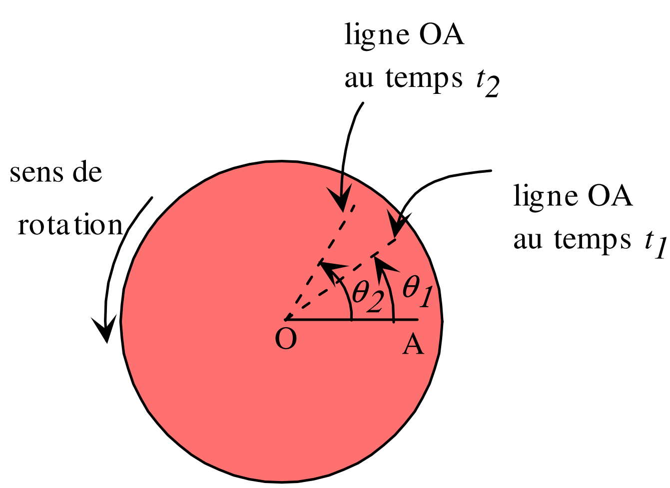


Figure 6.4: L'angle θ change avec le temps.

Dans le cas du mouvement rectiligne, en translation (chapitre 4), nous avions défini une vitesse moyenne et une vitesse instantanée. Nous pouvons faire la même chose ici :

vitesse angulaire moyenne : $\omega_{moy} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Cette vitesse angulaire moyenne est d'utilité limitée, comme c'était le cas en translation. Il est plus intéressant de connaître la vitesse angulaire (tout court) à chaque instant. Pour y arriver, il suffit de diminuer le plus possible l'intervalle de temps Δt. Alors nous obtenons l'expression suivante:

vitesse angulaire:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}}$$

Les unités « standard » de la vitesse angulaire sont des **rad/s**, mais on peut choisir d'autres unités : par exemple, des **tours/min** ou des révolutions par minutes (**rpm**).

Exemple 6.2 : Un moteur d'automobile tourne à 3000 rpm. Calculez sa vitesse angulaire en rad/s.

$$\omega = 3000\,\frac{\text{révolutions}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{révolution}} \times \frac{1\text{min}}{60\ \text{s}} = 314{,}16\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Note : ce qui tourne à cette vitesse angulaire, c'est le vilebrequin, pièce actionnée par les pistons.

Exemple 6.3 : Calculez la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur son axe, en rad/s.

On sait que la Terre fait un tour complet en 1 jour :

$$\omega = \frac{1\ \text{tour}}{1\ \text{jour}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{tour}} \times \frac{1\ \text{jour}}{24\ \text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 7{,}27 \times 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

6.2.3 Accélération angulaire

Lorsqu'un corps est en rotation, sa vitesse angulaire n'est pas nécessairement constante. La vitesse angulaire d'un vieux tourne-disque « 45 tours » est nulle lorsque celui-ci est au repos, et il s'écoule un certain temps, après l'allumage, avant qu'il n'atteigne sa vitesse angulaire nominale de 45 tours/min. Sa vitesse angulaire a *augmenté*. Il est donc tout naturel de définir une **accélération angulaire.**

L '**accélération angulaire** $\boldsymbol{\alpha}$ est le taux de variation de la vitesse angulaire par rapport au temps.

Dans le cas du mouvement rectiligne, en translation (chapitre 4), nous avions défini une accélération moyenne et une accélération instantanée. Nous pouvons faire la même chose ici :

accélération angulaire moyenne : $\alpha_{moy} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

où ω_2 est la vitesse angulaire au temps t_2, et ω_1 la vitesse angulaire au temps t_1.

Les unités de l'accélération angulaire sont des (rad/s)/s : des **rad/s²**.

Exemple 6.4 : La vitesse angulaire d'un vieux tourne-disque atteint la vitesse angulaire de 45 tours/min en 5 s, à partir du repos. Quelle est l'accélération angulaire moyenne du tourne-disque?

Calculons d'abord la vitesse angulaire au temps t_2 = 5 s :

$$\omega_2 = 45\frac{\text{tours}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ tour}} \times \frac{1\text{min}}{60 \text{ s}} = 4{,}71 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha_{moy} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{4{,}71 \text{ rad/s} - 0}{5 \text{ s} - 0\text{s}} = 0{,}942 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Encore ici, il est plus intéressant de connaître l'accélération angulaire à chaque instant. Pour y arriver, il faut diminuer le plus possible l'intervalle de temps Δt. Alors nous obtenons l'expression suivante;

accélération angulaire:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}}$$

$\Delta\omega$ est la variation de la vitesse angulaire. Comme celle-ci peut augmenter, diminuer, ou demeurer constante, $\Delta\omega$ peut être positive, négative ou nulle. Alors l'accélération angulaire peut être négative, positive ou nulle.

Résumé : **le signe de l'accélération angulaire.**

α est +	La vitesse angulaire ω augmente.
α est -	La vitesse angulaire ω diminue.
α = 0	La vitesse angulaire ω est maximale, ou minimale, ou constante.

6.3 Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)

Nous avons maintenant des relations entre l'angle θ, la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire α. Comparons ces relations à celles que nous avions dans le cas du mouvement rectiligne.

Mouvement rectiligne :	Mouvement circulaire, paramètres angulaires :
$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$
$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$

Il y a une similitude frappante entre ces relations. Visiblement, dans le cas du mouvement circulaire, la vitesse angulaire ω tient le rôle de la vitesse et l'accélération angulaire α tient le rôle de l'accélération.

Lorsqu'un objet est en rotation et que l'**accélération angulaire α est constante,** les points de cet objet bougent selon un **mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)**.

Les relations entre θ, ω et α sont identiques à celles qui existent entre x, v et a. Si nous supposons maintenant une **accélération angulaire α constante**, les relations que nous obtiendrons devraient être identiques à celles que nous avions obtenues avec le mouvement rectiligne, lorsque l'accélération a était constante. Après tout, seul le nom des variables a changé … Il suffit de répéter les mêmes résultats, où θ remplace x, ω remplace v et α remplace a.

Résumé : Mouvement circulaire, α constante.

$$\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$$
$$\theta_f = \theta_i + \omega_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}\alpha(t_f - t_i)^2$$
$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Voyons maintenant quelques exemples d'utilisations de ces équations.

Exemple 6.5 :

Un lecteur de disque, initialement au repos, est actionné par un moteur qui lui procure une accélération angulaire constante de 150 rad/s^2.

a) Quel est le temps requis pour atteindre la vitesse nominale d'opération (3600 rpm)?

b) Combien de tours le lecteur de disque effectue-t-il pendant ce temps?

Nous savons que α = 150 rad/s^2. Comme le lecteur est initialement au repos, ω_i = 0 rad/s. Nous pouvons aussi poser $t_i = 0$ et $\theta_i = 0$. La vitesse angulaire finale est

$$\omega_f = \frac{3600\ \text{r}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{r}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 377\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

a) Nous pouvons utiliser $\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$

$$377\ \text{rad/s} = 0 + 150\ \text{rad/s}^2\,(t_f - 0)$$

On résout : $\boldsymbol{t_f}$ **= 2,51 s**

b) Nous pouvons utiliser $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$

$$(377\ \text{rad/s})^2 = 0 + 2(150\ \text{rad/s}^2)(\theta_f - 0)$$

On résout : θ_f = 473,76 rad

$$\theta_f = 473{,}76\ \text{rad} \times \frac{1\ \text{tour}}{2\pi\ \text{rad}} = \mathbf{75{,}4\ tours}$$

Exemple 6.6 :

L'hélice d'un petit avion de plaisance, qui vient d'atterrir, tourne à 1000 rpm. On arrête alors le moteur, et l'hélice tourne encore pendant 10 s avant de s'arrêter. Si on suppose que l'accélération angulaire de l'hélice était constante, combien de tours l'hélice a-t-elle accomplis avant de s'arrêter?

Nous savons que ω_f = 0 rad/s (l'hélice s'arrête) et que t_f = 10 s. Nous pouvons poser $t_i = 0$ et $\theta_i = 0$. Le nombre de tours accomplis par l'hélice est l'angle final θ_f.

La vitesse angulaire initiale est $\omega_i = \dfrac{1000\ \text{r}}{\text{min}} \times \dfrac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{r}} \times \dfrac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 104{,}7\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

(suite de l'exemple 6.6)

Calculons d'abord l'accélération angulaire α :
Nous pouvons utiliser $\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$

$$0 = 104{,}7 \text{ rad/s} + \alpha\ (10 \text{ s} - 0)$$

On résout : $\alpha = -10{,}47$ rad/s^2.
(L'accélération angulaire est négative, puisque la vitesse angulaire de l'hélice diminue avec le temps).

Nous pouvons maintenant calculer l'angle final θ_f :

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}\alpha(t_f - t_i)^2$$
$$= 0 + 104, \text{ rad/s } (10 \text{ s} - 0) + \tfrac{1}{2}(-10{,}47 \text{ rad/s}^2)(10 \text{ s} - 0)^2$$
$$= 523{,}5 \text{ rad.}$$

ou : $\theta_f = 523{,}5 \text{ rad} \times \dfrac{1 \text{ tour}}{2\pi \text{ rad}}$ = **83,3 tours.**

Note : il y a souvent plus d'une façon de résoudre un problème. Pour calculer θ_f, nous aurions également pu utiliser l'équation $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$.

6.4 Mouvement circulaire : paramètres linéaires

6.4.1 Distance parcourue

Comme nous l'avons vu, au cours d'une rotation, il y a un mouvement angulaire, c'est-à-dire qu'un angle (mesuré par rapport à une référence) change lorsque le temps s'écoule. Mais, pendant ce temps, chaque point de l'objet parcourt une **distance** (en mètres) le long d'une trajectoire circulaire.

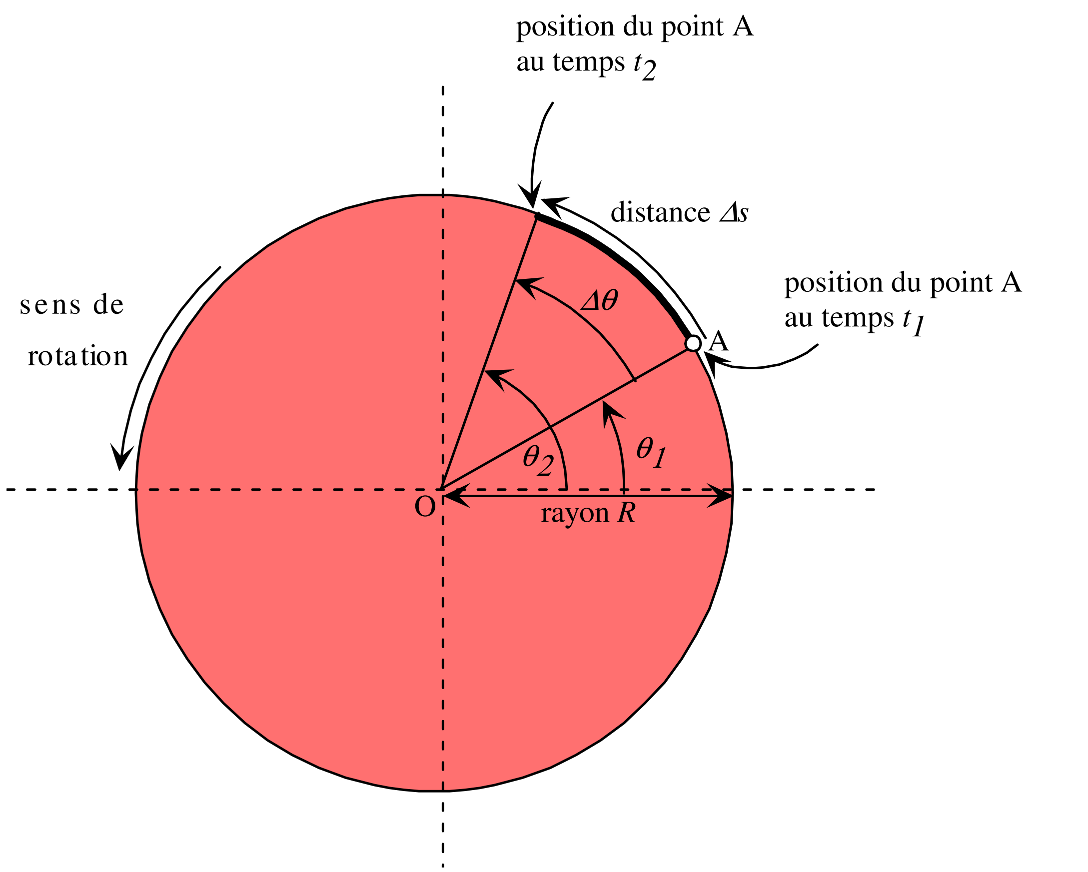


Figure 6.5 : Distance Δs parcourue lors de la rotation.

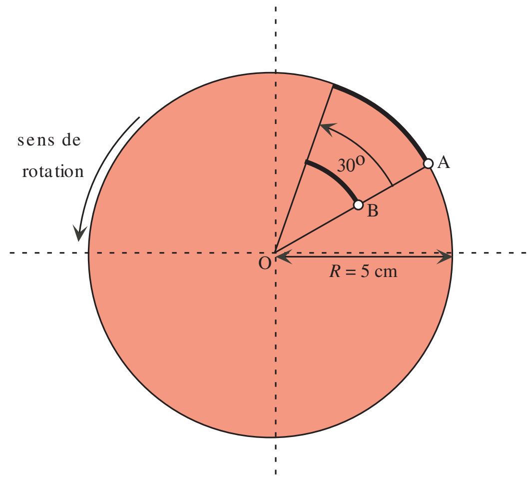
La figure ci-dessus montre un objet en rotation. Si nous suivons un point A sur l'objet, il parcourt une distance (sur un arc de cercle) Δs. Nous avons déjà vu qu'il y avait une relation entre l'arc de cercle et l'angle (en radians):

$$s = R\theta$$

Ici l'angle correspondant à l'arc de cercle Δs est $\Delta\theta$. Alors :

$$\boxed{\Delta s = R\Delta\theta}$$

Exemple 6.7 : Un disque compact, de rayon R = 5 cm, est en rotation. Pendant que ce disque effectue une rotation de 30°, deux petites éraflures (A et B) se déplacent. Quelle distance a parcourue l'éraflure A (située sur le pourtour du disque)? Quelle distance a parcourue l'éraflure B (située à mi-chemin entre le centre et le pourtour)?



L'angle, exprimé en radians, est: $\Delta\theta = 30° \times 2\pi \text{ rad}/ 360° = \pi/6$ rad.

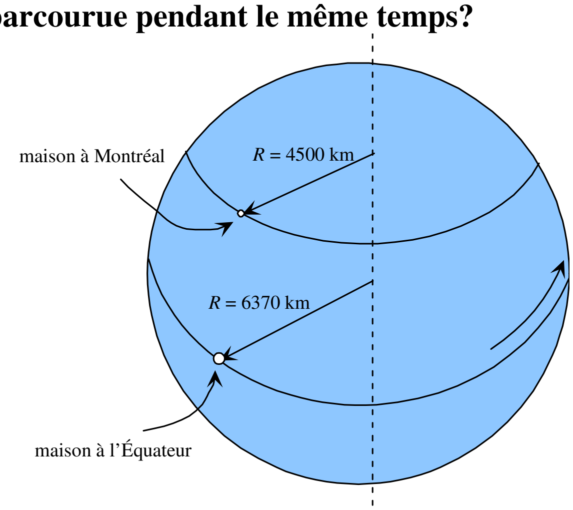
La distance parcourue par l'éraflure A est:

$$\Delta s = R\Delta\theta = 5 \text{ cm } (\pi/6 \text{ rad}) = 2{,}62 \text{ cm}$$

La distance parcourue par l'éraflure B est

$$\Delta s = R\Delta\theta = 2{,}5 \text{ cm } (\pi/6 \text{ rad}) = 1{,}31 \text{ cm}$$

Exemple 6.8 : Quelle distance une maison située à l'Équateur a-t-elle parcourue en 6 heures (le rayon de la Terre est R= 6370 km) ? Quelle distance une maison située à Montréal a-t-elle parcourue pendant le même temps?



(suite de l'exemple 6.8)
En 6 heures, la Terre a tourné d'un quart de tour. Nous savons qu'un tour = 2π rad; par conséquent ¼ tour = ¼ × (2π rad) = π/2 rad.

La distance parcourue par la maison à l'Équateur est

$$\Delta s = R\Delta\theta = 6370 \text{ km } (\pi/2 \text{ rad}) = 10005 \text{ km.}$$

La distance parcourue par la maison à Montréal est

$$\Delta s = R\Delta\theta = 4500 \text{ km } (\pi/2 \text{ rad}) = 7069 \text{ km.}$$

6.4.2 Vitesse

Dans les deux exemples précédents, nous avons pu constater qu'un point, ou un objet, effectuant une trajectoire circulaire parcourt une **certaine distance pendant un certain temps.** Ces points possèdent donc une **vitesse.**

Le mouvement circulaire est très certainement un mouvement curviligne et, comme nous l'avons vu au chapitre 5, la vitesse est un vecteur toujours tangent à la trajectoire.

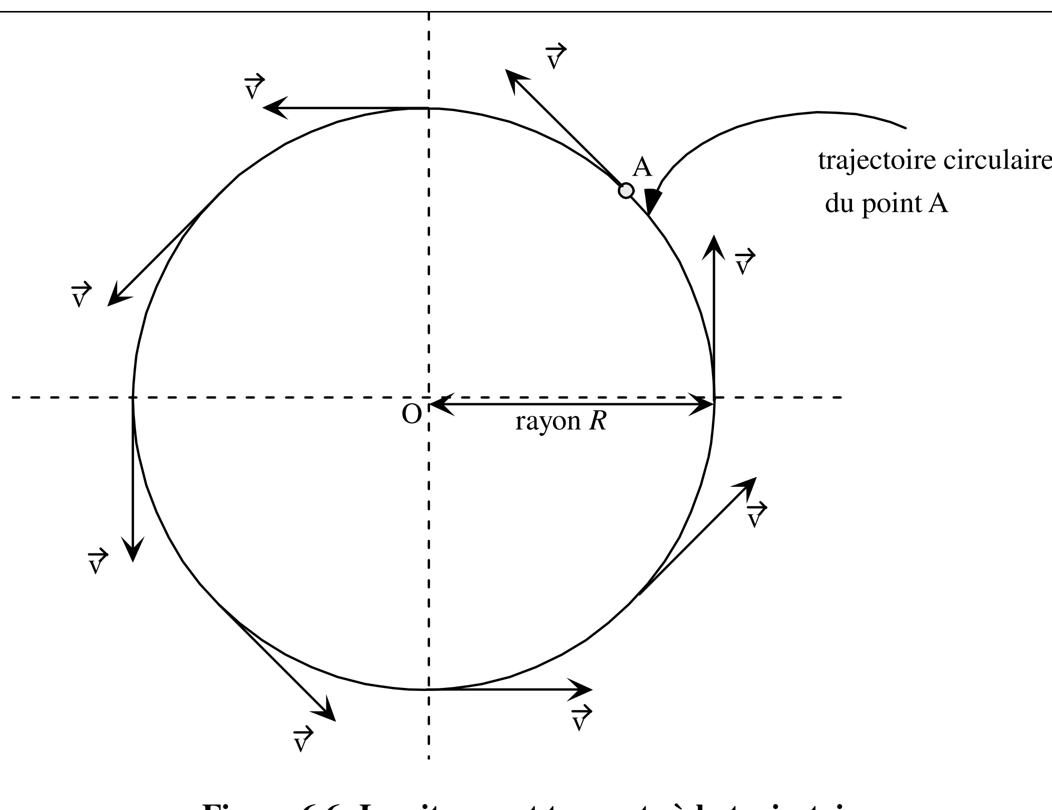


Figure 6.6: La vitesse est tangente à la trajectoire.

Par analogie avec ce que nous avons fait dans le cas du mouvement rectiligne, la grandeur du vecteur vitesse est :

$$\boxed{\boldsymbol{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}}$$

ou encore, puisque $\Delta s = R\Delta\theta$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ **

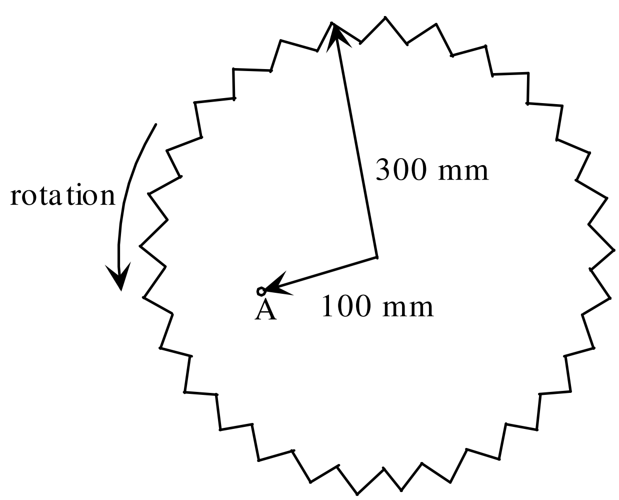
Nous avons vu plus haut (6.2.2) que la *vitesse angulaire* $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$:

Il faut alors conclure que :

$$\boxed{\boldsymbol{v = \omega R}}$$

vitesse (m/s) = vitesse angulaire (rad/s) × rayon (m).

Exemple 6.9 : Une scie radiale tourne à une vitesse angulaire constante de 600 rpm. Calculez la vitesse (en m/s) a) d'une dent et b) du point A sur la scie.



** Note : On remarque qu'on a pu « sortir » *R* de la « limite ». Cela revient à dire ceci : puisque *R* est constant lorsque Δt diminue, on peut très bien, pour calculer le petit arc de cercle *Δs*, calculer *d'abord* le petit angle *Δθ* correspondant et *ensuite* multiplier par *R*.

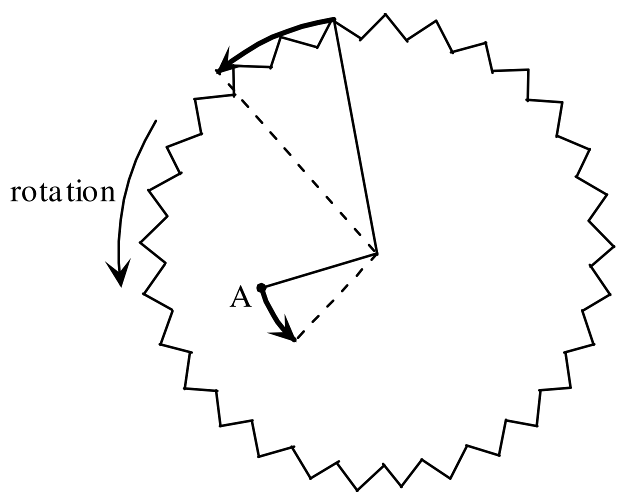
Exemple 6.9 (suite) :

La vitesse angulaire est $\omega = \dfrac{600\text{ r}}{\text{min}} \times \dfrac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ r}} \times \dfrac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 62{,}83\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Le rayon R du cercle parcouru par la dent est : R = 300 mm × 1 m/1000 mm = 0,3 m
Le rayon R du cercle parcouru par le point A est : R = 100 mm × 1 m/1000 mm = 0,1 m

La vitesse d'une dent de la scie est $\boldsymbol{v_{dent}} = \omega R$ = 62,83 rad/s × 0,3 m **= 18,85 m/s.**

La vitesse du point A sur la scie est $\boldsymbol{v_A} = \omega R$ = 62,83 rad/s × 0,1 m **= 6,28 m/s.**



Note : la vitesse angulaire ω est la même pour tous les points de la scie; pendant un même temps, l'angle décrit par tous les points est le même. Pendant un même temps, la distance parcourue par la dent est supérieure à la distance parcourue par le point A : la vitesse de la dent est supérieure à la vitesse du point A ($v_{dent} > v_A$).

6.4.3 Accélération centripète

Lorsque nous avons discuté du mouvement curviligne (chapitre 5), l'**accélération** a été définie comme le taux de variation de la **vitesse** par rapport au temps. Nous avons aussi établi que l'accélération est un **vecteur** qui n'est **pas nécessairement dans le sens du mouvement**.

Dans un mouvement circulaire, la vitesse est un vecteur **dont la direction change** et dont **la grandeur peut possiblement changer**.

Considérons tout d'abord un **mouvement circulaire uniforme**, c'est-à-dire un mouvement circulaire pour lequel la grandeur de la vitesse est une constante. Il est important de réaliser que, dans un mouvement curviligne, *même si la grandeur de la vitesse est constante, la direction de la vitesse change* et il y a une **accélération**.

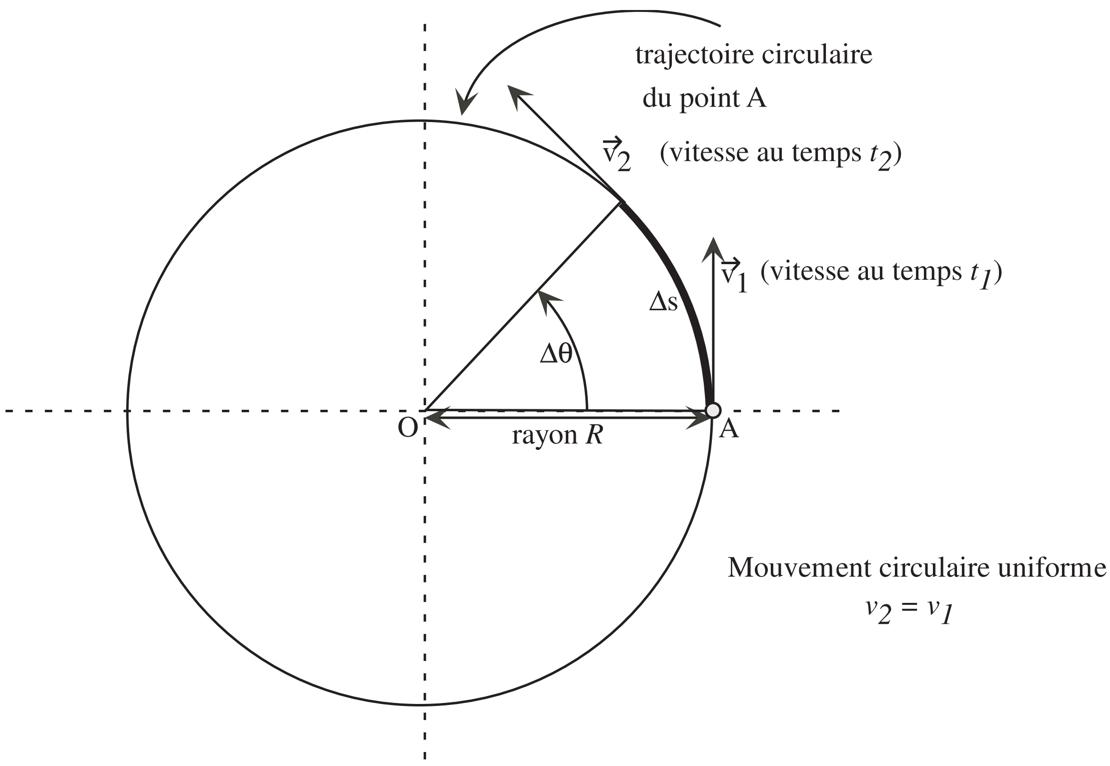


Figure 6.7: Mouvement circulaire uniforme.

On sait (voir chapitre 5) que l'accélération est définie comme : $\mathbf{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta \mathit{t}}}$.

Donc si on veut savoir comment est l'accélération dans un mouvement circulaire uniforme, il faut réduire l'intervalle de temps *Δt*, et observer ce qui arrive à $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

À l'aide de la figure 6.8, on peut conclure que, plus Δt diminue, plus $\Delta\theta$ diminue et plus le vecteur $\Delta\vec{v}$ tend à devenir perpendiculaire à $\vec{v}_1$, c'est-à-dire que $\Delta\vec{v}$ est dirigé vers le centre du cercle.

Le vecteur $\vec{a}$, étant parallèle à $\Delta\vec{v}$, est donc dirigé vers le centre du cercle. Lorsque le **mouvement est circulaire et uniforme**, donc, **l'accélération est dirigée vers le centre du cercle**. Un vecteur dirigé vers le centre du cercle est appelé « centripète »; on parle donc d'une **accélération centripète $\vec{a}_c$.**

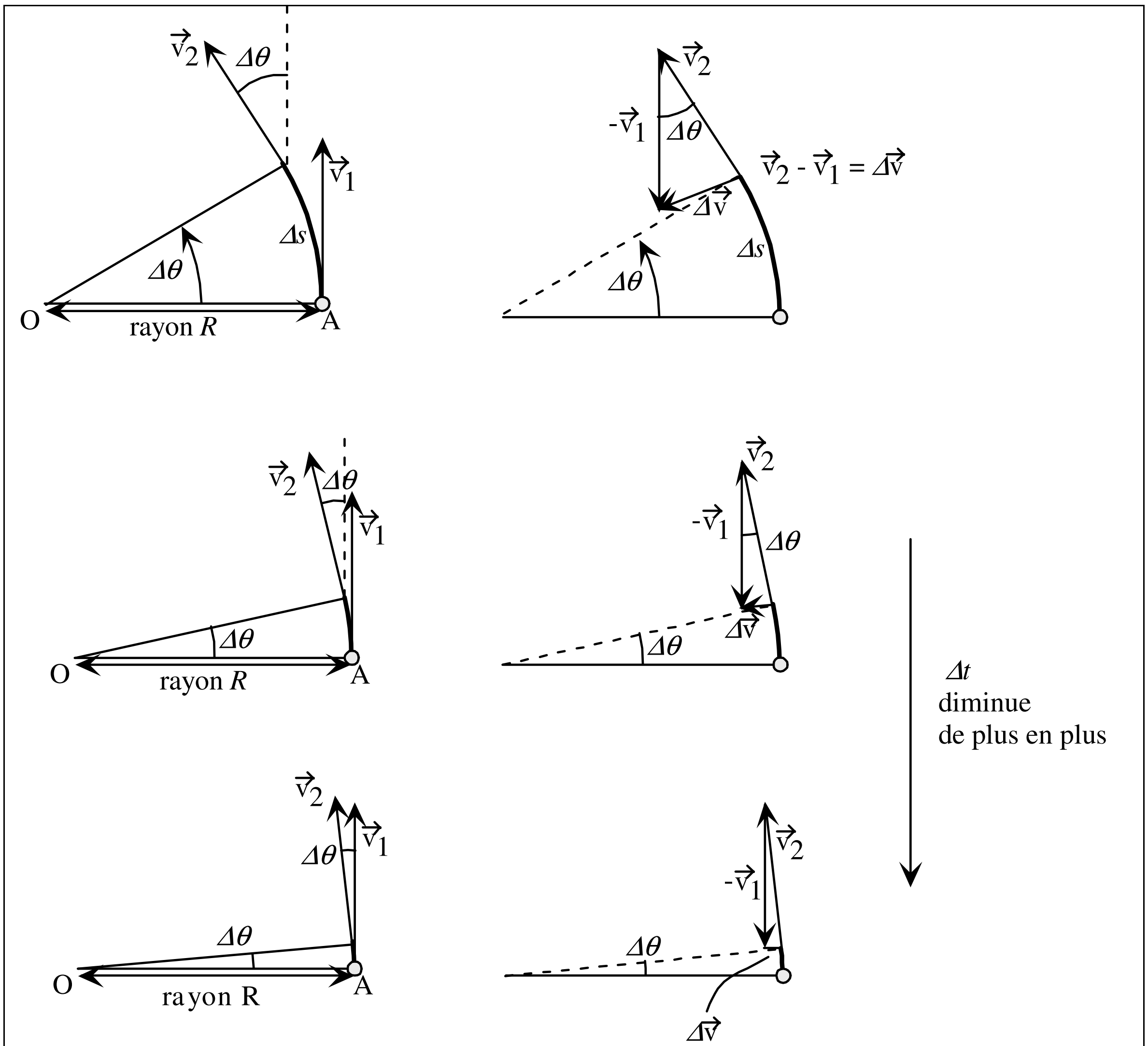
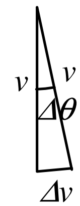


Figure 6.8: Dans un mouvement circulaire uniforme, $\Delta\vec{v}$ tend à être dirigé vers le centre du cercle lorsque Δt tend vers 0.

Si on se concentre sur le triangle formé des vecteurs $\Delta\vec{v}$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1$, et sachant que $v_2 = v_1 = v$ (la grandeur de la vitesse est constante) alors on obtient la figure ci-dessous.



Il s'agit d'un triangle isocèle. Quand $\Delta\theta$ diminue, les angles du bas deviennent ≈ 90°.
Alors on peut dire qu'il s'agit « presque » d'un triangle rectangle et alors: $\tan(\Delta\theta) \approx \frac{\Delta v}{v}$.
D'autre part, lorsque un angle est très petit, et qu'on l'exprime en radians : $\tan(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$.
Bref, $\Delta\theta \approx \frac{\Delta v}{v}$.
Donc, $\Delta v \approx v\Delta\theta$. Si $\Delta\theta$ tend vers 0, on peut carrément dire : $\Delta v = v\Delta\theta$.

Si on désire maintenant exprimer l'accélération « centripète » :

$\vec{a}_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ vers le centre.

En grandeur:

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_c = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_c = v\omega = v(\frac{v}{R})$$

En conclusion : L'accélération dans un mouvement circulaire uniforme est un vecteur centripète (dirigé vers le centre du cercle). La grandeur de l'accélération centripète est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{R}}}$$

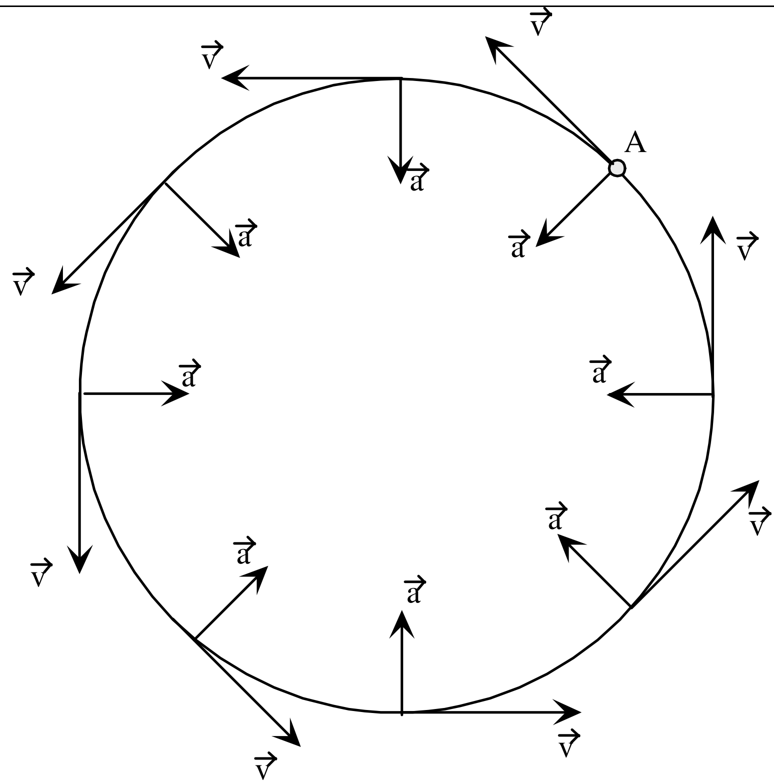
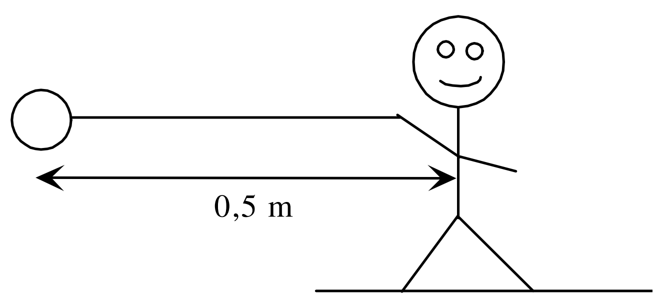


Figure 6.9: Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération $\vec{a}$ est dirigée vers le centre du cercle; l'accélération $\vec{a}$ est « centripète ».

Exemple 6.10: Un petit garçon fait tournoyer une balle au bout d'une corde, sur une trajectoire circulaire de rayon = 0,5 m, à une vitesse constante de 2 m/s. Calculez l'accélération centripète de la balle.



$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\text{ m/s})^2}{0{,}5\text{ m}} = \mathbf{8\ m/s^2.}$$

6.4.4 Accélération tangentielle

Il est possible qu'un mouvement circulaire ne soit **PAS uniforme**; la grandeur de la vitesse peut changer. Pendant un mouvement circulaire non uniforme, le vecteur accélération peut être décomposé en deux composantes :

une **accélération centripète** (responsable du **changement dans la direction** du vecteur vitesse), dirigée vers le centre du cercle.

une **accélération tangentielle** (responsable du **changement dans la grandeur** du vecteur vitesse), dont la direction est tangentielle au cercle.

En effet, si les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas de mêmes grandeurs, nous avons la situation suivante :

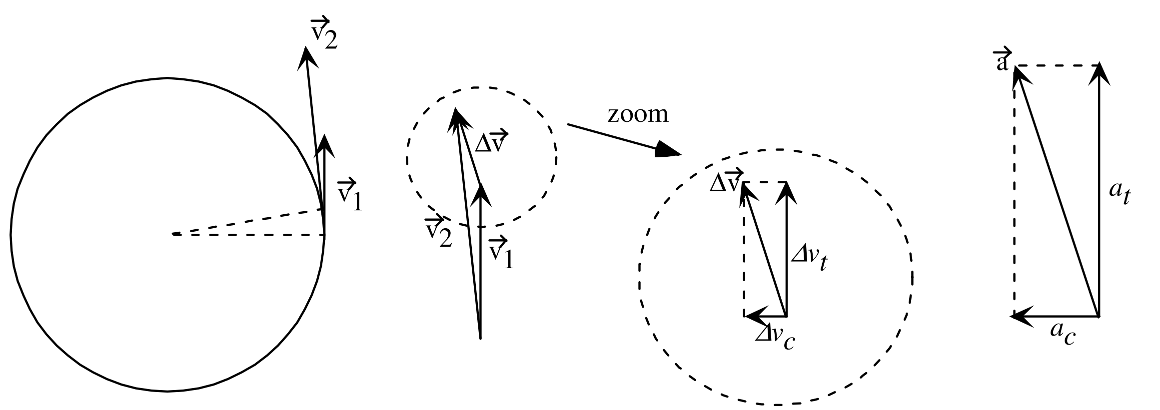


Figure 6.10 : Dans un mouvement circulaire non uniforme, l'accélération a deux composantes : a_c (accélération centripète) et a_t (accélération tangentielle).

On voit que dans ce cas, le vecteur $\Delta\vec{v}$ a 2 composantes : une composante centripète Δv_c et une composante tangentielle Δv_t. Comme le vecteur $\vec{a}$ est parallèle au vecteur $\Delta\vec{v}$, le vecteur $\vec{a}$ a deux composantes : a_c (accélération centripète) et a_t (accélération tangentielle).

On peut identifier chacune des composantes :

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_c}{\Delta t} \qquad a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t}$$

Comme Δv_t est nulle si la grandeur de la vitesse ne change pas, ***Δv_t* est le changement dans la grandeur de la vitesse.** On sait, d'autre part, que la grandeur de la vitesse, dans un mouvement circulaire est $v = \omega R$. Donc $\Delta v_t = \Delta(\omega R)$.

Donc

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_t = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = R\alpha$$

Bref, il y a une relation entre l'accélération angulaire α et l'accélération tangentielle a_t :

$$\boxed{\boldsymbol{a_t = \alpha R}}$$

Enfin, l'accélération tangentielle peut être positive, négative ou nulle.

Résumé : le signe de l'accélération tangentielle.

a_t est +	La grandeur de la vitesse v augmente.
a_t est -	La grandeur de la vitesse v diminue.
$a_t = 0$	La grandeur de la vitesse v est maximale, ou minimale, ou constante.

6.4.5 Accélération

Un objet qui décrit un mouvement circulaire subit donc une accélération, qu'on peut décomposer en deux composantes :

accélération tangentielle : $\boldsymbol{a_t = \alpha R}$ et accélération centripète : $\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{R}}$.

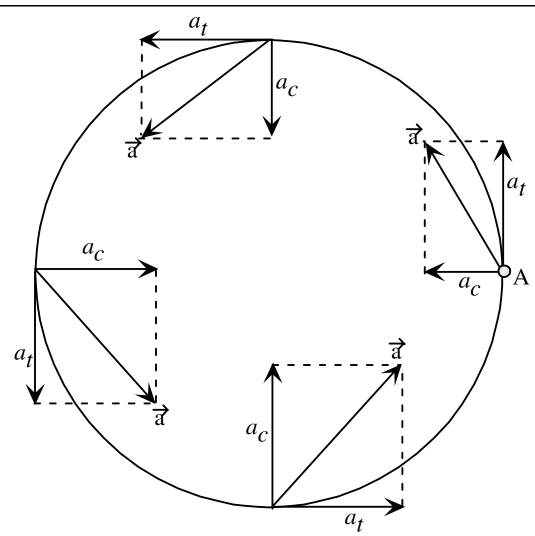


Figure 6.11: Dans un mouvement circulaire, l'accélération a deux composantes.

La grandeur a de l'accélération de l'objet est alors calculée à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\boxed{\boldsymbol{a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}}}$$

6.5 Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA): paramètres linéaires

Nous avons maintenant beaucoup d'outils à notre disposition pour décrire les mouvements circulaires. Résumons les relations que nous avons établies.

Résumé : Mouvement circulaire

Paramètres angulaires :		**Paramètres linéaires :**	
angle (rad)	$\boldsymbol{\theta}$	arc de cercle (m)	$\boldsymbol{s = R\theta}$
vitesse angulaire (rad/s)	$\boldsymbol{\omega}$	vitesse (m/s)	$\boldsymbol{v = \omega R}$
accélération angulaire (rad/s^2)	$\boldsymbol{\alpha}$	accélération tangentielle (m/s^2)	$\boldsymbol{a_t = \alpha R}$
		accélération centripète (m/s^2)	$\boldsymbol{a_c = \dfrac{v^2}{R}}$
		accélération (m/s^2)	$\boldsymbol{a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}}$

Il y a une relation directe entre les paramètres angulaires (θ, ω, α) et les paramètres linéaires (s, v, a_t). Visiblement, en multipliant les premiers par le rayon R du cercle parcouru, on obtient les seconds.

Dans le cas particulier où le mouvement circulaire est uniformément accéléré (α = constante), nous avions déjà obtenu les relations suivantes :

$$\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$$
$$\theta_f = \theta_i + \omega_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}\alpha(t_f - t_i)^2$$
$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Multiplions (pourquoi pas!) les deux premières équations par R et la troisième par R^2 (de chaque côté).

$$\omega_f R = \omega_i R + \alpha R(t_f - t_i)$$
$$R\theta_f = R\theta_i + \omega_i R(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}\alpha R(t_f - t_i)^2$$
$$\omega_f^2 R^2 = \omega_i^2 R^2 + 2\alpha R(R\theta_f - R\theta_i)$$

Ce qui revient à écrire :

$$v_f = v_i + a_t(t_f - t_i)$$
$$s_f = s_i + v_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_t(t_f - t_i)^2$$
$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_t(s_f - s_i)$$

Bref, si le mouvement circulaire est uniformément accéléré, nous pouvons utiliser des relations entre des paramètres angulaires (θ, ω, α), ou encore des relations analogues entre des paramètres linéaires (s, v, a_t).

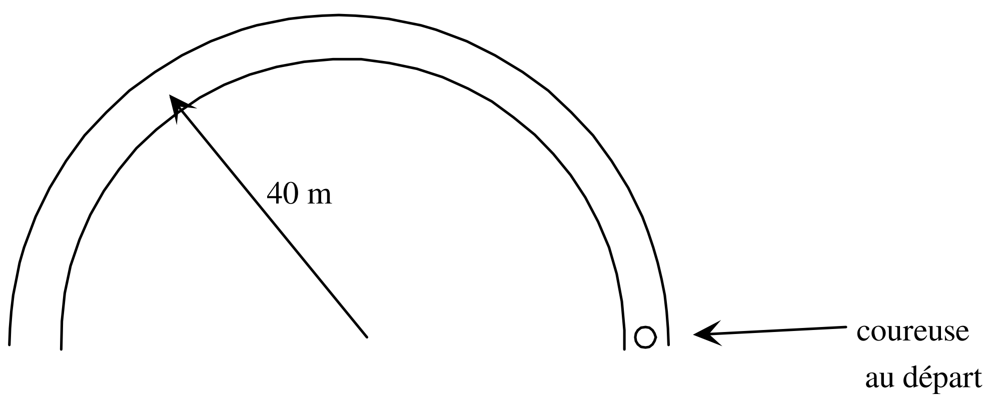
Résumé : Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)

α = constante et a_t = constante

Paramètres angulaires :	**Paramètres linéaires :**
$\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$	$v_f = v_i + a_t(t_f - t_i)$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2}\alpha(t_f - t_i)^2$	$s_f = s_i + v_i(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a_t(t_f - t_i)^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a_t(s_f - s_i)$

Exemple 6.11: Une coureuse de fond augmente sa vitesse (de façon constante) de 0 m/s à 10 m/s en 2 s, sur une piste semi-circulaire de rayon = 40 m.

a) **Quelle est son accélération tangentielle?**
b) **Quelle est son accélération angulaire?**
c) **Où est la coureuse à *t* = 2 s?**
d) **Quelle est la grandeur de son accélération à *t* = 2 s?**



a) L'accélération tangentielle est constante, puisque la grandeur de la vitesse varie de façon constante. Nous savons que v_f = 10 m/s, v_i = 0 m/s et t_f = 2 s. Nous pouvons aussi poser t_i = 0 s. Nous pouvons par conséquent utiliser

$$v_f = v_i + a_t(t_f - t_i).$$

$$10 \text{ m/s} = 0 \text{ m/s} + a_t\,(2 \text{ s} - 0).$$

Si on résout : $\boldsymbol{a_t = +\,5\ \mathrm{m/s^2}}$.

(Suite de l'exemple 6.11)

(a_t est positive lorsque la grandeur de la vitesse augmente par rapport au temps).

b) Il y a une relation directe entre l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire.

$$a_t = \alpha R$$
$$5 \text{ m/s}^2 = \alpha \text{ (40 m)}.$$

Si on résout : $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0{,}125 \text{ rad/s}^2}$.

c) Nous pouvons localiser la coureuse à l'aide de la distance (arc de cercle) parcourue ou à l'aide de l'angle qu'elle a décrit.

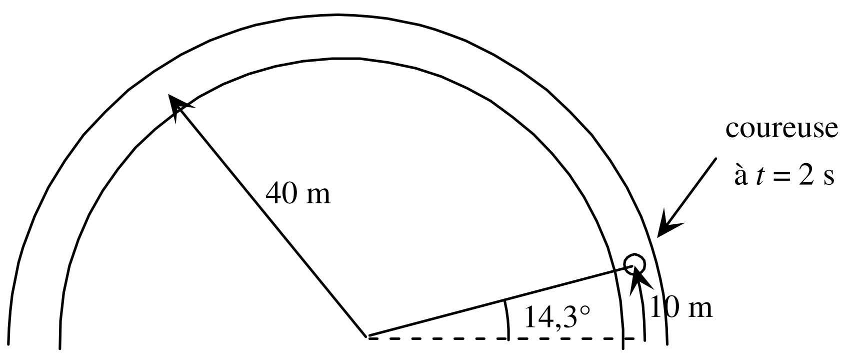
Nous savons que $v_i = 0$ m/s, $t_f = 2$ s et $a_t = +\,5$ m/s^2. Nous pouvons poser $t_i = 0$ s et $s_i = 0$ m. Calculons s_f.

$$s_f = s_i + v_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_t(t_f - t_i)^2$$
$$s_f = 0 \text{ m} + 0 + ½(5 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s} - 0 \text{ s})^2$$
$$\boldsymbol{s_f} = \mathbf{10 \text{ m.}}$$

L'angle correspondant se trouve en utilisant : $s_f = R\theta_f$.

$$10 \text{ m} = (40 \text{ m})\, \theta_f.$$

$\boldsymbol{\theta_f} = \mathbf{0{,}25 \text{ rad} = 14{,}3°.}$



d) L'accélération de la coureuse a deux composantes : l'accélération centripète et l'accélération tangentielle.

Nous savons déjà que $a_t = +\,5$ m/s^2.

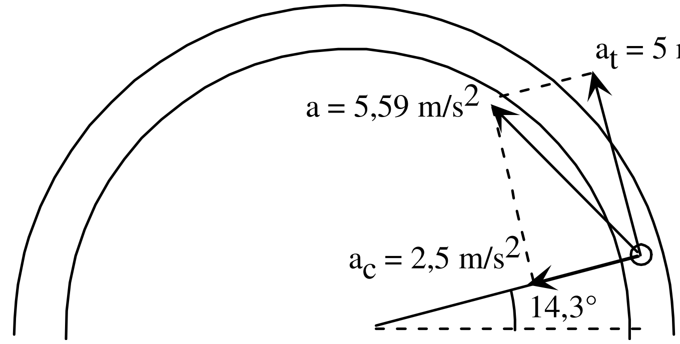
L'accélération centripète est calculée à l'aide de : $a_c = \dfrac{v^2}{R}$.

Donc $a_c = \dfrac{(10 \text{ m/s})^2}{40 \text{ m}}$ $\qquad a_c = 2{,}5$ m/s^2.

(Suite de l'exemple 6.11)

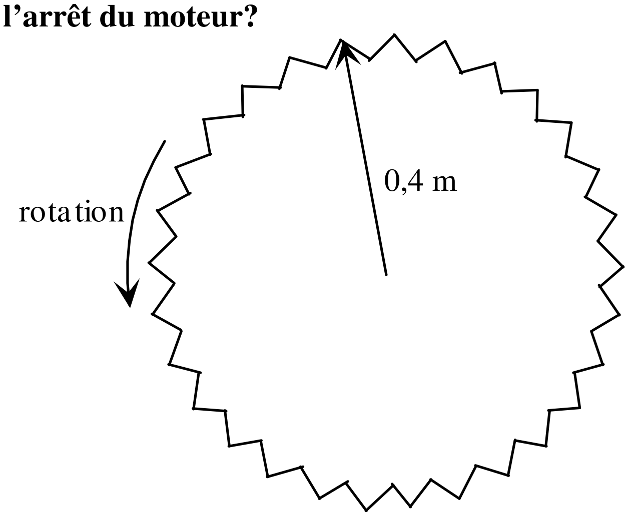
La grandeur de l'accélération de la coureuse est calculée à l'aide de: $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$.

Alors $a = \sqrt{(2{,}5\ \text{m/s}^2)^2 + (5\ \text{m/s}^2)^2}$ **a = 5,59 m/s²**.



Exemple 6.12 : Une scie radiale tourne à une vitesse angulaire constante de 600 rpm. On arrête le moteur et la vitesse angulaire diminue pendant 1 minute, de façon constante, jusqu'au repos.

a) **Quelle est la vitesse d'une dent, 20 s après l'arrêt du moteur?**
b) **Quelle est l'accélération d'une dent, 20 s après l'arrêt du moteur?**
c) **Quelle est la distance totale parcourue par une dent pendant la minute qui suit l'arrêt du moteur?**



a) La vitesse angulaire initiale de la scie est

$$\omega_i = \frac{600\ \text{r}}{\text{min}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{r}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 62{,}83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

(Suite de l'exemple 6.12)

Nous savons également que la vitesse angulaire finale est $\omega_f = 0$ (repos). Nous pouvons également poser $t_i = 0$ s et $t_f = 60$ s.

Nous pouvons calculer l'accélération angulaire à l'aide de

$$\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$$

$$0 \text{ rad/s} = 62{,}83 \text{ rad/s} + \alpha\,(60 \text{ s} - 0 \text{ s}).$$

Alors $\alpha = -1{,}047$ rad/s^2.

Nous pouvons maintenant calculer la vitesse angulaire de la scie à $t = 20$ s.

$$\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$$

$$\omega_f = 62{,}83 \text{ rad/s} + -1{,}047 \text{ rad/s}^2\,(20 \text{ s} - 0 \text{ s}).$$

$$\omega_f = 41{,}89 \text{ rad/s}.$$

La vitesse de la dent est donnée par $v_f = \omega_f R$.

$\boldsymbol{v_f}$ = 41,89 rad/s (0,4 m) **= 16,76 m/s**.

b) L'accélération de la dent est un vecteur avec deux composantes (a_c et a_t).

accélération tangentielle : $a_t = \alpha R$ = (-1,047 rad/s^2)(0,4 m) = -0,419 m/s^2.
(a_t est négatif, ce qui implique que la grandeur de la vitesse de la dent diminue).

accélération centripète : $a_c = \dfrac{v^2}{R}$ $\quad a_c = \dfrac{(16{,}76 \text{ m/s})^2}{0{,}4 \text{ m}}$ $\qquad a_c = 702{,}24$ m/s^2.

La grandeur de l'accélération est donnée par : $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$

$a = \sqrt{(702{,}24 \text{ m/s}^2)^2 + (-0{,}419 \text{ m/s}^2)^2}$ $\qquad$ **$\boldsymbol{a}$ = 702,24 m/s^2.**

c) La distance totale parcourue par une dent correspond à s_f. Pour calculer s_f, nous pouvons d'abord calculer θ_f. Nous connaissons ω_f, ω_i et α. Nous pouvons également poser $\theta_i = 0$.

Utilisons $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$

$$(0 \text{ rad/s})^2 = (62{,}83 \text{ rad/s})^2 + 2\,(-1{,}047 \text{ rad/s}^2)(\theta_f - 0).$$

Si on résout : $\theta_f = 1885{,}2$ rad
Et alors $s_f = R\,\theta_f$. $\qquad s_f$ = (0,4 m)(1885,2 rad) = 754,8 m.

La distance parcourue par une des dents de la scie pendant 1 minute est **754,8 m**.

6.6 Courroies et engrenages

On retrouve des courroies, des poulies et des engrenages dans beaucoup d'appareils mécaniques. Dans une automobile par exemple, il y a une courroie de distribution (« timing belt »), dont le rôle est de relier le vilebrequin (« crankshaft ») actionné par les pistons aux arbres à cames (« camshaft ») qui contrôlent l'ouverture et la fermeture des valves d'entrée et de sortie des gaz. Cet arrangement est nécessaire parce que les arbres à cames, qui sont situés à une certaine distance du vilebrequin, doivent tourner à une vitesse angulaire deux fois plus petite que celle du vilebrequin.

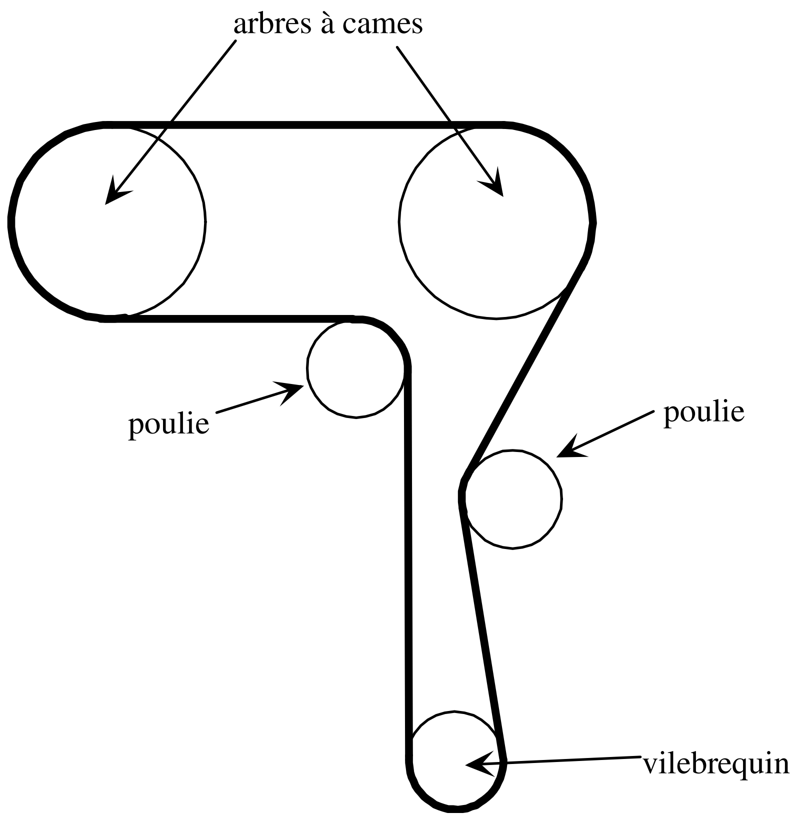


Figure 6.12 : Schéma de la courroie de distribution d'une automobile.

Le rôle des engrenages, comme celui des ensembles courroies-poulies, est de pouvoir faire tourner une partie B d'un appareil à une vitesse angulaire différente de celle d'une partie A (qui est, par exemple, actionnée par un moteur). La partie « transmission » d'une automobile est, en fait, une série d'engrenages permettant aux roues de tourner à une vitesse angulaire différente de celle du vilebrequin.

À la figure 6.13, on voit un engrenage simple formé de deux roues dentées. Les dents empêchent simplement les deux roues de glisser l'une par rapport à l'autre.

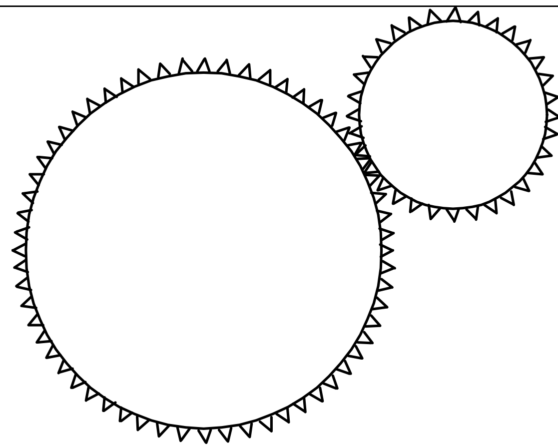


Figure 6.13 : Engrenage simple.

Quelques principes suffisent pour comprendre les rapports entre les différentes parties de ces mécanismes :

1) On suppose que les courroies sont peu élastiques; la longueur d'une courroie est constante.
2) On suppose que les courroies ne glissent pas.
3) Pour qu'il n'y ait pas de glissement entre deux **points qui sont en contact** il faut que le déplacement de ces deux points pendant un même temps soit le même. La **vitesse de ces deux points doit donc toujours être de même grandeur**, et si cette grandeur change, elle doit changer de la même façon pour les deux points. Il faut donc que **l'accélération tangentielle des deux points soit la même**.

Enfin, il peut arriver qu'on remplace les courroies par des chaines dentées, de façon à empêcher le glissement. La courroie de distribution d'une automobile, par exemple, est souvent dentelée. Une bicyclette fonctionne à l'aide de chaînes et de roues dentées.

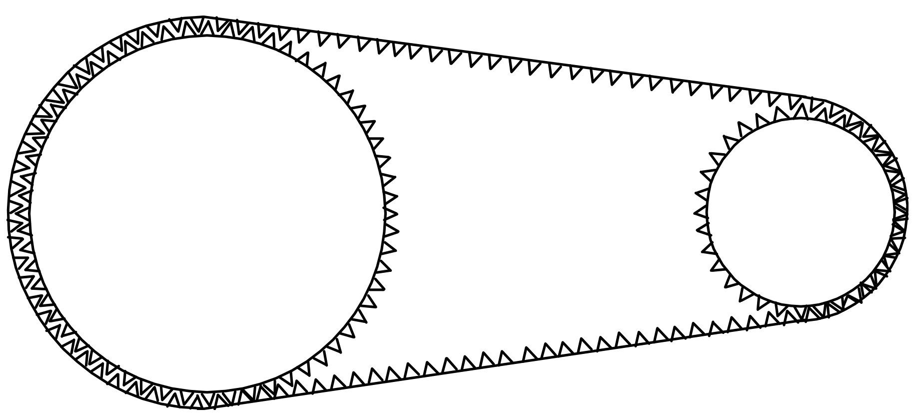


Figure 6.14 : Une chaîne dentée est équivalente à une courroie.

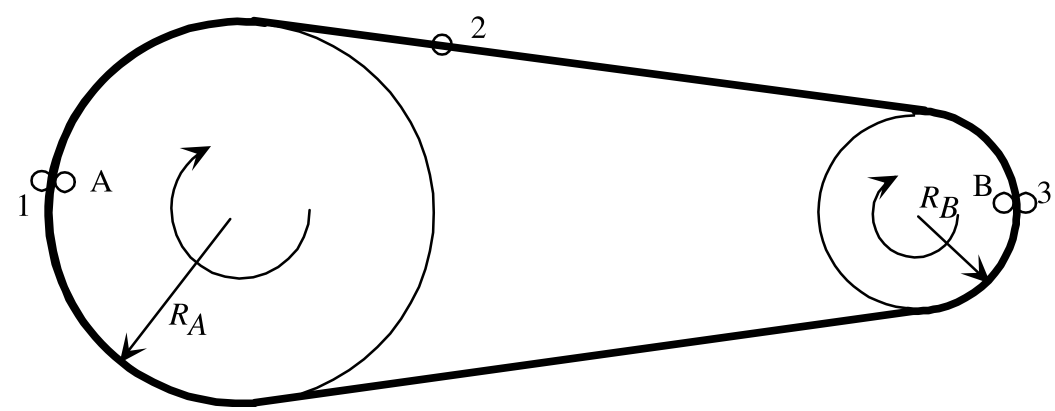


Figure 6.15 : Courroie et poulies.

À la figure 6.15, le point 1 (sur la courroie) ne glisse pas par rapport au point A (sur la périphérie de la poulie A). Pour cela il faut que les vitesses soient de même grandeur.

$$v_1 = v_A = \omega_A R_A$$

Si la grandeur de la vitesse de A change, la grandeur de la vitesse de 1 doit changer de la même façon. Donc le taux de changement de la grandeur de la vitesse doit être le même pour le point 1 et pour le point A.

$$a_{t1} = a_{tA} = \alpha_A R_A$$

Le raisonnement est le même pour les points B et 3 :

$$v_3 = v_B = \omega_B R_B \quad \text{et} \quad a_{t3} = a_{tB} = \alpha_B R_B$$

Comme la longueur de la courroie ne change pas, la distance entre les points 1 et 2 et 3 est toujours la même. Pour cela il faut : $v_3 = v_2 = v_1$ ou encore

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_B R_B = v_2 = \omega_A R_A}}$$

Aussi, la grandeur de la vitesse du point 2 doit **constamment** être identique à celle du point 1 et à celle du point 3. Pour cela il faut $a_{t3} = a_2 = a_{t1}$ ou encore

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_B R_B = a_2 = \alpha_A R_A}}$$

Le principe est identique pour les engrenages. Les dents permettent aux deux roues dentées de ne pas glisser l'une par rapport à l'autre. Les points en contact (ou les dents #1 et #2) des deux roues doivent donc avoir la même vitesse et la même accélération tangentielle.

À la figure 6.16, la vitesse et l'accélération tangentielle de la dent #1 sont $v_{\#1} = \omega_A R_A$ et $a_{t\#1} = \alpha_A R_A$. La vitesse et l'accélération tangentielle de la dent #2 sont $v_{\#2} = \omega_B R_B$ et $a_{t\#2} = \alpha_B R_B$.

Comme $v_{\#1} = v_{\#2}$ alors $\boxed{\boldsymbol{\omega_A R_A = \omega_B R_B}}$

Comme $a_{t\#1} = a_{t\#2}$ alors $\boxed{\boldsymbol{\alpha_A R_A = \alpha_B R_B}}$

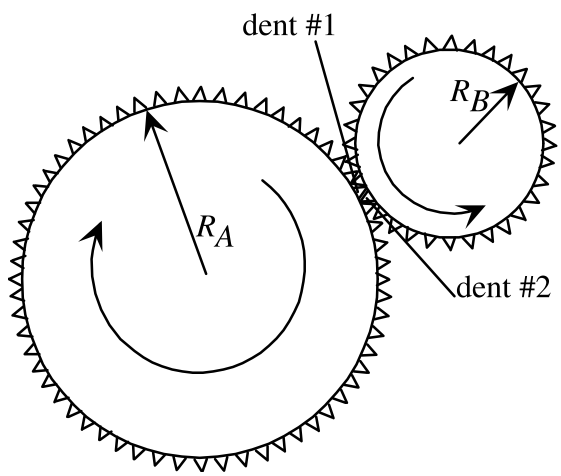


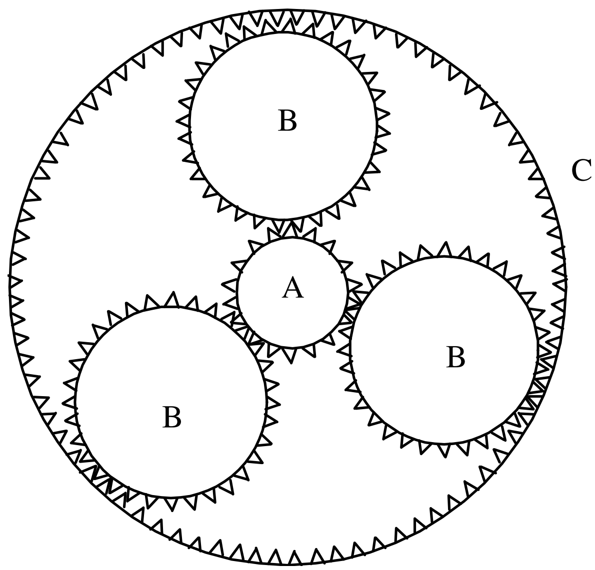
Figure 6.16 : Engrenage simple.

On peut réécrire la première relation encadrée comme : $\dfrac{\omega_A}{\omega_B} = \dfrac{R_B}{R_A}$. Le rapport entre les vitesses angulaires est inversement proportionnel au rapport entre les rayons (si $R_B = ½\ R_A$, alors $\omega_B = 2\ \omega_A$). On peut répéter l'argument pour les accélérations angulaires (si $R_B = ½\ R_A$, alors $\alpha_B = 2\ \alpha_A$).

La plus petite roue tourne plus vite, et a une plus grande accélération.

Exemple 6.13 : Le système d'engrenages suivants est appelé « engrenages planétaires » et est utilisé, entre autres, dans les tournevis électriques. R_A = 1 cm, R_B = 2 cm et R_C = 5 cm. Le centre des roues dentées est fixe. La roue dentée A est accélérée (de façon constante), pendant 3 s, par un moteur électrique à partir du repos jusqu'à une vitesse angulaire finale constante (dans le sens anti-horaire) de 100 RPM. Calculez

a) l'accélération angulaire de la roue C.
b) la vitesse angulaire finale de la roue C (dans quel sens tourne-t-elle?)



a) calculons d'abord l'accélération angulaire de la roue A. Nous savons que $\omega_i = 0$ et ω_f = 100 tours/min × 1min/60 s × 2π rad/ 1 tour = 10,47 rad/s. Aussi, t_i = 0 s et t_f = 3 s.

Utilisons $\omega_f = \omega_i + \alpha(t_f - t_i)$

10,47 rad/s = 0 rad/s + α_A (3 s – 0 s).

Alors : α_A = 3,49 rad/s^2.

D'autre part $\alpha_A R_A = \alpha_B R_B$ et $\alpha_C R_C = \alpha_B R_B$. Par conséquent, $\alpha_C R_C = \alpha_A R_A$.

α_C (5 cm) = (3,49 rad/s^2)(1 cm). **α_C = 0,698 rad/s^2.**

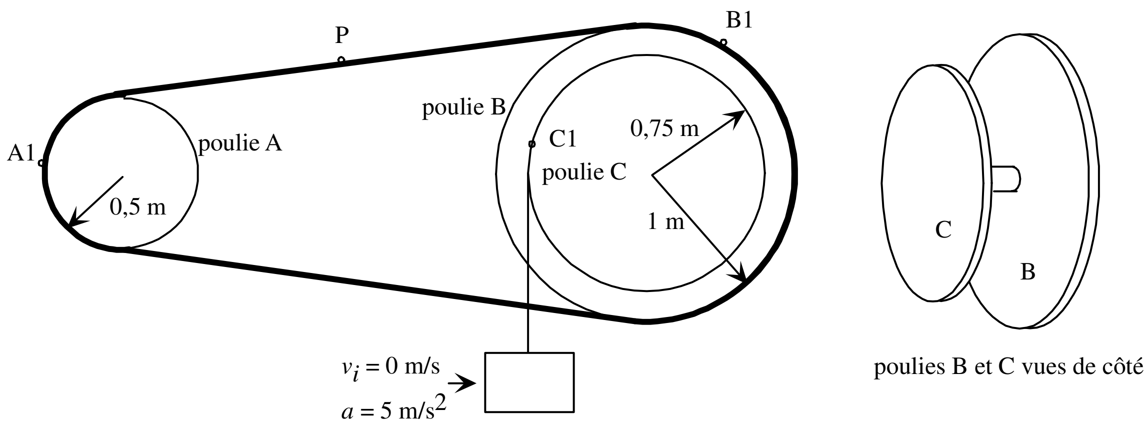
b) Comme $\omega_A R_A = \omega_B R_B$ et $\omega_C R_C = \omega_B R_B$, alors $\omega_C R_C = \omega_A R_A$.

ω_C (5 cm) = (100 RPM)(1 cm). **ω_C = 20 RPM.**

La roue A tourne dans le sens anti-horaire; les roues B tournent dans le sens horaire; **la roue C tourne dans le sens horaire (faites-vous un petit dessin pour vérifier!).**

Exemple 6.14 : Ce système de courroies et poulies est mis en marche, à partir du repos, par la chute d'un bloc (a = 5 m/s^2). Les poulies B et C sont soudées l'une à l'autre. Calculez les valeurs suivantes, 3 secondes après le départ :

a) ω_A b) α_A c) vitesse du point P d) accélération du point A1.



a) Après 3 s, la vitesse du bloc peut se calculer facilement :

$$v_f = v_i + a\,(t_f - t_i)$$
$$v_f = 0 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s}^2\,(3 \text{ s} - 0 \text{ s}) = 15 \text{ m/s}.$$

Le point C1 a la même vitesse et la même accélération (tangentielle) que le bloc. Donc v_{C1} = 15 m/s et a_{tC1} = 5 m/s^2.

Mais $v_{C1} = \omega_C R_C$

15 m/s = ω_C (0,75 m) Donc ω_C = 20 rad/s

Et $a_{tC1} = \alpha_C R_C$

5 m/s^2 = α_C (0,75 m) Donc α_C = 6,67 rad/s^2

Les poulies B et C sont soudées ensemble. Elles ont la même vitesse angulaire et la même accélération angulaire.

ω_B = 20 rad/s α_B = 6,67 rad/s^2

La vitesse des points A1 et B1 est la même :

$$v_{A1} = v_{B1}$$
$$\omega_A R_A = \omega_B R_B$$

ω_A (0,5 m) = (20 rad/s)(1m) Donc $\boldsymbol{\omega_A}$ **= 40 rad/s**

(Suite de l'exemple 6.14)

b) L'accélération tangentielle des points A1 et B1 est la même :

$a_{tA1} = a_{tB1}$
$\alpha_A R_A = \alpha_B R_B$

α_A (0,5 m) = (6,67 rad/s^2)(1m). Donc $\boldsymbol{\alpha_A}$ **= 13,33 rad/s²**

c) La vitesse du point P est la même que celle des points A1 et B1 :

$v_P = v_{B1}$
$v_P = \omega_B R_B$

v_P = (20 rad/s)(1m) Donc $\boldsymbol{v_P}$ **= 20 m/s.**

d) L'accélération tangentielle du point A1 est $a_{tA1} = \alpha_A R_A$.

$a_{tA1} = \alpha_A R_A$.
a_{tA1} = (13,33 rad/s^2)(0,5 m) = 6,67 m/s^2.

Mais le point A1 se déplace sur une trajectoire circulaire, il a aussi une accélération centripète.

$$a_{cA1} = \frac{v_{A1}^2}{R_A}$$

La vitesse du point A1 est égale à celle du point P : v_{A1} = 20 m/s.

$$a_{cA1} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{(0{,}5 \text{ m})} \quad a_{cA1} = 800 \text{ m/s}^2.$$

La grandeur de l'accélération du point A1 est :

$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$. Alors $a_{A1} = \sqrt{(800 \text{ m/s}^2)^2 + (6{,}67 \text{ m/s}^2)^2}$ $\boldsymbol{a_{A1}}$ **= 800,03 m/s²**.

Problèmes du chapitre 6:

Cinématique de rotation : MCUA

1. La vitesse angulaire du moteur d'une automobile augmente de 1200 RPM à 3000 RPM en 12 secondes.

   a) Calculez l'accélération angulaire α en supposant qu'elle est uniforme;
   b) Combien de révolutions accomplit le moteur pendant ces 12 secondes ?

2. Une plaque tournante, dont la vitesse angulaire est de 78 RPM, met 30 secondes à s'arrêter, une fois le contact coupé.

   a) Trouvez l'accélération angulaire de la plaque, en supposant qu'elle soit uniforme;
   b) Combien de révolutions accomplit-elle pendant ce temps ?

3. En attendant votre tour de monter à bord d'un hélicoptère, vous calculez que la vitesse du rotor passe de 300 RPM à 225 RPM en une minute.

   a) Trouvez l'accélération angulaire moyenne pendant cet intervalle de temps;
   b) En supposant que l'accélération angulaire demeure constante, combien de temps mettra le rotor à s'arrêter ?
   c) Combien de tours aura fait le rotor entre la fin de la première minute et le moment où il s'arrêtera ?

4. Un disque en rotation autour d'un axe fixe accélère uniformément à partir du repos. À un instant donné, sa vitesse angulaire vaut 10 rév/sec. Après 60 tours supplémentaires, sa vitesse angulaire vaut 15 rév/sec.
   Calculez :

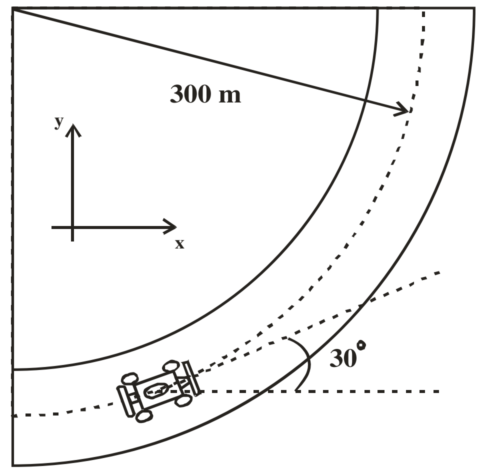
   a) l'accélération angulaire α;
   b) le temps requis pour accomplir 60 révolutions;
   c) le temps requis pour atteindre la vitesse de 10 rév/sec;
   d) le nombre de révolutions accomplies à partir du repos jusqu'au moment où sa vitesse vaut 10 rév/sec.

5. Un disque accomplit 40 révolutions avant de s'arrêter. Avec une vitesse initiale de 1,5 rad/sec et une accélération uniforme,

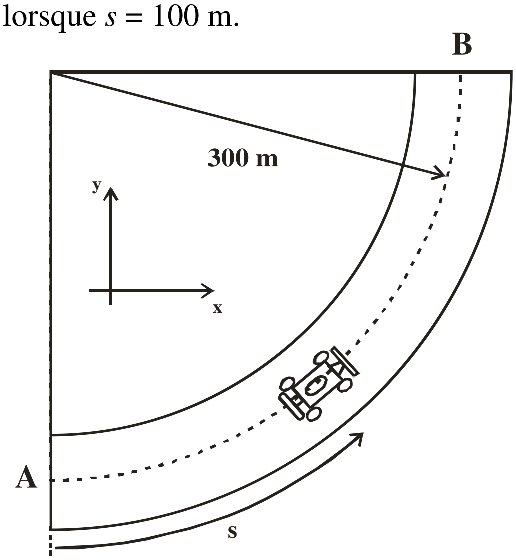
   a) Combien de temps a pris la roue pour s'arrêter ?
   b) Quelle était l'accélération angulaire ?
   c) Combien de temps a mis le disque pour accomplir les 20 premières révolutions ?

Mouvement circulaire – accélération centripète et tangentielle

6. Une auto se déplace dans une courbe dont le rayon de courbure est de 300 m. À l'instant correspondant à la figure 1, la vitesse est de 20 m/s et la grandeur de cette vitesse augmente au rythme de 2 m/s^2. Calculez l'accélération (grandeur et direction) de cette auto.



7. L'automobile ci-dessous change sa vitesse de façon constante entre A et B (v_A = 15 m/s, v_B = 20 m/s). Calculez son accélération centripète et son accélération tangentielle lorsque s = 100 m.



8. Dans une machine tournante de rayon 50 cm, démarrant à partir du repos et accélérant à un rythme de 3 rad/s^2, après combien de temps l'accélération totale d'un point sur la paroi de la machine sera-t-elle de 4 m/s^2?

Cinématique de rotation : Relation entre paramètres linéaire et angulaire

9. La figure 1 nous montre le bras de lecture d'un tourne-disque, avec l'aiguille qui se trouve à une distance de 145 mm de l'axe de rotation, au moment où la pièce musicale du disque (tournant à 33 RPM) vient tout juste de commencer.
Lorsque la pièce musicale se termine, l'aiguille se trouve alors à une distance de 68 mm de l'axe de rotation.
Déterminez la grandeur de la vitesse de glissement de l'aiguille par rapport au disque :

a) au début de la pièce musicale ;
b) à la fin de la pièce musicale.

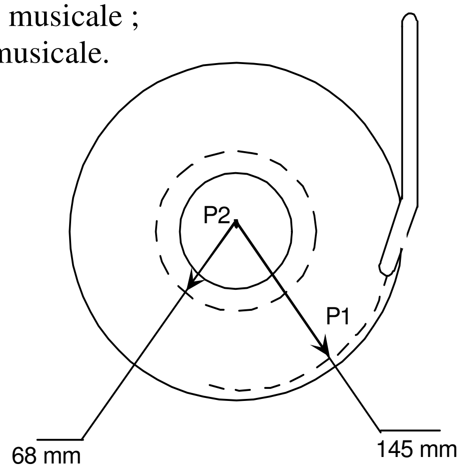


Figure 1

10. Un bricoleur dispose d'une perceuse à vitesse de rotation variable (0 à 1200 RPM) pour percer 2 trous dans une pièce de métal, trous dont les diamètres sont respectivement de 6 mm et 12 mm, voir la figure 2.

Sachant que la vitesse de coupe du métal doit être de 16 cm/sec, déterminez la vitesse angulaire de rotation (en RPM) de la mèche, dans chaque cas.

N.B. Pour le perçage, la vitesse de coupe représente la vitesse de la circonférence de la mèche.

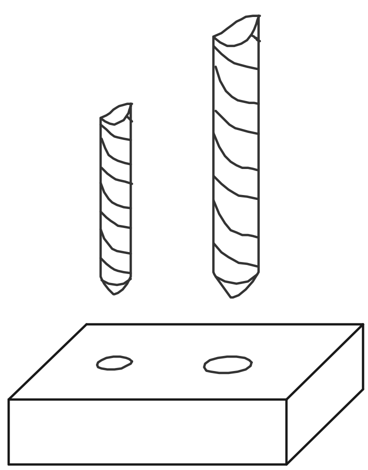


Figure 2

11. La figure 3 montre un système de poulies montées à l'avant d'un moteur d'automobile.

M : poulie du moteur
G : poulie du générateur
E : poulie de la pompe à eau

On donne les diamètres suivants pour les poulies :

$D_M = 20$ cm $\qquad D_G = 8$ cm

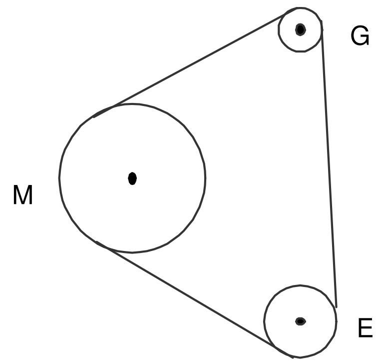


Figure 3

À l'instant t = 0 seconde lu sur un chronomètre, le régime du moteur est de 3000 RPM. On pèse sur la pédale de l'accélérateur et on note alors que, à l'instant t = 4 secondes, le régime du moteur est de 4000 RPM.
On considère que le glissement des courroies sur les poulies est négligeable.

a) Déterminez le diamètre de la poulie de la pompe à eau, sachant qu'elle tourne toujours 2 fois plus vite que celle du moteur ;
b) en supposant que l'arbre du moteur effectue un mouvement circulaire uniformément accéléré entre les instants 0 seconde et 4 secondes, déterminez :

1- l'accélération linéaire de la courroie (cm /sec^2) ;
2- la vitesse linéaire (cm/sec) de la courroie à l'instant t = 3 secondes ;
3- la vitesse angulaire de chaque poulie (en RPM) à t = 3 secondes ;
4- le nombre de révolutions effectuées par la poulie de la pompe à eau entre les instants 0 et 3 secondes.

12. On donne les diamètres des poulies, comme illustré à la figure 4 :

$D_A = 80$ mm $D_B = 160$ mm $D_E = 80$ mm $D_H = 120$ mm

Dans ce problème, le glissement des courroies sur les poulies sera considéré négligeable.
Sachant que l'arbre du moteur électrique tourne à 1725 RPM, déterminez les vitesses angulaires de rotation (en RPM) des poulies A et H.

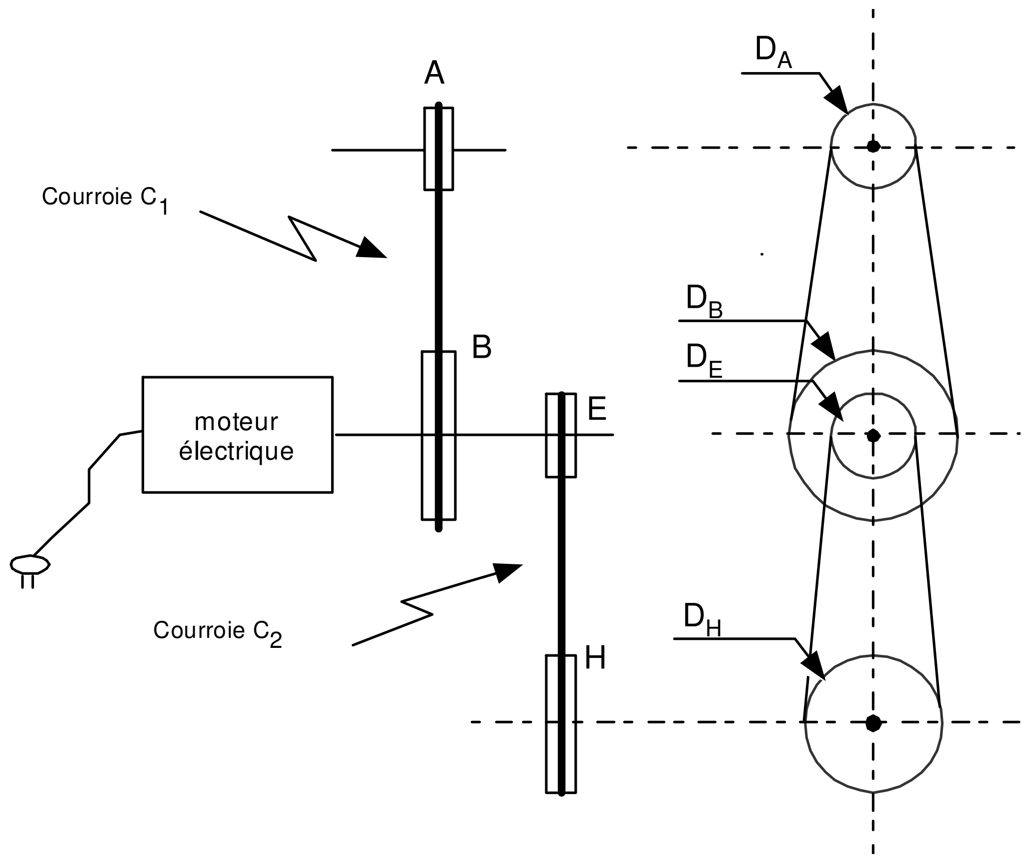


Figure 4

Réponses :

1. a) $\alpha = 2{,}5$ **rév/s^2 = 15,7 rad/s^2**
   b) $\theta = 420$ **révolutions**

2. a) $\alpha = -0{,}27$ **rad/s^2**
   b) $\theta = 19{,}5$ **révolutions**

3. a) $\alpha = -0{,}13$ **rad/s^2**
   b) $t = 4$ **minutes**
   c) $\theta = 337{,}5$ **tours**

4. a) $\alpha = 1{,}04$ **rév/s^2**
   b) $t = 4{,}8$ **s**
   c) $t = 9{,}6$ **s**
   d) $\theta = 48$ **révolutions**

5. a) $t = 335{,}1$ **s**
   b) $\alpha = -4{,}48 \times 10^{-3}$ **rad/s^2**
   c) $t = 98{,}15$ **s.**

6. $a = 2{,}404$ **m/s^2 à 63,69° au-dessus de l'horizontale.**

7. $a_c = 0{,}874$ **m/s^2** $a_t = 0{,}186$ **m/s^2.**

8. $t = 0{,}908$ **s.**

9. a) $v_1 = 501{,}08$ **mm/s**
   b) $v_2 = 235$ **mm/s**

10. ω**(6mm) = 509,30 RPM et** ω**(12 mm) = 254,65 RPM**

11. a) $D_E = 10$ **cm**
    b) 1- $a_{courroie} = 261{,}8$ **cm/s^2**
       2- $v_{courroie} = 39{,}27$ **m/s**
       3- $\omega_E = 7500$ **RPM,** $\omega_M = 3750$ **RPM,** $\omega_G = 9375$ **RPM**
       4- $\theta = 337{,}5$ **révolutions**

12. $\omega_A = 3450$ **RPM et** $\omega_H = 1150$ **RPM**