PHY-144 : Introduction à la physique du génie

Chapitre 4 : Cinématique de translation : mouvement rectiligne.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons pour la première fois aux corps en mouvement. **La cinématique** est l'étude des considérations géométriques du mouvement des corps (position, vitesse, accélération des corps); elle ne s'occupe pas des forces. **La cinétique** s'intéresse aux relations entre les forces sur un corps et le mouvement de ce corps.

Le mouvement d'un objet peut bien sûr être très complexe, mais il est toujours très utile de considérer tout d'abord le mouvement du **centre de masse** de cet objet.

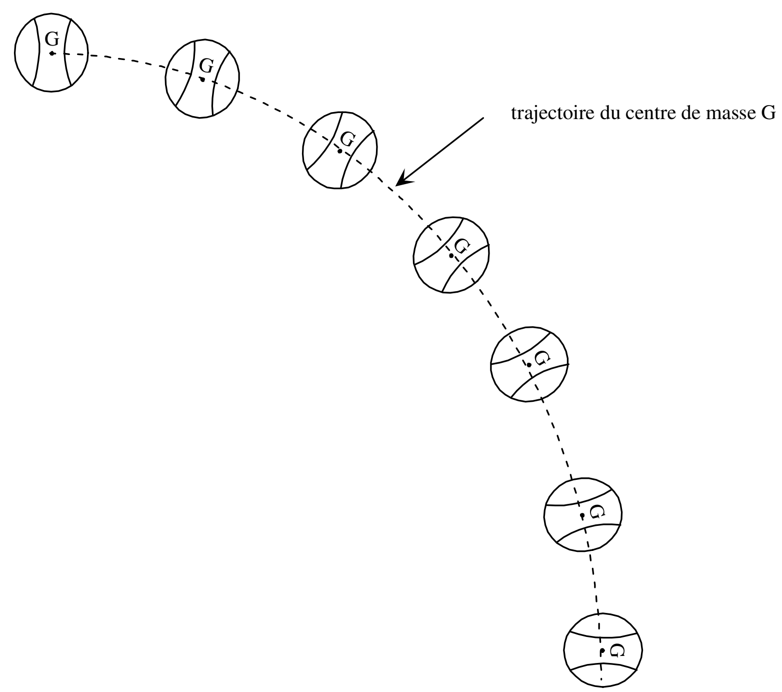


Figure 4.1 : Mouvement d'une balle de baseball.

Le mouvement de cette balle, par exemple est constitué d'une **translation du centre de masse G de la balle** et d'une rotation de celle-ci autour de G.

Dans ce chapitre 4.1, on s'intéresse surtout à la translation d'un corps, et alors chaque corps peut être représenté par un point (son centre de masse) qui bouge. On s'intéresse à la relation entre la position, la vitesse, l'accélération de ce point et le temps qui s'écoule.

Le mouvement d'un point est représenté par une **trajectoire**, comme on peut le voir à la figure 4.1. Sur cette figure, la trajectoire est courbe ou **curviligne.** Il y a certainement des trajectoires plus simples que celle-là…

4.2 Mouvement rectiligne

En fait la trajectoire la plus simple est la trajectoire rectiligne, pour laquelle **l'objet se déplace sur une ligne droite.**

Par exemple, un homme attend un rendez-vous galant près d'un lampadaire et, furieux, fait les cent pas. Il est parfois à gauche du lampadaire, parfois à droite… Parfois il se dirige vers la gauche, parfois vers la droite...

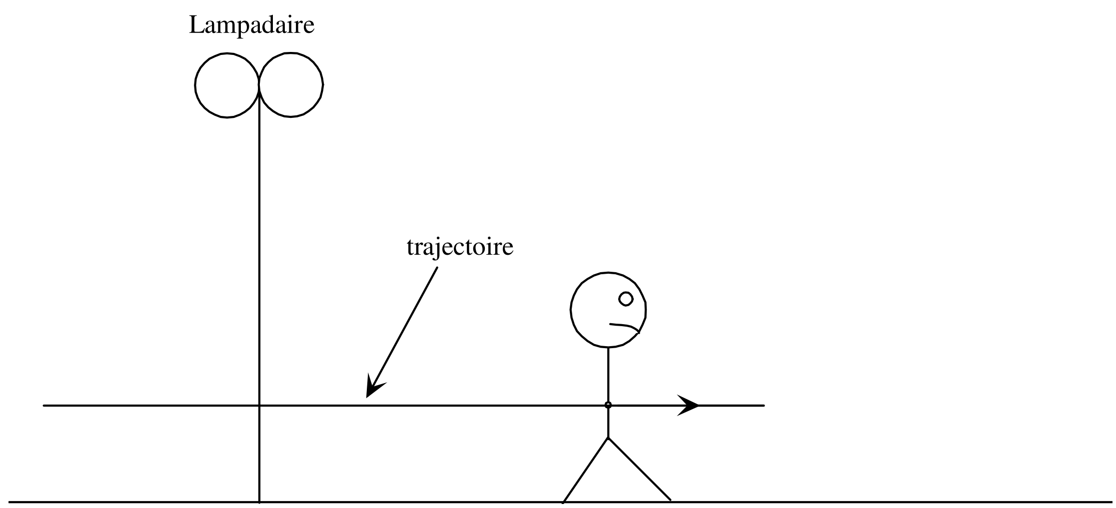


Figure 4.2 : Mouvement rectiligne.

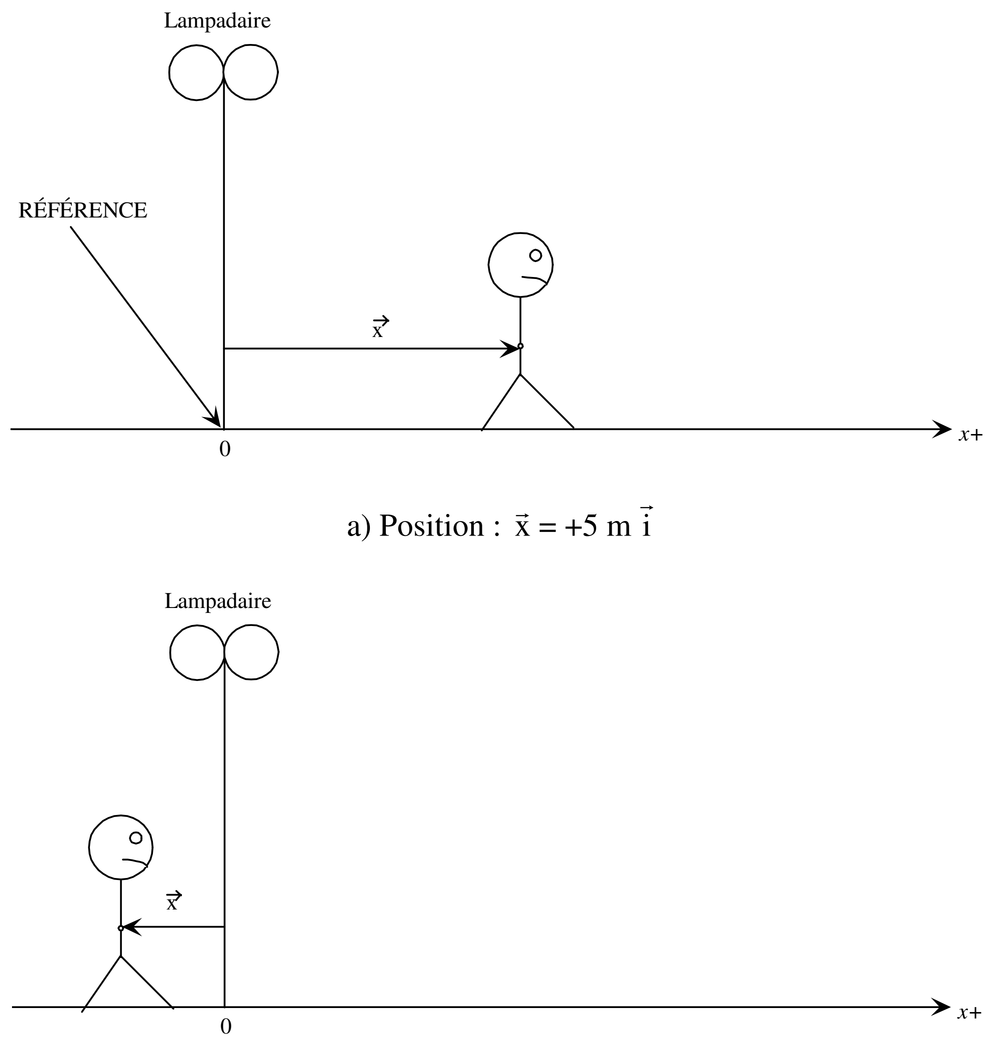
4.2.1 La position

« Quelle est la position de l'homme? »

Cette question n'est pas complète. On doit lui apporter une précision supplémentaire. Une question complète serait : « Quelle est la position de l'homme par rapport au lampadaire? ». Pour définir la position, on peut adopter le lampadaire comme **référence**. La ligne droite sur laquelle se déplace l'homme peut être appelé « l'axe des *x* ». Et alors la position de l'homme va être définie par un **vecteur** $\vec{x}$**.**

Exemples :

$\vec{x} = +5\ \text{m}\ \vec{i}$	L'homme est à 5 m à droite du lampadaire.
$\vec{x} = -1\ \text{m}\ \vec{i}$	L'homme est à 1 m à gauche du lampadaire.
$\vec{x} = 0\ \vec{i}$	L'homme est tout juste vis-à-vis le lampadaire.



a) Position : $\vec{x} = +5 \text{ m } \vec{i}$

b) Position : $\vec{x} = -1 \text{ m } \vec{i}$

Figure 4.3 : Exemples de vecteurs position.

4.2.2 Le déplacement et la distance

Le **déplacement** $\Delta\vec{x}$ est la différence entre une position « finale » et une position « initiale ». C'est un **vecteur.**

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$$

Le déplacement est positif si le corps s'est déplacé vers les *x*+.
Le déplacement est négatif si le corps s'est déplacé vers les *x*-.
Le déplacement est nul si la position finale est la même que la position initiale.

Exemple 4.1 : Quel est le déplacement de l'homme entre la situation a) et la situation b) de la figure 4.3 ?

$$\Delta\vec{x} = -1 \text{ m } \vec{i} - 5 \text{ m } \vec{i} = -6 \text{ m } \vec{i}$$

L'homme s'est déplacé de 6 m vers les *x*-.

La distance et le déplacement ne sont pas des synonymes. La **distance** est un scalaire, le **déplacement** est un vecteur.

Exemple 4.2 : L'homme est initialement à 5 m à droite du lampadaire. Il se déplace jusqu'à une position située à 1 m à gauche du lampadaire et revient à sa position initiale. Quel est son déplacement? Quelle distance a-t-il parcourue?

Déplacement :

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$$

$$\Delta\vec{x} = 5 \text{ m } \vec{i} - 5 \text{ m } \vec{i} = 0 \ \ !!$$

Déplacement = 0.

Distance : L'homme a bougé de 6 m vers la gauche, puis de 6 m vers la droite.

Distance = 12 m.

Note : la position est exprimée par un **vecteur** $\vec{x}$. Comme, dans un mouvement rectiligne, ce vecteur est toujours selon $\vec{i}$ ou $-\vec{i}$ **,** il est assez courant d'utiliser simplement la **composante** *x* de ce vecteur.

Exemple 4.3: **L'homme est initialement à 5 m à droite du lampadaire. Il se déplace jusqu'à une position située à 1 m à gauche du lampadaire. Exprimez sa position initiale et sa position finale.**

Position initiale:

$$\vec{x}_i = 5 \text{ m } \vec{i}$$

ou

$x_i = +5$ m.

Position finale:

$$\vec{x}_f = -1 \text{ m } \vec{i}$$

ou

$x_f = -1$ m.

4.2.3 La vitesse

La **vitesse** est un concept qui devient intéressant lorsque la position d'un objet **change** avec **le temps**. En voici la définition générale :

La vitesse est le taux de variation de la **position** par rapport au temps.

4.2.3.1 La vitesse moyenne

Considérons 2 voitures voyageant en ligne droite. On les voit ici (figure 4.4) de haut, à 2 instants différents. Laquelle va plus vite?

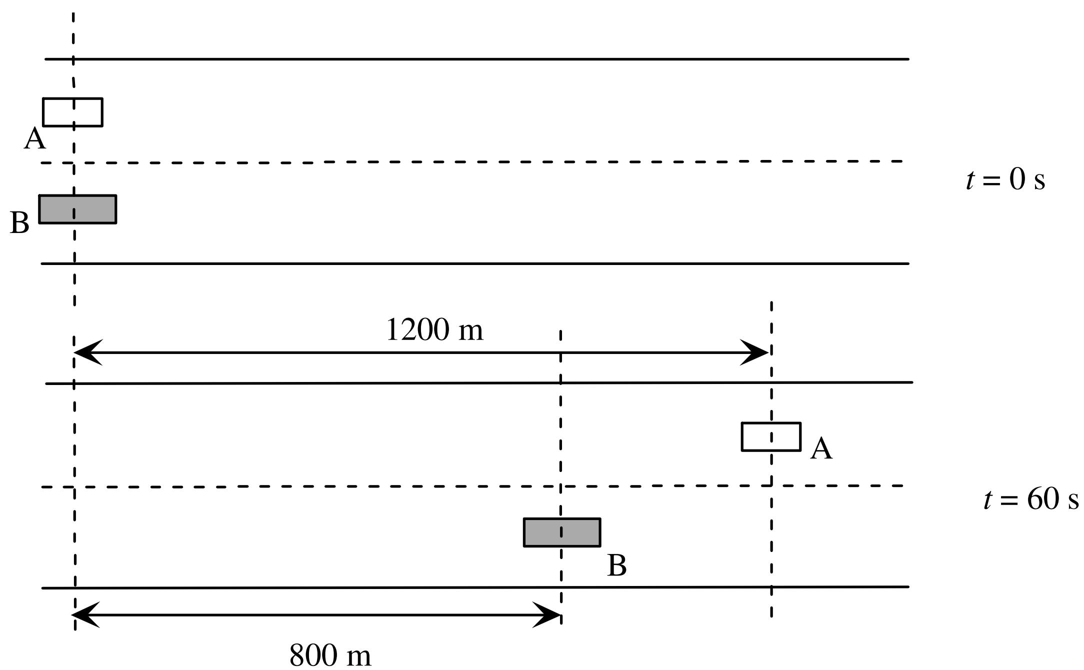


Figure 4.4 : Exemple pour le calcul de la vitesse moyenne.

À partir de ces données, on peut calculer une **vitesse moyenne** pour chacune de ces deux voitures.

$$\boxed{\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}}$$

où : $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$ (variation de position ou déplacement)

et : $\Delta t = t_f - t_i$ (intervalle de temps écoulé).

Les unités (SI) de la vitesse sont des mètres/seconde (**m/s**).

Pour la voiture A : $\vec{v}_{moy} = \dfrac{+1200\text{ m }\vec{i} - 0\text{ m }\vec{i}}{60\text{ s} - 0\text{ s}} = 20\text{ m/s }\vec{i}$

Pour la voiture B : $\vec{v}_{moy} = \dfrac{+800\text{ m }\vec{i} - 0\text{ m }\vec{i}}{60\text{ s} - 0\text{ s}} = 13{,}33\text{ m/s }\vec{i}$

En *moyenne*, la voiture A avait une plus grande vitesse. Mais cette information n'a pas vraiment une grande valeur. Il se peut, par exemple, que la voiture B ait avancé rapidement pendant les 10 premières secondes, puis qu'elle se soit arrêtée pendant les 30 secondes suivantes et qu'elle soit ensuite repartie, etc.

Voici encore un exemple du peu d'utilité de la vitesse moyenne :

Exemple 4.4 : Une voiture voyage de Montréal à Québec (240 km) en 2 heures, puis revient à son point de départ en 2 heures. Quelle est sa vitesse moyenne?

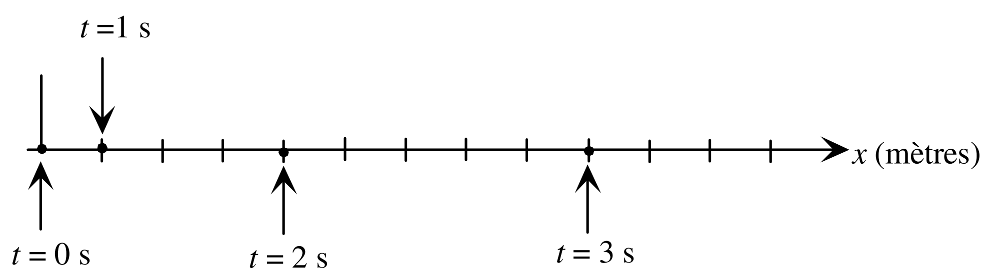
$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{0}{4\text{h}} = 0 \quad \textbf{!!!!!!}$$

Le déplacement est nul, la vitesse moyenne de la voiture est donc nulle! Pas très pertinent pour décrire le mouvement de cette voiture!

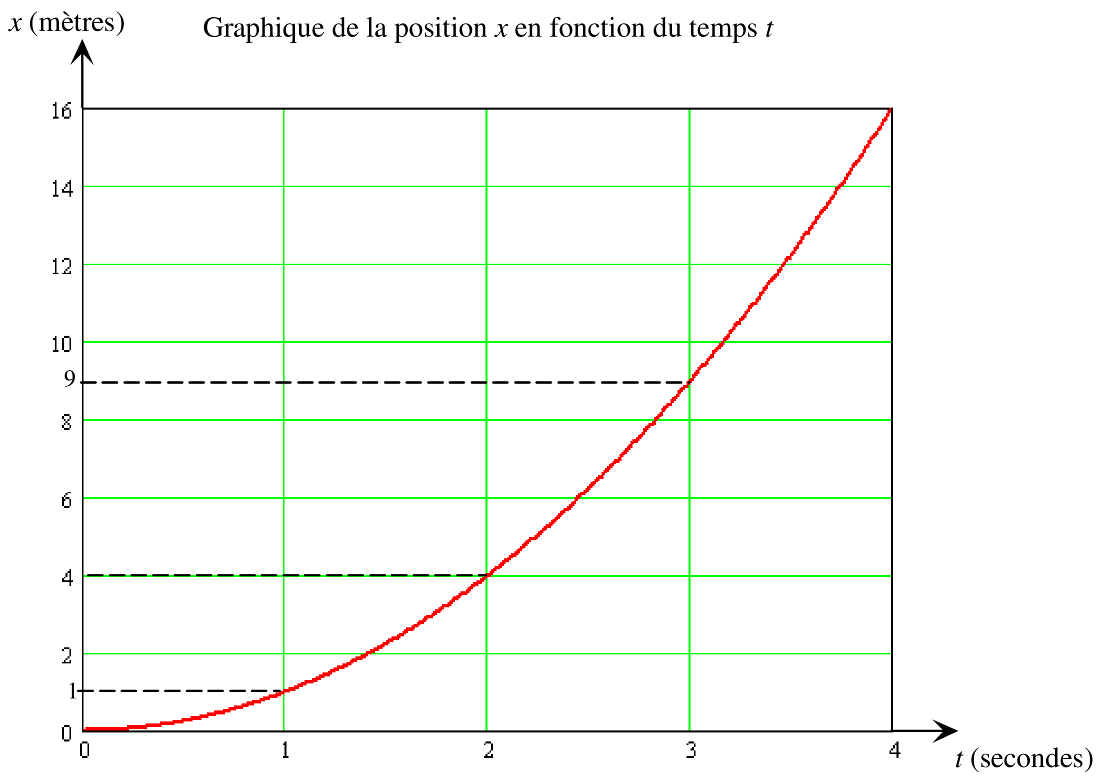
4.2.3.2 Graphique de la position en fonction du temps

Lorsqu'un objet se déplace en ligne droite, il peut être très utile de représenter son déplacement sur un *graphique*, où l'abscisse est le temps et l'ordonnée est la position. Il s'agit d'un graphique **« position en fonction du temps »**.

Exemple 4.5 : Une voiture se déplace régulièrement de la façon suivante : au temps *t* = 0, elle est à *x* = 0; au temps *t* =1 s, elle est à *x* = 1 m; au temps *t* = 2 s, elle est à *x* = 4 m, au temps *t* = 3 s, elle est à *x* = 9 m…



Voici le graphique « position en fonction du temps » de cette voiture :

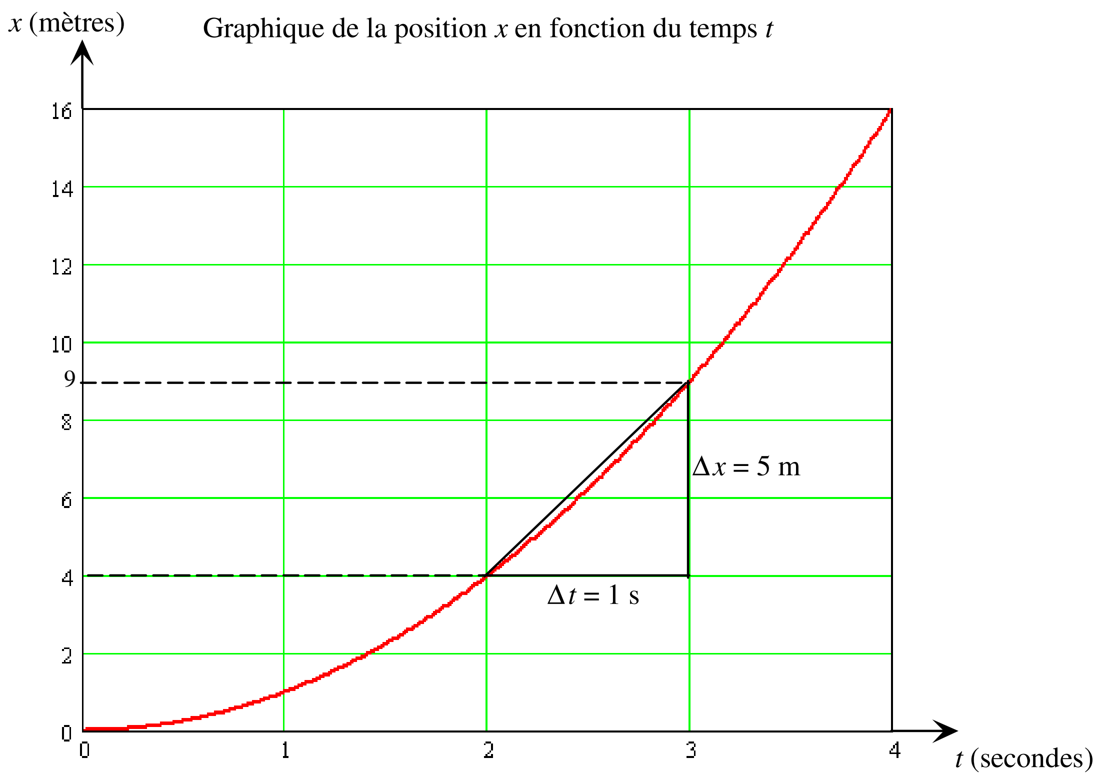


Note : Nous pouvons exprimez mathématiquement ce mouvement par la *fonction x(t)* = $1 \times t^2$. Cette fonction nous permet de calculer x pour n'importe lequel instant t. Par exemple :

Temps t (s)	Position x (mètres)
2 s	4 m
2,1 s	4,41 m
2,5 s	6,25 m
3 s	9 m

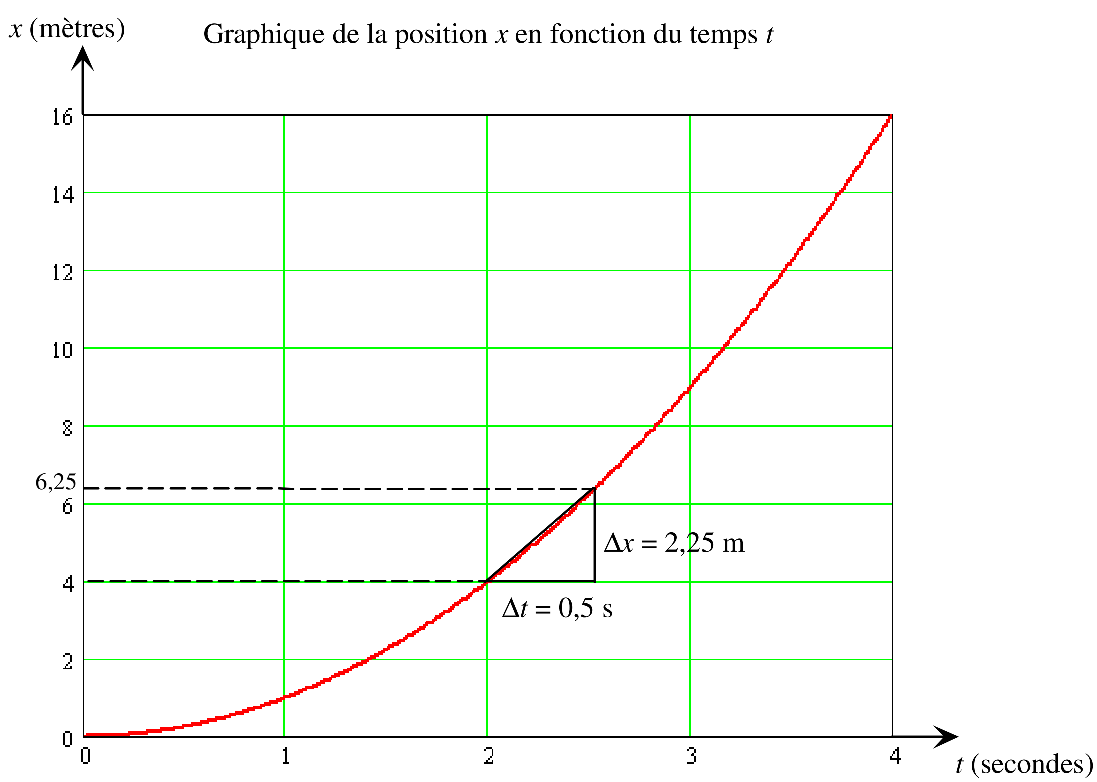
4.2.3.3 La vitesse instantanée

Pour chaque intervalle de 1 s, le déplacement de la voiture (de l'exemple précédent) est de plus en plus grand… Sa vitesse augmente donc avec le temps. La vitesse moyenne de cette voiture, comme on l'a vu, est plus ou moins intéressante. Pour le calcul de cette vitesse moyenne, on doit choisir un intervalle de temps Δt. Si on diminue cet intervalle de plus en plus, on devrait obtenir une vitesse moyenne de plus en plus près de la vitesse réelle de la voiture pendant cet intervalle de temps Δt. Si par exemple, **on veut obtenir la vitesse « instantanée » à t = 2 s**, on peut diminuer progressivement l'intervalle de temps Δt qui suit cet instant :



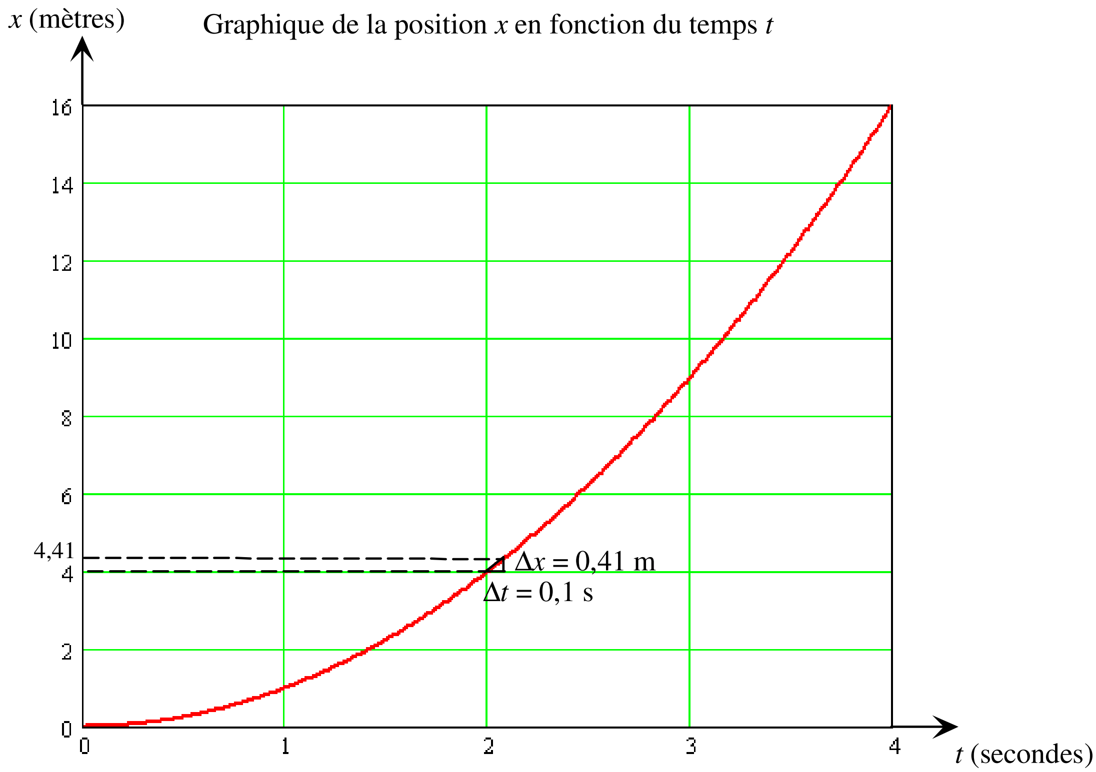
La vitesse moyenne entre t_1 = 2 s et t_2 = 3 s est $\vec{v}_{moy} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{+5\text{ m }\vec{i}}{1\text{ s}} = 5\text{ m/s }\vec{i}$

Diminuons l'intervalle de temps Δt :



La vitesse moyenne entre t_1 = 2 s et t_2 = 2,5 s est $\vec{v}_{moy} = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{+2{,}25\ \text{m}\ \vec{i}}{0{,}5\ \text{s}} = 4{,}5\ \text{m/s}\ \vec{i}$.

Diminuons encore l'intervalle de temps Δt:



La vitesse moyenne entre t_1 = 2 s et t_2 = 2,1 s est $\vec{v}_{moy} = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{+0{,}41\ \text{m}\ \vec{i}}{0{,}1\ \text{s}} = 4{,}1\ \text{m/s}\ \vec{i}$

Δt	Δx	v_{moy}
1 s	5 m	5 m/s
0,5 s	2,25 m	4,5 m/s
0,1 s	0,41 m	4,1 m/s
0,01 s	0,0404 m	4,01 m/s

On voit que plus Δt diminue, plus la vitesse moyenne ***tend vers*** une valeur de **4 m/s.** Cette valeur est la grandeur de la **vitesse instantanée** (ou **vitesse**, tout court!) à l'instant t = 2 s.

On peut donc définir la vitesse de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}}$$

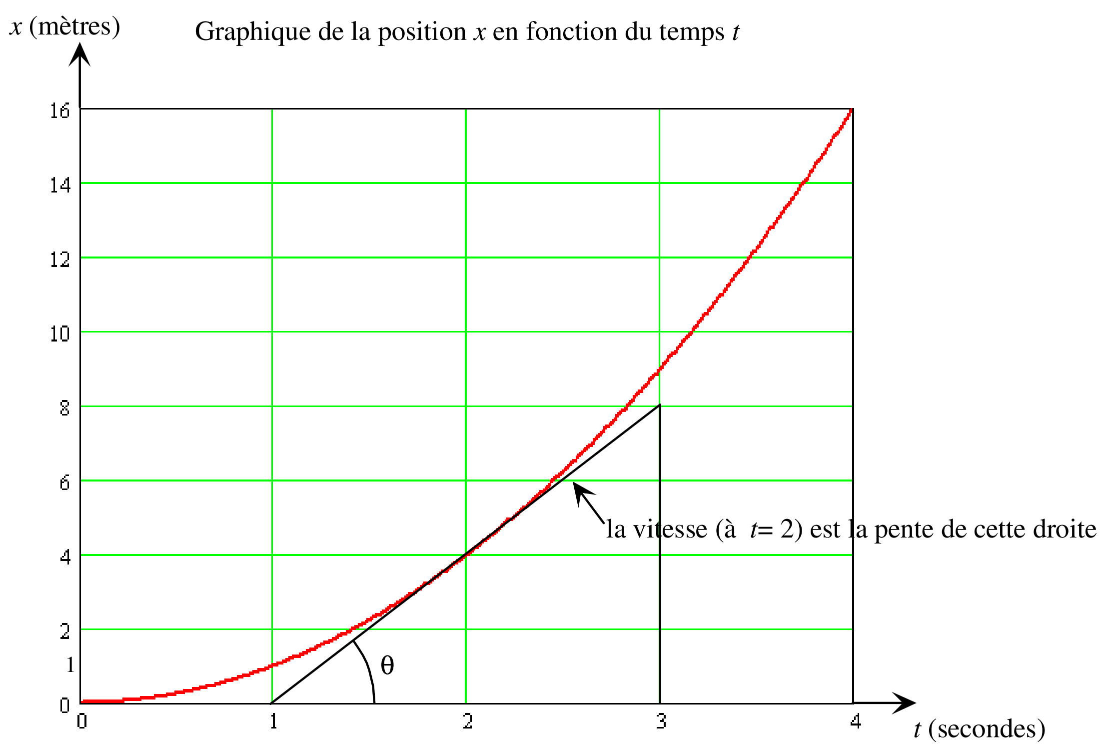
Ce qui veut dire : la vitesse est la limite de $\dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ quand Δt tend vers 0.

Si on veut simplement parler de la **composante de la vitesse** selon $\vec{i}$, alors :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Graphiquement, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ représente la pente de la droite formant l'hypoténuse du triangle rectangle de côtés Δt et Δx. Alors :

La vitesse est la **pente** de la droite tangente à la courbe « ***x* en fonction de *t*** ».



Ici la pente de la droite tangente à la courbe, à t = 2 s, est bien :

pente = (8 m – 0 m)/(3 s – 1 s) = 4 m/s.

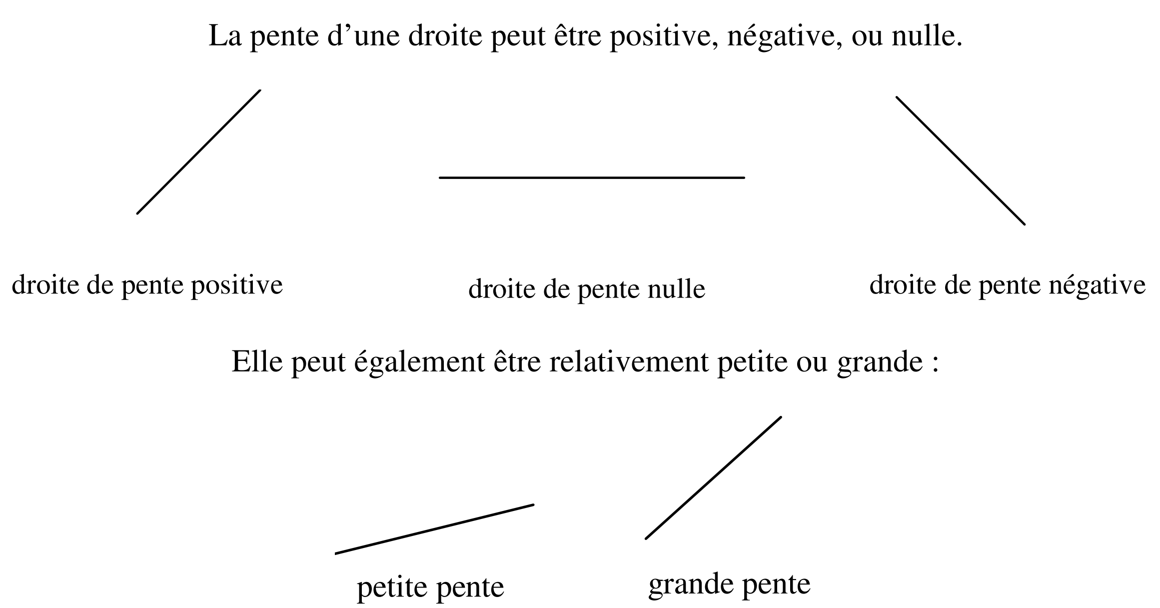


Figure 4.5 : Caractéristiques de la pente d'une droite.

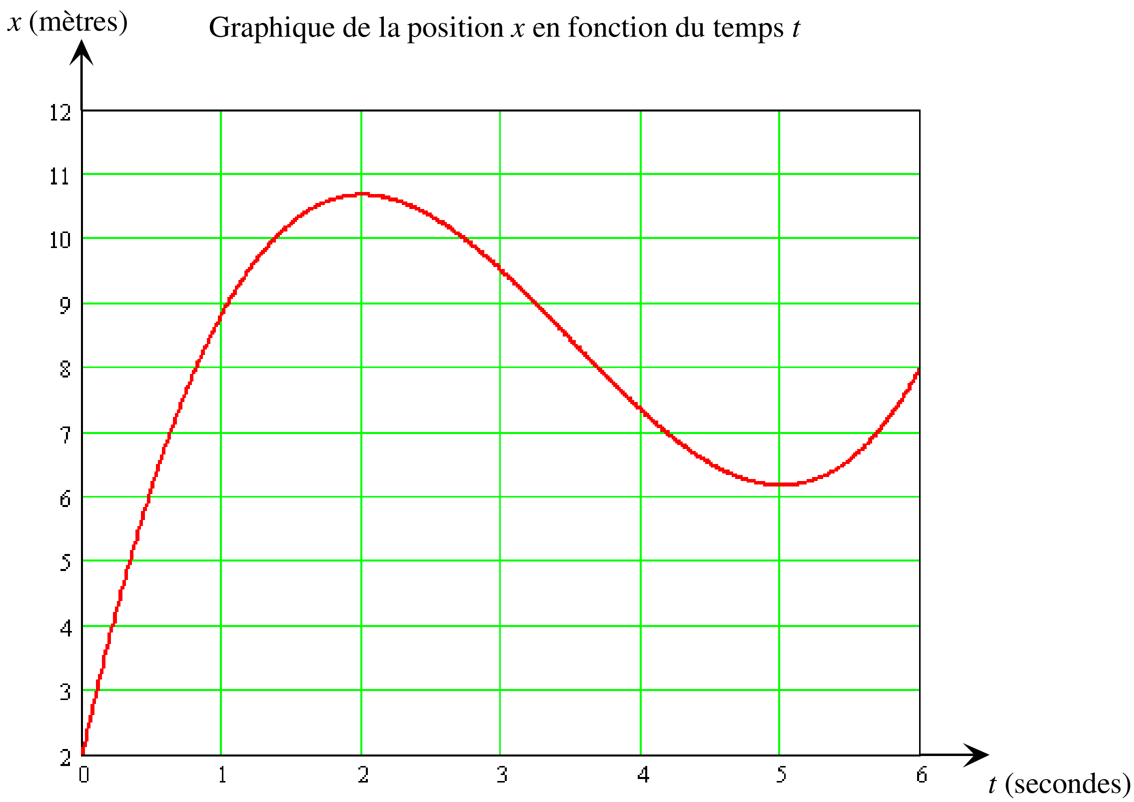
Par exemple, la pente du graphique de la page précédente est plus petite à t = 1 s qu'à t = 3 s. La vitesse est donc plus petite à t = 1 s qu'à t = 3 s.

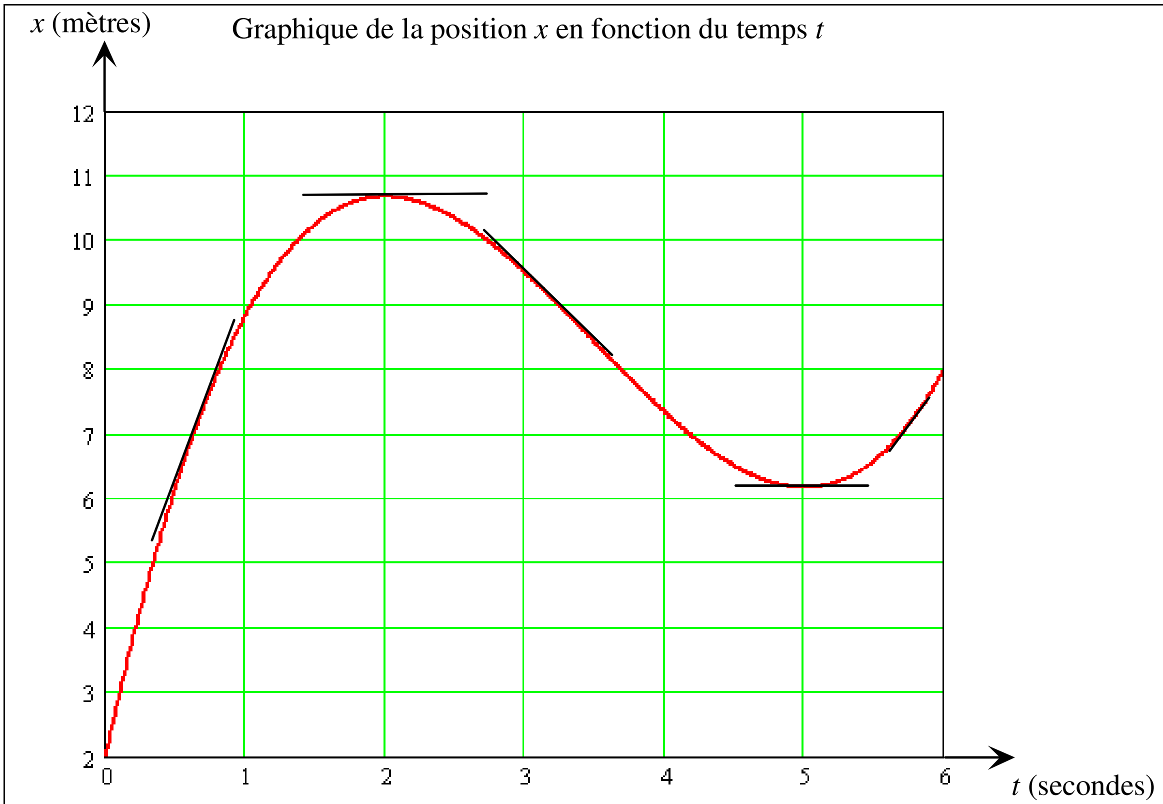
Sur le graphique $x(t)$ (Position en fonction du temps) :
si la pente est positive, alors l'objet se dirige vers les x +.
si la pente est négative, alors l'objet se dirige vers les x -.
si la pente est nulle, alors l'objet ne se dirige ni dans une direction, ni dans l'autre. L'objet est (temporairement ou non) arrêté, ou encore est en train de changer de direction.

Résumé : **le signe de la vitesse.**

v est +	l'objet se dirige vers les x+	la pente de $x(t)$ est +
v est -	l'objet se dirige vers les x-	la pente de $x(t)$ est –
$v = 0$	l'objet ne se dirige ni dans un sens, ni dans l'autre. Il peut être en train de changer de direction. La position est maximale ou minimale.	la pente de $x(t)$ =0

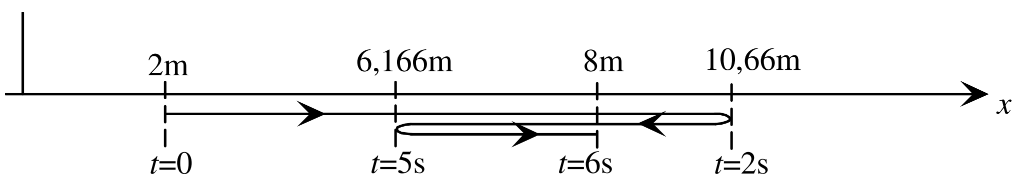
Exemple 4.6 : Quel est le signe de la vitesse pour le mouvement représenté ci-dessous?





Entre $t = 0$ et $t = 2$ s, v est + (la pente est positive)
À $t = 2$ s, $v = 0$ (la pente est nulle)
Entre $t = 2$ s et $t = 5$ s, v est – (la pente est négative)
À $t = 5$ s, $v = 0$ (la pente est nulle)
Entre $t = 5$ s et $t = 6$ s, v est + (la pente est positive).

Le mouvement de cet objet est un mouvement rectiligne qu'on pourrait dessiner ainsi :



Il est à remarquer que l'objet rebrousse chemin lorsque $v = 0$ (à $t = 2$ s et $t = 5$ s).

4.2.4 L'accélération

L'**accélération** est un concept qui devient intéressant lorsque la **vitesse** d'un objet **change** avec **le temps**. En voici la définition générale :

L'accélération est le taux de variation de la **vitesse** par rapport au temps.

4.2.4.1 L'accélération moyenne

Considérons une voiture voyageant en ligne droite. Sa vitesse (instantanée) varie progressivement avec le temps, telle qu'on peut le voir dans ce tableau :

t (secondes)	vitesse (m/s)
0	0
1	$5\,\vec{i}$
2	$10\,\vec{i}$
3	$8\,\vec{i}$

L'accélération moyenne est définie comme :

$$\boxed{\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

où : $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ (variation de la vitesse)
et : $\Delta t = t_f - t_i$ (intervalle de temps écoulé).

Les unités (SI) de l'accélération sont des **m/s²**.

Pour la voiture dont la vitesse est donnée ci-dessus, par exemple :

Entre $t = 0$ et $t = 1$ s $\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{5\,\frac{m}{s}\,\vec{i} - 0\,\frac{m}{s}\,\vec{i}}{1\text{ s} - 0\text{ s}} = 5\text{ m/s}^2\ \vec{i}$

Entre $t = 2$ et $t = 3$ s $\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{8\,\frac{m}{s}\,\vec{i} - 10\,\frac{m}{s}\,\vec{i}}{3\text{ s} - 2\text{ s}} = \text{-}2\text{ m/s}^2\ \vec{i}$

L'accélération, comme la vitesse et la position, est un vecteur. Entre $t = 0$ et $t = 1$ s, l'accélération moyenne est un vecteur en $+\vec{i}$: quand l'accélération et la vitesse sont de même sens, la grandeur de la vitesse augmente. Entre $t = 2$ et $t = 3$ s, l'accélération moyenne est un vecteur en $-\vec{i}$. Quand l'accélération et la vitesse sont de sens opposés, la grandeur de la vitesse diminue.

4.2.4.2 L'accélération instantanée

L'accélération moyenne est d'utilité limitée, un peu comme la vitesse moyenne. Ici aussi, il est souhaitable de définir une **accélération instantanée** (ou **accélération** (tout court)). Pour cela, on procède de façon analogue à ce qu'on avait fait pour la vitesse instantanée. Si on veut trouver l'accélération à t = 2 s, par exemple, il faut réduire de plus en plus l'intervalle de temps Δt (le faire tendre vers 0).

Alors :

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

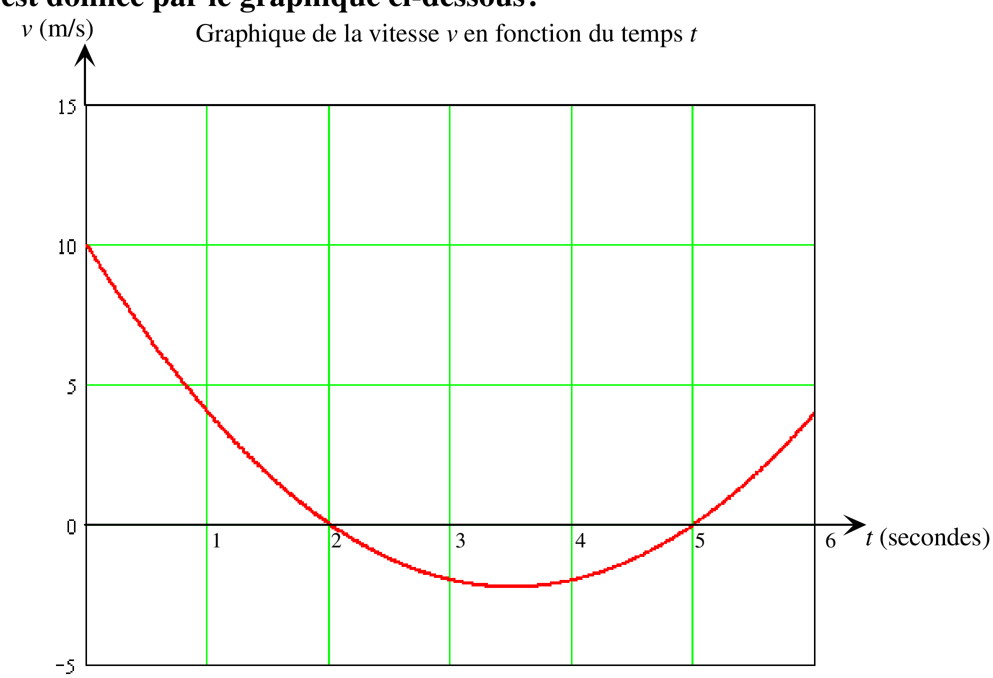
Ce qui veut dire : l'accélération est la limite de $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ quand Δt tend vers 0.

Si on veut simplement parler de la **composante de l'accélération** selon $\vec{i}$, alors :

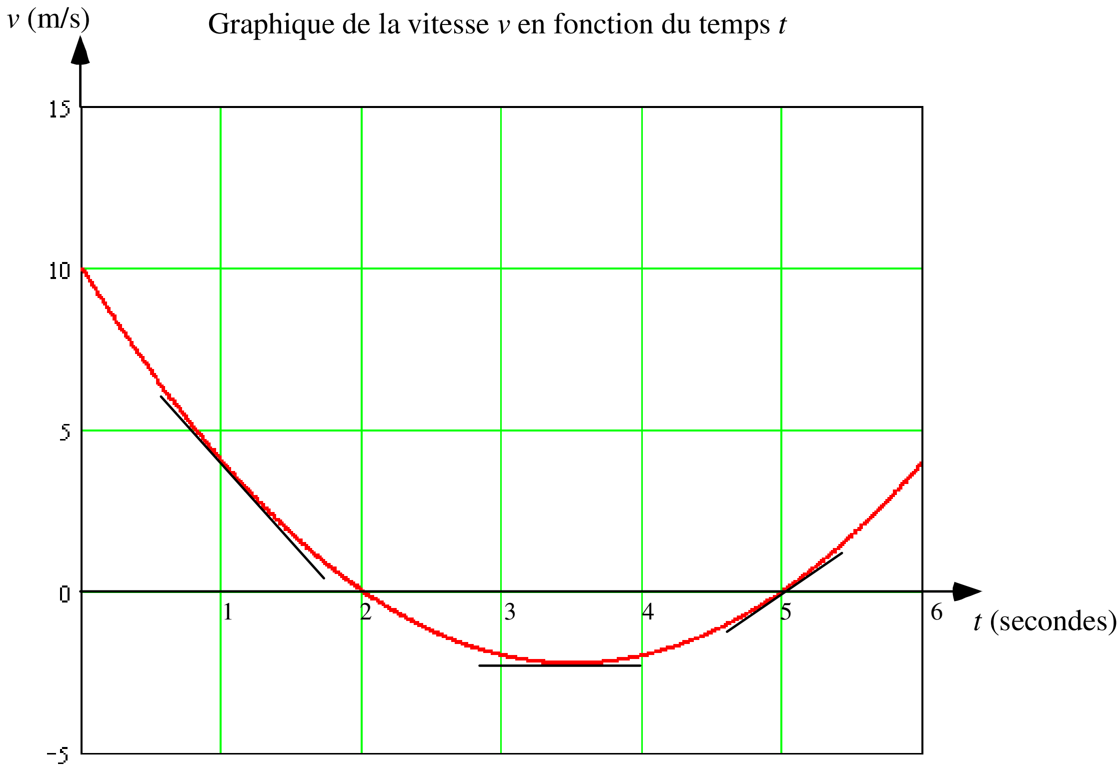
$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

On peut donner également une interprétation **graphique** à l'accélération : **L'accélération** est la **pente** de la droite tangente à la courbe « ***v* en fonction de *t*** ».

Exemple 4.7: quel est le signe de l'accélération si la vitesse d'un objet en fonction du temps est donnée par le graphique ci-dessous?



Réponse :



Entre $t = 0$ et $t = 3{,}5$ s, a est - (la pente est négative).
À $t = 3{,}5$ s, $a = 0$ (la pente est nulle).
Entre $t = 3{,}5$ s et $t = 6$ s, a est + (la pente est positive).

De plus (voir résumé page suivante) :
De $t = 0$ à $t = 2$ s, la grandeur de la vitesse diminue (a et v de signes contraires).
De $t = 2$ à $t = 3{,}5$ s, la grandeur de la vitesse augmente (a et v de même signe).
De $t = 3{,}5$ à $t = 5$ s, la grandeur de la vitesse diminue (a et v de signes contraires).
De $t = 5$ à $t = 6$ s, la grandeur de la vitesse augmente (a et v de même signe).

À $t = 3{,}5$ s, la vitesse est minimale ($a = 0$).

Résumé : **le signe de l'accélération.**

a est +	La pente de $v(t)$ est +
a est -	La pente de $v(t)$ est -
$a = 0$	la pente de $v(t)$ est nulle. La vitesse est maximale ou minimale, ou constante.
a est de même signe que v	La grandeur de la vitesse augmente
a est de signe contraire à v	La grandeur de la vitesse diminue

4.2.5 Surface sous la courbe du graphique *v*(*t*)

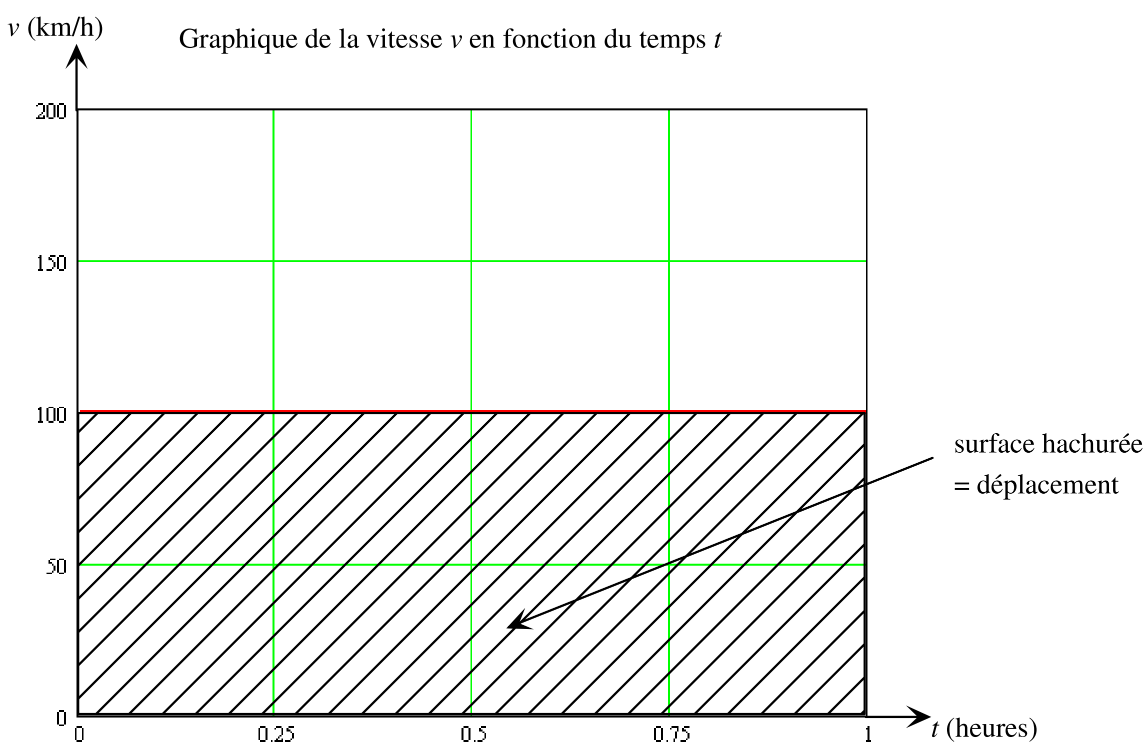
Si une voiture voyage à une vitesse **constante** de 100 km/h $\vec{i}$, quel sera son déplacement après une heure? On peut utiliser la définition de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

et isoler $\Delta\vec{x}$: $\quad \Delta\vec{x} = \vec{v}_{moy}\Delta t$

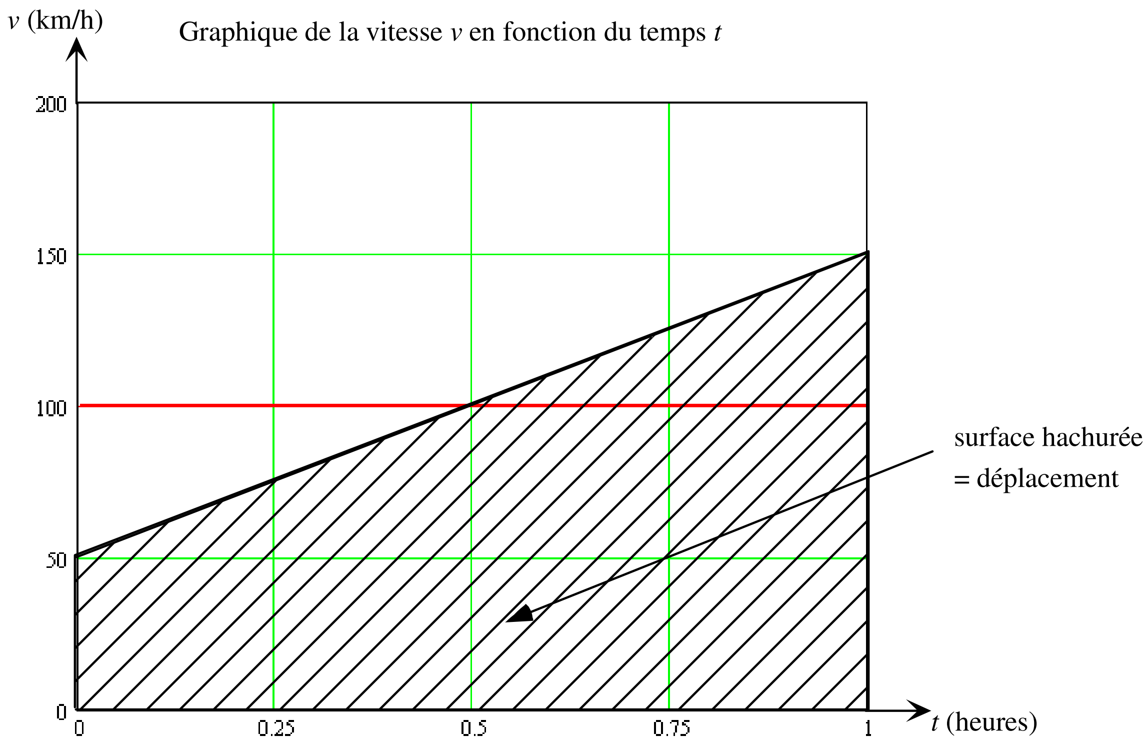
alors $\quad \Delta\vec{x} = 100\text{ km/h}\,\vec{i} \times 1\text{h} = 100\text{ km}\,\vec{i}$.

Sur un graphique $v(t)$, cette multiplication est équivalente à une multiplication base $\times$ hauteur, c'est-à-dire à une **surface**.



Si la vitesse varie dans le temps, le déplacement total est toujours égal à la surface sous la courbe $v(t)$.

Exemple: si la vitesse de la voiture varie linéairement de 50 km/h à 150 km/h pendant le même temps (1 h), la vitesse moyenne est encore de 100 km/h $\vec{i}$ et le déplacement est encore de 100 km $\vec{i}$. La surface sous la courbe est demeurée la même.



Enfin, si on veut calculer correctement le déplacement on doit tenir compte de la direction du mouvement. Le déplacement peut être positif ou négatif. **La surface sous la courbe devrait donc être positive (si v est +) ou négative (si v est -).**

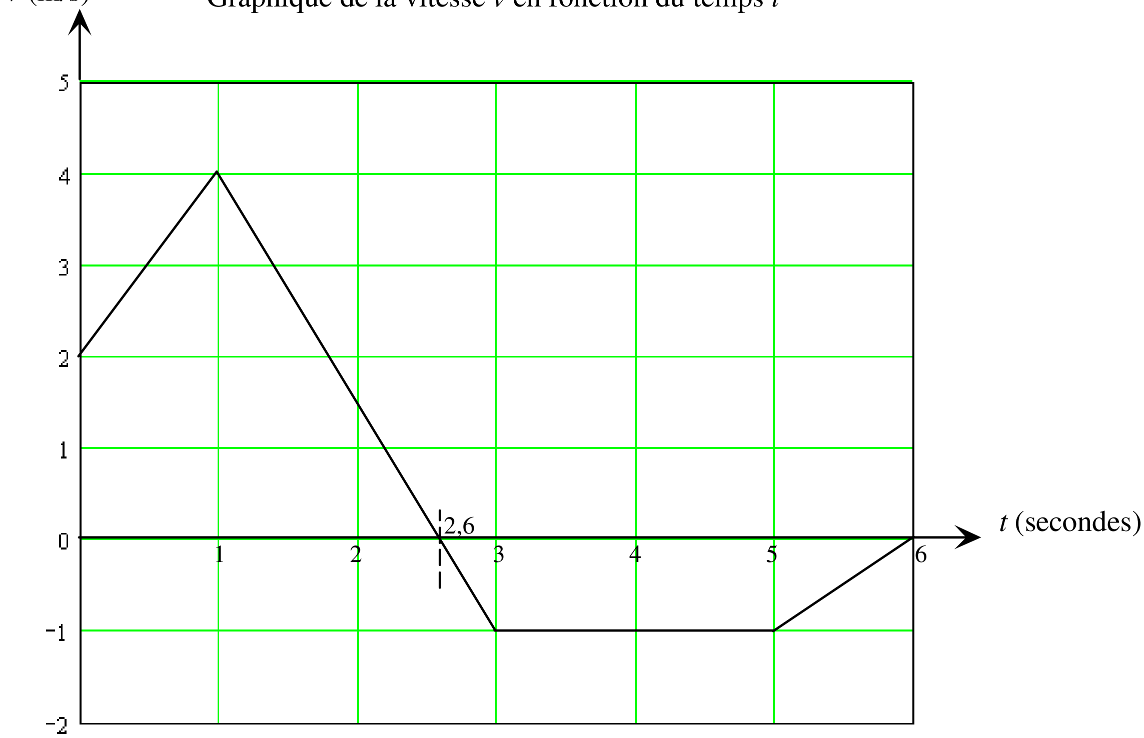
Exemple 4.8 :

La vitesse d'un objet est décrite en fonction du temps par le graphique ci-dessous.

a) calculez le déplacement total de cet objet.

b) tracez sur un graphique l'accélération a en fonction du temps.

Graphique de la vitesse v en fonction du temps t



a) Le déplacement est la surface sous la courbe. Cette surface est positive entre $t = 0$ et $t = 2{,}6$ s ; elle est négative entre $t = 2{,}6$ s et $t = 6$ s.

$$\begin{aligned}\text{Déplacement} &= (2\text{ m/s})(1\text{s}) + \tfrac{1}{2}(4\text{ m/s}- 2\text{ m/s})(1\text{s}) + \tfrac{1}{2}(4\text{ m/s}- 0\text{ m/s})(2{,}6\text{ s}- 1\text{ s}) \\ &\quad - \left(\tfrac{1}{2}(1\text{ m/s})(3\text{ s}- 2{,}6\text{ s}) + 1\text{m/s}(5\text{ s}- 3\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(1\text{m/s})(6\text{ s}- 5\text{ s})\right) \\ &= +3{,}5\text{ m}\end{aligned}$$

ou encore $\Delta\vec{x} = +3{,}5\text{ m }\vec{i}$

b) accélération a : il s'agit de la **pente** du graphique $v(t)$.

Donc :

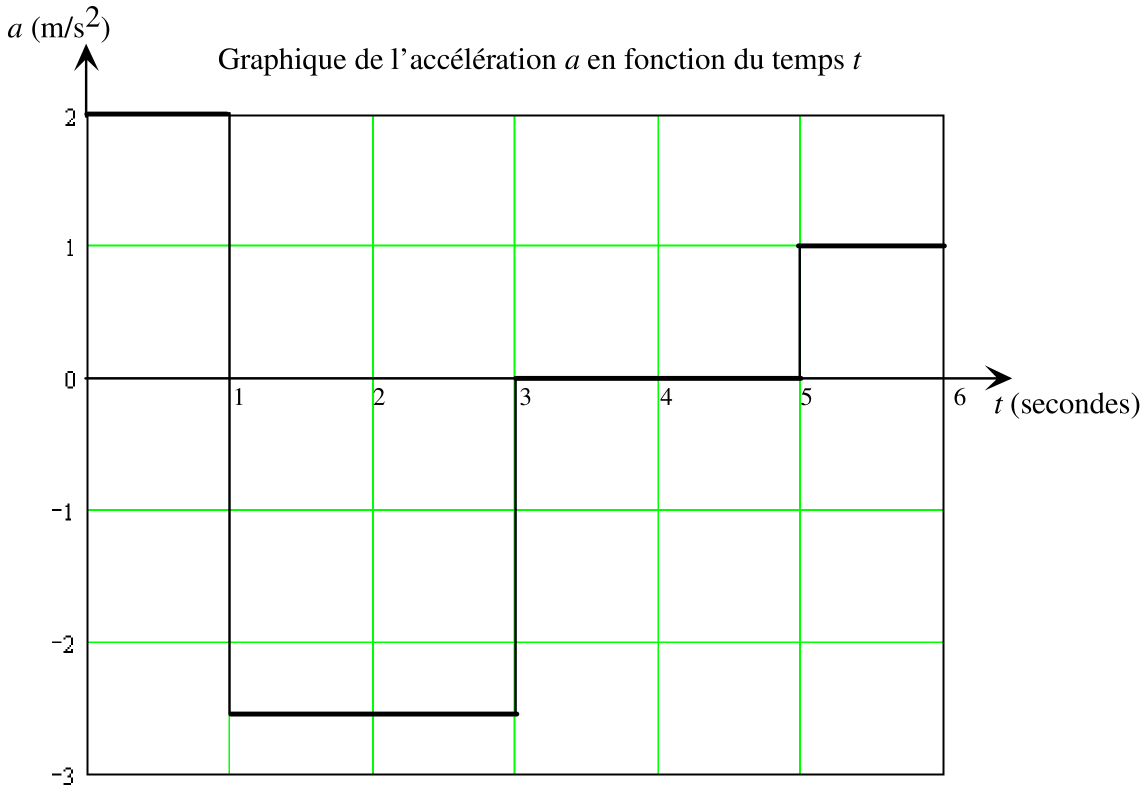
De $t = 0$ à $t = 1$ s $\quad a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{4\text{ m/s} - 2\text{ m/s}}{1\text{s}} = +2\text{ m/s}^2$

De $t = 1$ à $t = 3$ s $\quad a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{-1\text{m/s} - 4\text{m/s}}{2\text{s}} = -2{,}5\text{ m/s}^2$

De $t = 3$ à $t = 5$ s $\quad a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{-1\text{m/s} - (-1\text{m/s})}{2\text{s}} = 0\text{ m/s}^2$

De $t = 5$ à $t = 6$ s $\quad a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0\text{ m/s} - (-1\text{m/s})}{1\text{s}} = +1\text{ m/s}^2$

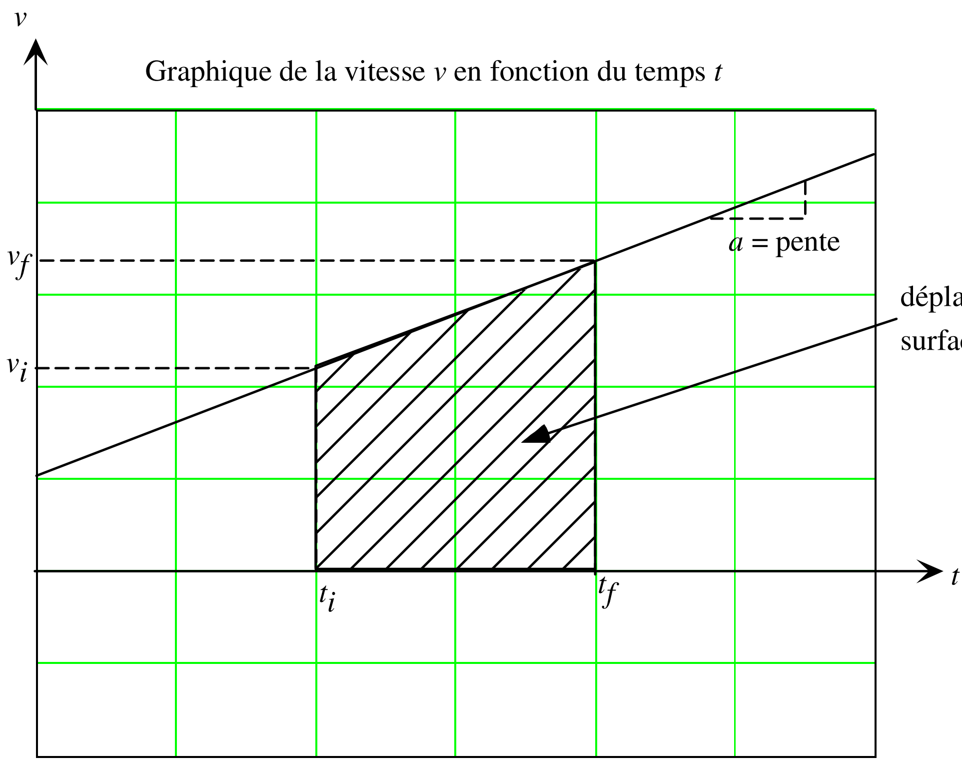
Suite de l'exemple précédent : si on trace l'accélération en fonction du temps, on obtient :



4.2.6 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Dans cette section, on considère un cas particulier de mouvement rectiligne : celui où **l'accélération *a* est une constante**. Dans ce cas particulier, on déduit des équations simples et utiles reliant la position, la vitesse et l'accélération.

L'accélération est la pente de la courbe $v(t)$. Si elle est constante, c'est donc que la pente de $v(t)$ est constante : $v(t)$ est donc une droite.



1) Comme précédemment, « i » indique « initial » et « f » indique « final ».

La pente est donnée par $a = \dfrac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

Si on isole v_f dans la dernière équation, on obtient :

$$\boxed{v_f = v_i + a(t_f - t_i)}$$

2) Le déplacement est la surface sous la courbe, alors :

Déplacement = $x_f - x_i$ = surface du rectangle + surface du triangle

$= v_i\,(t_f - t_i) + \frac{1}{2}(v_f - v_i)\,(t_f - t_i)$

$= v_i\,(t_f - t_i) + \frac{1}{2}[\,a(t_f - t_i)\,]\,(t_f - t_i)$

Si on isole x_f dans la dernière équation, on obtient :

$$\boxed{x_f = x_i + v_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a(t_f - t_i)^2}$$

Enfin on peut combiner ces 2 équations encadrées en suivant les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} x_f - x_i &= v_i\,(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}(v_f - v_i)\,(t_f - t_i) \\ &= (t_f - t_i)\,[v_i + \tfrac{1}{2}(v_f - v_i)] \\ &= (t_f - t_i)\,[\tfrac{1}{2}(v_f + v_i)] \end{aligned}$$

et comme $(t_f - t_i) = (v_f - v_i)/a$

$$\begin{aligned} x_f - x_i &= \frac{(v_f - v_i)}{a}\,\frac{1}{2}\,(v_f + v_i) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(v_f^2 - v_i^2)}{a} \end{aligned}$$

ou encore:

$$\boxed{v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)}$$

Résumé : Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + a(t_f - t_i) \\ x_f &= x_i + v_i(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a(t_f - t_i)^2 \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{aligned}$$

Attention!

1) Ces équations ne sont applicables que si l'accélération est une constante!

2) Comme on peut trouver la 3ème équation en combinant les 2 premières, ce ne sont pas 3 équations indépendantes. On ne pourra donc pas trouver 3 inconnues avec ces 3 équations.

Exemple 4.9 : Un camion se déplace à 120 km/h. Voyant un chevreuil sur la route, il met brusquement les freins et décélère de façon constante au rythme de 7,8 m/s². Calculez sa distance de freinage ainsi que le temps mis par le camion pour s'arrêter.

La vitesse initiale du camion est v_i =120 km/h × 1000m/1km × 1h/3600s = 33,33 m/s.
On peut supposer que le temps initial est t_i = 0 s, et que la position initiale du camion est x_i = 0 m.
Le camion décélère, donc l'accélération « a » sera de signe opposé à celui de la vitesse : a = -7,8 m/s².

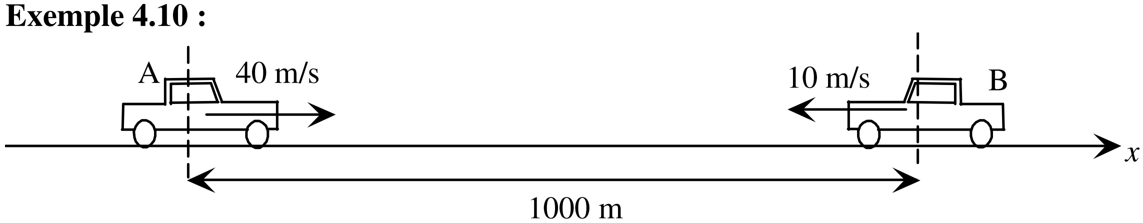
$$v_f = v_i + a(t_f - t_i) \quad \Rightarrow \quad 0 \text{ m/s} = 33{,}33 \text{ m/s} + (-7{,}8 \text{ m/s}^2)(t_f - 0)$$

$\boldsymbol{t_f}$ **= 4,27 s.**

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \Rightarrow \quad (0 \text{ m/s})^2 = (33{,}33 \text{ m/s})^2 + 2(-7{,}8 \text{ m/s}^2)(x_f - 0)$$

$\boldsymbol{x_f}$ **= 71,2 m.**

Exemple 4.10 :



Deux voitures (A et B) sont, au temps t = 0, dans la situation ci-dessus. Elles voyagent sur une route, dans deux voies différentes (il n'y aura pas d'accident !). La voiture A décélère au rythme constant de 0,5 m/s² et la voiture B accélère au rythme constant de 1 m/s². Où et quand se croiseront-elles?

Voiture A : elle se dirige vers les x+ donc v_{iA} = +40 m/s.
On peut poser que x_{iA} = 0 m.
Elle décélère, donc a est de signe opposé à v : a_A = -0,5 m/s².

Voiture B : elle se dirige vers les x- donc v_{iB} = -10 m/s.
x_{iB} = +1000 m.
Elle accélère, donc a est de même signe que v : a_B = -1 m/s².

Lorsque les 2 voitures se croisent, elles sont à la même position :

$$x_{fA} = x_{fB}$$

$$x_{iA} + v_{iA}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2} a_A (t_f - t_i)^2 = x_{iB} + v_{iB}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2} a_B (t_f - t_i)^2$$

$$0 \text{ m} + 40 \text{ m/s}(t_f - 0) + \tfrac{1}{2}(-0{,}5 \text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2 = 1000 \text{ m} + -10 \text{ m/s}(t_f - 0) + \tfrac{1}{2}(-1 \text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2$$

On résout pour t_f : $\boldsymbol{t_f}$ **= 18,32 s.**

La position de la voiture A est alors $\boldsymbol{x_{fA}}$ **= 648,9 m.**

Exemple 4.11: Une voiture A est arrêtée sur une route de campagne. Au temps *t* = 0, un tracteur B passe à côté de A et voyage à une vitesse constante de 50 km/h. Après 10 s, la voiture A démarre et accélère (*a* = 3 m/s²). À quelle distance de son point de départ sera la voiture lorsqu'elle dépassera le tracteur?

On peut supposer que la position de départ des deux véhicules est $x_i = 0$. Pour la voiture, le temps initial sera $t_i = 10$ s.

Pour le tracteur : $a_B = 0$ (vitesse constante)

$v_{iB} =$ 50 km/h × 1000 m/1 km × 1 h/3600 s = 13,89 m/s.

Pour la voiture : $v_{iA} = 0$ m/s.

La voiture dépassera le tracteur lorsque :

$$x_{fA} = x_{fB}$$

$$x_{iA} + v_{iA}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_A(t_f - t_i)^2 = x_{iB} + v_{iB}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_B(t_f - t_i)^2$$

$$0\text{ m} + 0\text{ m/s}(t_f - 10\text{ s}) + ½(3\text{ m/s}^2)(t_f - 10\text{ s})^2 = 0\text{ m} + 13{,}89\text{ m/s}(t_f - 0) + ½(0\text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2$$

Cette équation a deux solutions: t_f =3,95s et t_f =25,31s… La première n'a aucun sens (avant t =10s, l'auto A était encore au repos).

Donc t_f = 25,31s

Et x_{fA} = 0 m + 0 m/s(25,31 s –10 s)+ ½(3 m/s²)(25,31 s –10 s)² $\qquad$ $\boldsymbol{x_{fA}}$ **= 351,6 m**.

4.2.7 Chute libre

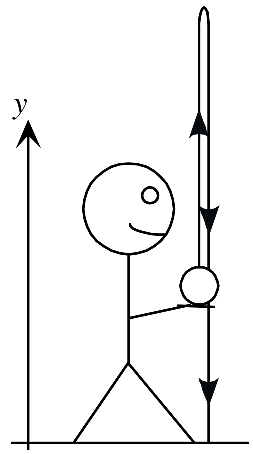


Figure 4.6 : Un exemple de chute libre

À la figure 4.6, l'enfant lance une balle de baseball verticalement vers le haut et celle-ci redescend jusqu'au sol. Ce mouvement rectiligne est, si on néglige la résistance de l'air sur la balle, un bon exemple de MRUA : il s'agit d'une chute libre.

La **chute libre** est un mouvement rectiligne d'un objet subissant **une seule force : la force gravitationnelle.**

Ici la balle est en chute libre **à partir du moment où elle quitte la main de l'enfant** jusqu'à ce qu'elle soit **tout juste sur le point de toucher le sol**. En effet si le sol ou l'enfant touche à la balle, il y a alors d'autres forces que la force gravitationnelle sur la balle!

En réalité, l'air agit à tout moment sur la balle… Cette force est généralement petite, si on la compare à la force gravitationnelle. On la négligera dans nos calculs.

Si on fait un diagramme de forces (DCL) de la balle (entre le moment où elle quitte la main de l'enfant et le moment où elle effleure le sol), et si on néglige la résistance de l'air, il ne reste que : la force gravitationnelle (ou le poids)!

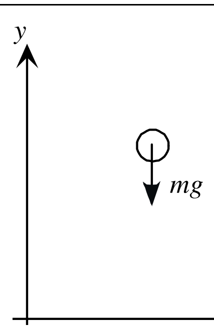


Figure 4.7 : DCL de la balle.

Si on applique la 2ème loi de Newton à la balle :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$-mg\,\vec{j} = m\vec{a}$$
$$donc\ \vec{a} = -g\,\vec{j} = -\ 9{,}81\ \text{m/s}^2\,\vec{j}$$

On remarque qu'en chute libre, l'accélération est la même, **peu importe la masse de l'objet.**

Comme le mouvement est vertical, il est d'usage d'utiliser « *y* » plutôt que « *x* » pour décrire ce mouvement. Comme on a choisi de placer l'axe des « *y* » vers le haut, alors $\boldsymbol{a_y}$ **= -9,81 m/s²** (c'est une **constante**).

Donc la chute libre est un MRUA (mouvement rectiligne uniformément accéléré) avec $\boldsymbol{a_y}$ **= -9,81 m/s²**. Les équations du MRUA dans ce cas sont résumées ci-dessous.

Résumé : Chute libre

$$v_{fy} = v_{iy} + a_y(t_f - t_i)$$
$$y_f = y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_y(t_f - t_i)^2 \qquad a_y = -9{,}81\ \text{m/s}^2$$
$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y(y_f - y_i)$$

À la figure 4.8, on peut voir les différentes phases du mouvement de la balle.

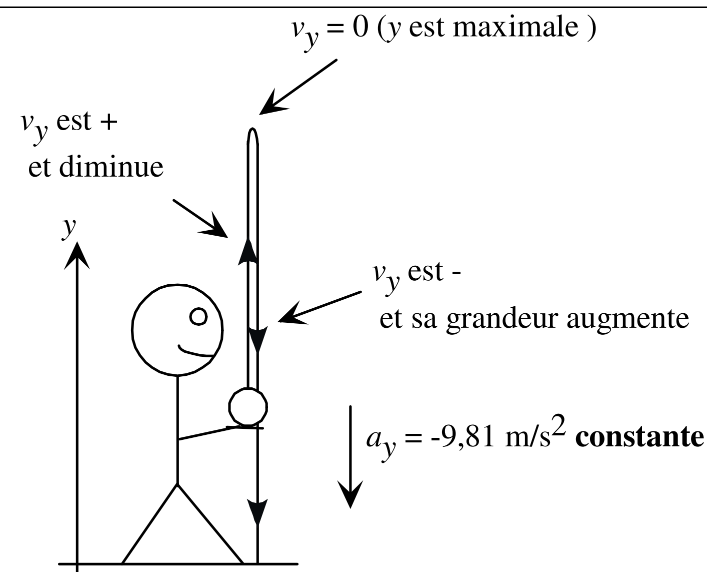
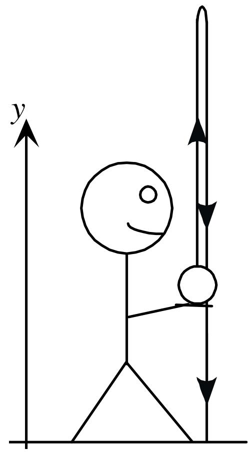


Figure 4.8: Chute libre.

Exemple 4.12 :



Une balle est lancée vers le haut par un petit garçon, d'une hauteur de 1,5 m. Elle touche terre 4 s plus tard. a) Quelle était la vitesse initiale de la balle? b) Quelle est sa hauteur maximale par rapport au sol?

a) On sait que y_i = 1,5 m et $y_f \approx$ 0 m (lorsque la balle arrive tout juste au-dessus du sol). La balle étant en chute libre, a_y = -9,81 m/s^2.

$$y_f = y_i + v_{iy}\,(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2} a_y (t_f - t_i)^2$$
$$0 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m} + v_{iy}\,(4 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9{,}81 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s})^2$$

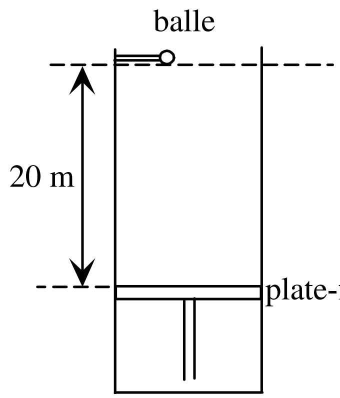
On résout : $\boldsymbol{v_{iy}}$ **= +19,245 m/s** (+ : la balle est lancée vers les y+)

b) Lorsque la balle atteint une hauteur maximale, v_y = 0. On sait donc que v_{iy} = +19,245 m/s et que v_{fy} = 0 m/s. On cherche la hauteur maximale h ($y_f = h$).

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2a_y(y_f - y_i)$$
$$(0 \text{ m/s})^2 = (19{,}245 \text{ m/s})^2 + 2(-9{,}81 \text{ m/s}^2)(h - 1{,}5 \text{ m})$$

On résout : $\boldsymbol{h}$ **= 20,38 m**

Exemple 4.13 :



À t = 0, on laisse tomber la balle, qui est à 20 m au-dessus d'une plate-forme, qui monte avec une vitesse constante de 3 m/s. À quel instant la balle touchera-t-elle la plate-forme?

Plate-forme : vitesse constante, donc $a_y = 0$ m/s^2

Balle : chute libre, donc $a_y = -9{,}81$ m/s^2. Puisqu'on « laisse tomber » la balle, $v_{iy} = 0$ m/s.

La rencontre aura lieu lorsque $y_{f\,(\text{balle})} = y_{f\,(\text{plate-forme})}$.

$$(y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_y(t_f - t_i)^2)_{\text{balle}} = (y_i + v_{iy}(t_f - t_i) + \tfrac{1}{2}a_y(t_f - t_i)^2)_{\text{plate-forme}}$$

$$20\text{ m} + 0 + \tfrac{1}{2}(-9{,}81\text{ m/s}^2)(t_f - 0)^2 = 0\text{ m} + 3\text{ m/s}(t_f - 0) + 0$$

On résout: $\boldsymbol{t_f = 1{,}74}$ **s.**

Problèmes du chapitre 4:

Cinématique : MRUA

1. Un chariot propulsé par une fusée se déplace sur une voie rectiligne horizontale. On utilise ce système pour étudier les effets physiologiques des fortes accélérations sur le corps humain. Un tel chariot peut atteindre une vitesse de 1600 km/h en 1,8 seconde à partir du repos.

   a) Comparez cette accélération avec celle de la gravité g = 9,8 m/s^2; (Supposez l'accélération du chariot constante).
   b) Quelle distance parcourt le chariot pendant 1,8 seconde ?

2. Une sonde spatiale se déplace en l'absence de tout champ de force avec une accélération constante de 9,8 m/s^2.

   a) Si elle part du repos, quel temps lui sera nécessaire pour atteindre une vitesse égale à un dixième de la vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8$ m/s) ?
   b) Quelle distance aura-t-elle franchi pendant ce temps ?

3. Un avocat vient vous consulter sur un problème physique qu'entraîne une cause. Il s'agit de savoir si le conducteur d'un véhicule excédait la vitesse limite de 50 km/h au moment où il a freiné d'urgence. La longueur des traces laissées par le glissement des roues sur la route est de 5,85 m. L'agent de police, estimant que la décélération ne pouvait être supérieure à 10 m/s^2, a arrêté le conducteur pour excès de vitesse.

   Le conducteur dépassait-il la vitesse permise ? Expliquez votre réponse.

4. Deux trains, l'un voyageant à 100 km/h et l'autre à 130 km/h, se dirigent l'un vers l'autre sur une même voie rectiligne. À 3 km l'un de l'autre, les conducteurs s'aperçoivent et appliquent les freins.
   Si les freins ralentissent chaque train au taux de 1 m/s^2, déterminez s'il y aura collision.

5. Une rame de métro part d'une station en accélérant au taux de 1,20 m/s^2 sur la moitié de la distance la séparant de la prochaine station. Elle ralentit ensuite au même taux sur la deuxième moitié du parcours. Si les stations sont distantes de 1100 m, déterminez :

   a) le temps de parcours entre les stations;
   b) la vitesse maximale de la rame de métro.

6. Au moment où le feu de circulation passe au vert, un automobiliste démarre avec une accélération constante de 2 m/s^2. Au même instant, un camion vient doubler l'automobile à une vitesse constante de 10 m/s.

   a) Au bout de quelle distance l'automobiliste rattrapera-t-il le camion ?
   b) Quelle sera la vitesse de l'auto à cet instant ?

   N.B. Il est peut-être utile de tracer un graphique de la position x des 2 véhicules en fonction du temps.

7. Une automobile, se déplaçant à 56 km/h, se trouve à 35 m d'un obstacle lorsque le conducteur décide d'appliquer les freins. Quatre secondes plus tard, la voiture heurte l'obstacle.

   a) Quelle était l'accélération de la voiture avant l'impact ?
   b) Quelle était la vitesse instantanée du véhicule immédiatement avant la collision ?

Chute libre

Note : <u>on néglige la résistance de l'air.</u>

8. On lance une balle verticalement vers le haut pour qu'elle atteigne une hauteur de 15 mètres.

   a) À quelle vitesse devra-t-on la lancer ?
   b) Quel sera le temps de vol de la balle ?

9. Une montgolfière s'élève à une vitesse constante de 12 m/s; à une altitude de 80 mètres, on laisse tomber un paquet.

   Dans combien de temps le paquet atteindra-t-il le sol ?

10. Du haut d'un plongeoir de 5 mètres on laisse tomber une balle de plomb dans un lac. Elle frappe l'eau à une certaine vitesse et conserve cette vitesse jusqu'au fond du lac. Elle atteint le fond du lac 5 secondes après avoir été lâchée.

    a) Quelle est la profondeur du lac ?
    b) Supposons que l'on vide le lac. On tire à nouveau la balle, du même plongeoir, et elle touche le fond du lac 5 secondes plus tard. Quelle est cette fois-ci la vitesse initiale de la balle ? (grandeur et sens).

11. Une fusée est mise à feu verticalement, et monte avec une accélération constante de 20 m/s^2 pendant 1.0 minute. À ce moment, son carburant est épuisé et elle devient une particule en chute libre.

    a) Quelle hauteur maximale atteindra-t-elle ?
    b) Quel sera le temps de vol de la fusée, depuis son décollage jusqu'à son retour au sol ?

12. Un parachutiste tombe en chute libre sur une distance de 50 mètres. Lorsque son parachute s'ouvre, il décélère au taux de 2 m/s^2. Il se pose au sol avec une vitesse de 3 m/s.

    a) Combien de temps passe le parachutiste dans les airs ?
    b) De quelle hauteur a-t-il sauté ?

Réponses :

1. **a) a = 246,91 m/s^2, ainsi a/g = 25,17**
   b) x = 400 m

2. **a) t = 35,39 jours ($t = 3.06 \times 10^6$ s)**
   b) distance = $4,59 \times 10^{13}$ m

3. **Non, puisque la distance de freinage pour une décélération de 10 m/s^2 est de 9,64 m, si la vitesse initiale est de 50 km/h**

4. **Non**

5. **a) t = 60,55 s**
   b) v = 36,33 m/s

6. **a) distance = 100 m**
   b) v = 20 m/s

7. **a) a = - 3,40 m/s^2**
   b) v = 1,94 m/s.

8. **a) v_i = +17,155 m/s   b) t = 3,5 s**

9. **t = 5,44 s**

10. **a) x = 39,52 m b) v_i = +15,62 m/s**

11. **a) $h = 1,09 \times 10^5$ m b) t = 331,66 s**

12. **a) t = 17,35 s b) h = 293 m.**