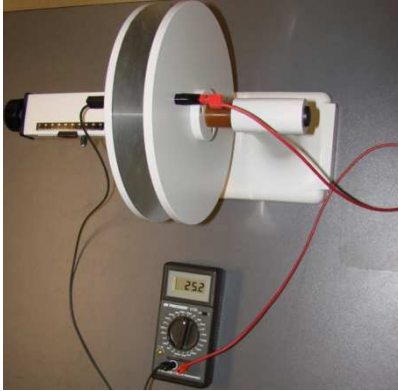


Électricité et magnétisme (PHY 332)



Laboratoire :

Étude de la capacité de deux disques parallèles

Nom : _____	Groupe : _____
Nom : _____	Groupe : _____
Nom : _____	Groupe : _____

Date de remise : _____

Remis à : _____

(nom de l'enseignant)

1 Parties prélaboratoires

Introduction

Le présent laboratoire s'inscrit dans l'étude des condensateurs, et concerne plus particulièrement la capacité d'un condensateur constitué de deux disques conducteurs disposés en parallèle. Trois modèles théoriques du calcul de la capacité seront confrontés aux résultats expérimentaux effectués à l'aide d'un capacimètre dans le but d'identifier le modèle qui représente le plus fidèlement la capacité mesurée du condensateur.

Cadre théorique

L'étude portant sur les condensateurs débute avec une définition de la capacité.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (1)$$

La charge du condensateur est notée Q , et la différence de potentiel entre les armatures est notée ΔV . Le condensateur variable proposé pour l'expérimentation est formé de deux disques parallèles de mêmes rayons, dont la distance d entre les disques peut être variée.

Une première expression pour la capacité des disques parallèles peut être obtenue en calculant la différence de potentiel entre les deux disques et en appliquant le résultat en (1). Le calcul du potentiel à une distance x dans l'axe d'un disque est donné par la fonction $V(x)$, où r est le rayon des disques.

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{r^2 + x^2} - |x|) \quad (2)$$

Selon la figure 1, nous pouvons calculer la différence de potentiel notée ΔV entre les disques.

$$\Delta V = V_B - V_A \quad (3)$$

Chacun des deux disques crée un potentiel au point B, et chacun des deux disques crée un potentiel au point A. Les deux potentiels créés au point A doivent être additionnés, et de même pour ceux du point B. Par exemple, il s'ensuit que $V_B = V_{B1} + V_{B2}$.

Après calcul, on obtient alors l'expression mathématique de la capacité des disques parallèles (libellé **modèle 1**).

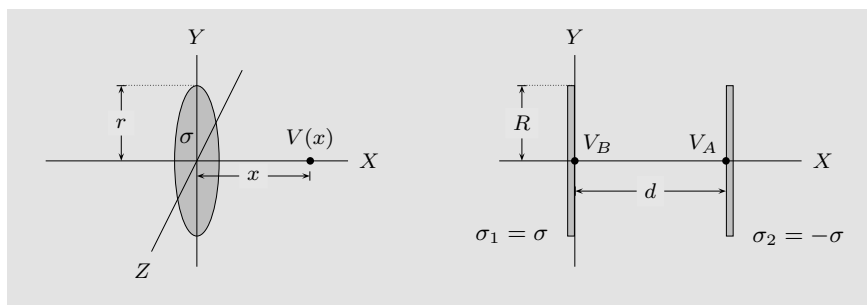


Figure 1 Potentiel au voisinage d'un disque (à gauche) ; deux disques formant un condensateur (à droite).

$$C_{m1} = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d + r - \sqrt{r^2 + d^2}} \quad (4)$$

La distance entre les armatures est la variable indépendante d . Si les paramètres d et r sont en mètres, alors la capacité C est en Farad. La permittivité de l'air étant très près de celle du vide, nous utiliserons la permittivité du vide, soit $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Une expression mathématique simplifiée (libellée **modèle 2**) s'obtient en considérant que la distance d est négligeable comparativement au rayon R des disques. La démonstration de l'expression du modèle 2 peut être faite à partir de l'expression du champ et du potentiel au voisinage d'un plan, ou bien en simplifiant l'expression du modèle 1 en supposant $r \gg d$.

$$C_{m2} = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} \quad (5)$$

Les deux modèles développés à présent admettent l'hypothèse selon laquelle les charges sont distribuées uniformément sur la surface des disques. De plus, le modèle 2 fait aussi l'hypothèse que le rayon des disques est beaucoup plus grand que l'espace entre les disques. Une analyse plus poussée du phénomène montre que les charges ne sont pas nécessairement distribuées uniformément, et que le champ n'est pas uniforme en périphérie des disques (voir l'exemple de simulation à l'annexe A). Considérons à présent un troisième modèle de la capacité des disques parallèles. Le **modèle 3** présenté ci-dessous, attribué à Kirchhoff¹, tente de tenir compte des non-uniformités du champ et de la répartition des charges, mais est aussi une solution inexacte.

$$C_{m3} = \varepsilon_0 r \left(\frac{\pi r}{d} + 2 \ln \left(\frac{8\pi r}{d} \right) - 2 \right) \quad (6)$$

En somme, les trois expressions présentées en (4), (5) et (6) constituent les modèles théoriques à utiliser durant l'étude.

Stratégie expérimentale

Les expressions des capacités selon les trois modèles font intervenir uniquement des paramètres liés à la géométrie du condensateur et la constante de permittivité électrique. Des mesures capacitatives seront prises sur un condensateur variable au laboratoire, et ce pour différents espacements d entre les disques. Une analyse graphique avec un logiciel de type Excel permettra alors de déterminer si chaque modèle est conforme aux données recueillies, et permettra aussi d'identifier le modèle le plus fiable.

Manipulations

Effectuez les manipulations suivantes et inscrivez vos résultats dans le tableau 1 à la page 4.

1. Branchez les fils dans le capacimètre et placez les extrémités libres sur la table, près du condensateur. N'effectuez pas le branchement au condensateur immédiatement, mais essayez de reproduire les conditions qui seront utilisées durant la prise de mesure (position des fils, position des expérimentateurs près du montage, etc.).
2. Si votre appareil possède un réglage d'échelle manuel, placez-le à la position 200 pF.

1. Adaptation de l'équation (34) dans : Weng Cho Chew et Jin Au Kong, *Effects of Fringing Fields on the Capacitance of Circular Microstrip Disk*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 28, no. 2, février 1980. Certains auteurs citent une expression légèrement différente et non égale à l'équation en (6) pour le modèle de Kirchhoff (voir Wintle et Kurylowicz 1985, ou Norgren et Jonsson 2009).

d	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	C_{exp}
mm	pF	pF	pF	pF
5				
7				
9				
11				
13				
15				
18				
22				
26				
30				
35				
40				
45				
50				
55				
60				
65				
70				
Rayon r des disques (en mm) :				

Tableau 1 Mesures expérimentales et calculs théoriques de la capacité en fonction de la distance.

- Si l'appareil n'indique pas une valeur près de 0 pF, alors faites le zéro sur l'appareil. Ceci peut être effectué à l'aide d'un bouton-vis ou d'une touche du type "zéro" ou "rel". Si vous ne pouvez faire le zéro, notez la valeur indiquée par le capacimètre à vide et ajustez vos mesures en conséquence.
- Mesurez le diamètre des plaques (faites une moyenne de trois mesures). Calculez le rayon correspondant et indiquez-le dans le tableau 1.
- Déchargez le condensateur en collant les plaques l'une contre l'autre ($d = 0$). Séparez les plaques et assurez-vous qu'elles sont bien parallèles. Reliez ensuite les fils du capacimètre aux plaques.
- Mesurez la capacité des plaques pour différentes distances d et notez vos résultats dans le tableau 1.

2 Résultats et analyse

Votre rapport doit comporter, entre autres, des réponses aux questions ci-dessous. Les graphiques et calculs peuvent être effectués avec Excel. Les graphiques doivent être présentés en format pleine page 8,5"×11".

- Le tableau 1 doit contenir les résultats expérimentaux ainsi que les calculs effectués selon les trois modèles théoriques présentés en (4), (5) et (6). Présentez un tableau similaire dans votre rapport.

2. Sur un même graphique, tracez les graphes de la capacité en fonction de la distance pour la capacité expérimentale et les trois modèles théoriques. Identifiez clairement quelle courbe correspond à quelle catégorie de données.
3. En vous basant sur votre graphique, quel modèle est le plus fiable et représente le mieux vos résultats expérimentaux ? Quel modèle est le moins fiable ? Tentez d'expliquer les raisons de ces résultats.
4. Sur un même graphique, tracez le graphe des pourcentages d'écart entre les valeurs théoriques et expérimentales, en fonction de la distance, afin de confirmer votre choix au point précédent. Commentez brièvement. Utilisez le calcul suivant pour les écarts : $100\% \cdot |C_{\text{exp}} - C_{mn}| / C_{mn}$, $n \in \{1,2,3\}$.
5. En observant le graphique des écarts en 4), estimez la plage utilisable pour la distance d pour chaque modèle si on tolère au maximum 20% d'erreur (applicable uniquement aux modèles qui dépassent ce seuil).
6. En analysant l'expression du modèle 3, il s'avère que pour des grandes distances d la capacité ne tend pas vers 0 pF, mais devient plutôt négative. Jusqu'à quelle distance limite d peut-on utiliser le modèle 3 tout en s'assurant d'un résultat positif ?
7. Identifiez les principales sources possibles d'erreurs expérimentales dans cette expérience.

3 Contenu du rapport

Votre rapport de laboratoire doit être fait sur traitement de texte et doit contenir les points suivants :

- Une introduction : l'objectif du laboratoire, résumé de la stratégie expérimentale et de l'analyse, matériel utilisé, etc.
- La démonstration (preuve symbolique) des expressions mathématiques des deux premiers modèles de capacité (C_{m1} et C_{m2}), avec une explication claire des hypothèses physiques posées dans l'obtention de ces modèles simplifiés ;
- Les points d'analyse et de résultats demandés à la section 2 ;
- Une utilisation rigoureuse des unités de mesure ;
- Une conclusion : est-ce que l'objectif du laboratoire a été atteint ? Est-ce que le résultat de l'expérimentation correspond à ce à quoi vous vous attendiez ?

Note : Le rôle principal du surveillant de laboratoire est de s'assurer que le matériel nécessaire est disponible et est en bon état de fonctionnement. Bien qu'il puisse répondre à certaines questions et vous dépanner à l'occasion, il ne vous montrera pas comment réaliser l'expérience : vous devez être autonomes et suivre les directives du protocole que vous devez avoir lu préalablement.

A Simulation par éléments finis

À titre de complément, cette annexe présente les résultats d'une simulation effectuée à l'aide du logiciel FEMM², un simulateur basé sur la méthode des éléments finis. Le modèle est constitué de deux plaques parallèles conductrices de dimensions semblables au montage disponible en laboratoire. Le milieu ambiant est constitué d'air.

La figure 2 illustre un résultat de simulation pour une distance d de 30 mm. La couleur indique l'intensité du champ électrique et les courbes représentent les équipotentielles. Les flèches

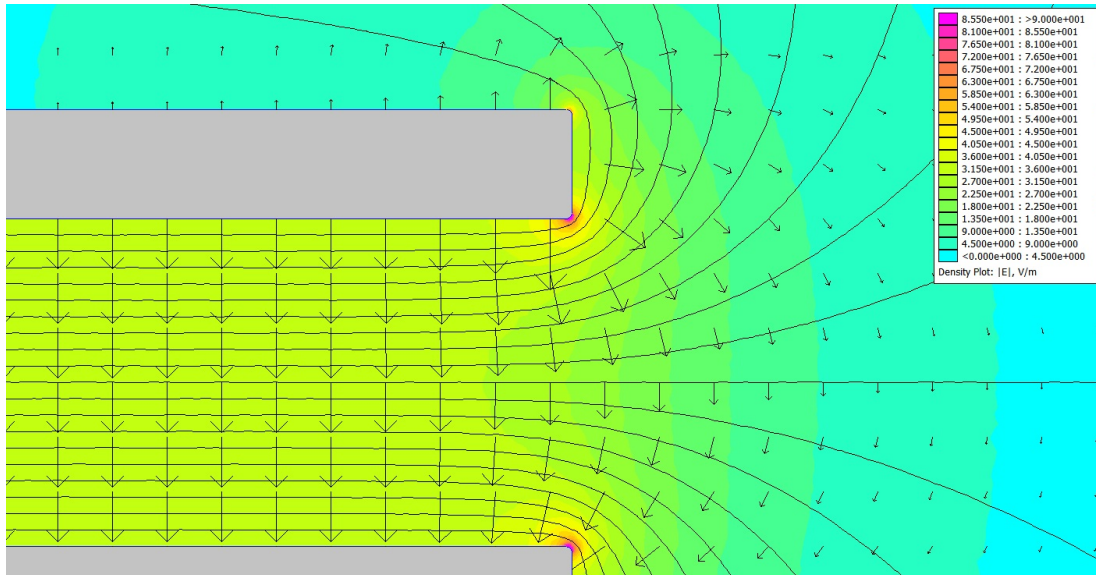


Figure 2 Effets non-linéaires en périphérie d'un condensateur plan. Les équipotentielles sont illustrées en trait foncé.

illustrent la nature vectorielle du champ électrique. Notez que le champ est particulièrement intense sur les coins des plaques. Ceci est aussi une indication que les charges ne sont pas réparties uniformément, et que la densité surfacique de charge est plus élevée près de l'extrémité des disques (effet de pointe).

Les potentiels électriques des deux armatures sont fixés manuellement aux valeurs apparaissant dans le tableau 2. Le tableau 2 présente aussi des résultats pertinents de la simulation. Avec un calcul approprié, un point de comparaison additionnel pourrait être ajouté à votre analyse...

	Potentiel électrique	Charge totale
Armature du haut	0,5 V	21,71 pC
Armature du bas	-0,5 V	-21,71 pC

Tableau 2 Paramètres et résultats de la simulation.

Document révisé le 2 août 2021
 Marc Boulé
 Maître d'enseignement
 École de technologie supérieure
 Adaptation d'un document créé par Luc Soucy