École de technologie supérieure
Service des enseignements généraux

MAT144
Introduction aux mathématiques du génie

Notes de cours
2e Partie

Par Kathleen Pineau

Octobre 2017
Révisé en février 2022

Table des matières

Chapitre 5

Les fonctions

5.1 Les fonctions

Lorsqu'une relation existe entre deux variables et que cette relation associe à chaque valeur de la première variable au plus une valeur de la deuxième, on dit que la deuxième variable est fonction de la première.

Exemple 5.1

La relation qui existe entre le volume V d'une sphère et son rayon r est habituellement décrite par l'équation

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

V est une fonction de r puisque pour chaque rayon donné, il n'y correspond qu'une seule valeur de volume. Par exemple, si $r = 1{,}5$ cm alors

$$V = \frac{4}{3}\pi(1{,}5 \text{ cm})^3 = 4{,}5\pi \text{ cm}^3 \approx 14{,}1 \text{ cm}^3.$$

La valeur de V dépend de la valeur de r. On dit alors que V est la variable dépendante et r est la variable indépendante.

Si on s'intéresse plutôt au rayon r comme fonction du volume V, la relation est alors décrite par l'équation

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Cette fois, r est considérée comme une fonction de V, puisque pour chaque volume donné, il n'y correspond qu'une seule valeur de rayon. Par exemple si $V = 10$ cm^3 alors

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10 \text{ cm}^3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi} \text{ cm}^3} \approx 1{,}34 \text{ cm}.$$

Dans cette perspective, r est la variable dépendante, tandis que V est la variable indépendante.

Définition 5.1 Une **fonction** est une règle de correspondance entre deux ensembles X et Y qui associe à une valeur x de X **au plus** une valeur y de Y.

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

Pour chacun des éléments $x \in X$, l'élément correspondant $y \in Y$ est dit la valeur de la fonction en x, ou l'image de x par la fonction, et on écrit $y = f(x)$.
Attention ! Ici, f dénote une dépendance et ne représente ni une quantité, ni une variable ; $f(x)$ ne signifie pas f fois x mais bien f **de** x.

Définition 5.2 Lorsque y est une fonction de x, ce qui s'écrit $y = f(x)$, la variable x, qui est transformée par la fonction, est dite **indépendante** et y, qui dépend de la valeur donnée à x, est la variable **dépendante**.

Comme on a vu au chapitre 1, la notation fonctionnelle est très utile pour désigner la valeur que prend une fonction en une valeur particulière de la variable indépendante. Par exemple, pour signifier qu'on évalue la fonction

$$f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

en $r = 5$, r étant la variable indépendante, on écrit simplement $f(5)$ et on dit « f de 5 ».

$$f(5) = \frac{4}{3}\pi r^3\bigg|_{r=5} = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \approx 523{,}6$$

Exemple 5.2

Évaluez les fonctions suivantes aux valeurs indiquées.

(a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ en $x = 5$

(b) $g(t) = 3t^2 - 1$ en $t = -2$

Solution :

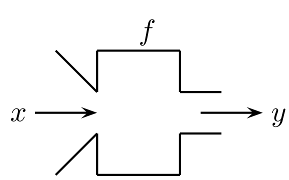
(a) Dans $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, la variable indépendante est x et

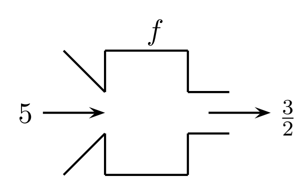
$$f(5) = \frac{2x-1}{x+1}\bigg|_{x=5} = \frac{2(5)-1}{(5)+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

(b) Dans $g(t) = 3t^2 - 1$, la variable indépendante est t et

$$g(-2) = 3t^2 - 1\Big|_{x=-2} = 3(-2)^2 - 1 = 11.$$

On peut penser à une fonction comme à une suite d'instructions (suivant l'ordre de priorité des opérations) qui nous dit comment obtenir la valeur de la variable dépendante lorsqu'on connait la valeur de la variable indépendante.
Ainsi, f transforme la valeur 5 en $\frac{3}{2}$





et g transforme la valeur -2 en 11.

Il en est de même lorsque la variable indépendante est exprimée en symboles.

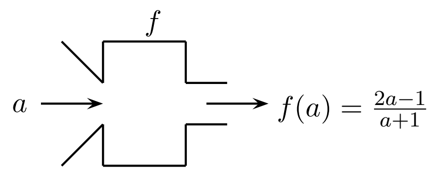
Exemple 5.3

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, évaluez $f(a)$ et $f(t^2)$.

Solution :

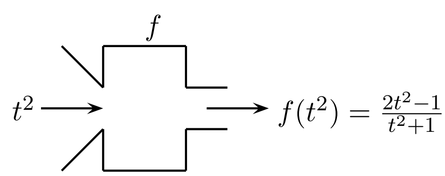
Pour obtenir $f(a)$, on doit substituer a à x dans f

$$f(a) = \left.\frac{2x-1}{x+1}\right|_{x=a} = \frac{2a-1}{a+1}$$



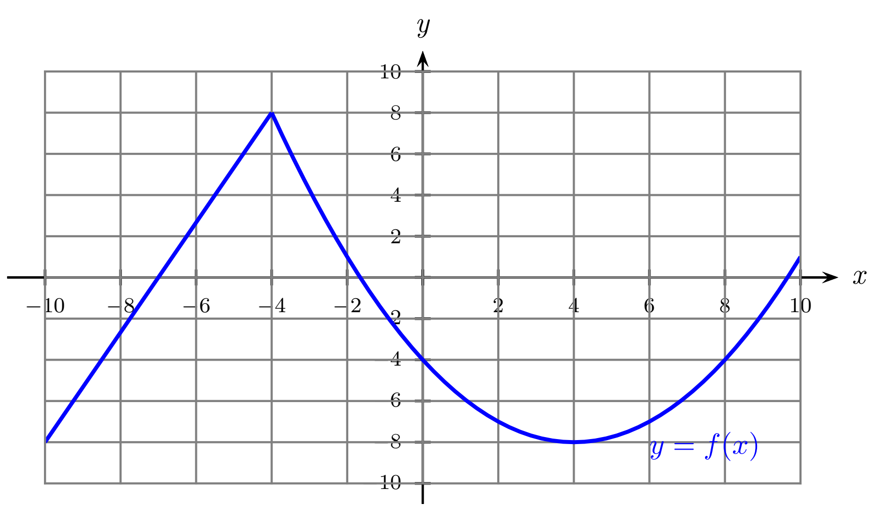
et pour obtenir $f(t^2)$, on doit substituer t^2 à x dans f.

$$f(t^2) = \left.\frac{2x-1}{x+1}\right|_{x=t^2} = \frac{2(t^2)-1}{(t^2)+1} = \frac{2t^2-1}{t^2+1}$$



Exemple 5.4

En observant le graphe de la fonction f, estimez les valeurs demandées.



(a) $f(-4)$ (b) $f(-7)$ (c) $f(2)$ (d) $f(1{,}5)$ (e) $f(4)$

Solution :

On doit estimer l'ordonnée des points pour chacune des abscisses données.

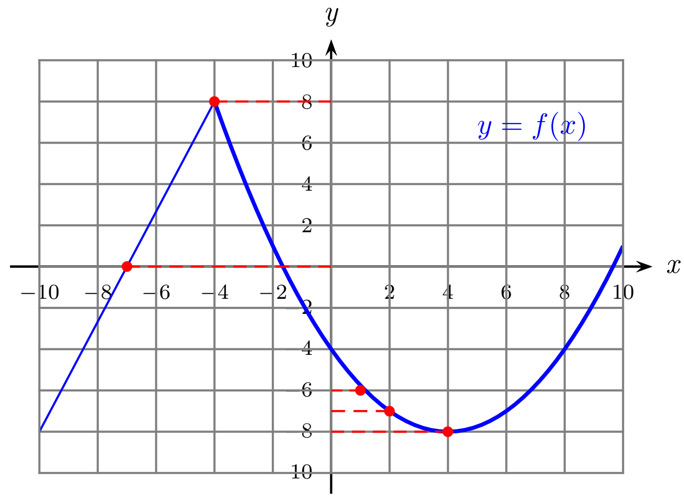
(a) $f(-4) \approx 8$

(b) $f(-7) \approx 0$

(c) $f(2) \approx -7$

(d) $f(1{,}5) \approx -6$

(e) $f(4) \approx -8$



Ce ne sont pas toutes les relations qui définissent des fonctions. Si une équation à deux variables x et y est résolue pour y et que plus d'une valeur de y peut être obtenue d'une valeur x, l'équation ne définit pas y comme une fonction de x.

Exemple 5.5

Pour chacune des équations suivantes, déterminez si l'équation définit y comme une fonction de x.

(a) $y + 4 = x^2$ (b) $x^2 + y^2 = 25$

Solution :

On résout chacune des équations pour y afin de pouvoir conclure.

(a) $y + 4 = x^2 \iff y = x^2 - 4$.
Clairement, une seule valeur y sera produite pour chaque valeur de x. Par exemple, si $x = 3$, on trouve une seule valeur pour y, soit $y = 3^2 - 4 = 5$. Étant donné que ceci est le cas quelle que soit la valeur de x, l'équation définit bien y comme une fonction de x.

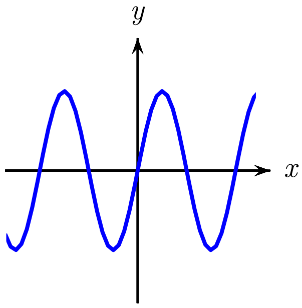
(b) $x^2 + y^2 = 25 \iff y^2 = 25 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.
Le $\pm$ de la dernière équation indique que pour certaines valeurs de x (celles entre -5 et 5), il y a deux valeurs possibles pour y. Par exemple, si $x = 3$, on doit résoudre $(3)^2 + y^2 = 25$ or, $(3)^2 + y^2 = 25 \iff y^2 = 16 \iff y = \pm 4$. Il y a donc deux valeurs possibles pour y et on en conclut que l'équation $x^2 + y^2 = 25$ ne définit pas y comme une fonction de x.

Pour déterminer si une courbe d'équation $y = f(x)$ représente une fonction de x, il suffit de faire le test de la verticale.

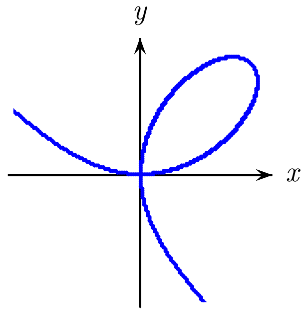
Test de la verticale. Si toute droite verticale intersecte la courbe d'équation $y = f(x)$ en au plus un point alors y est une fonction de x.

Exemple 5.6

Pour chacun des graphiques suivants, déterminez si la courbe représente y comme une fonction de x.



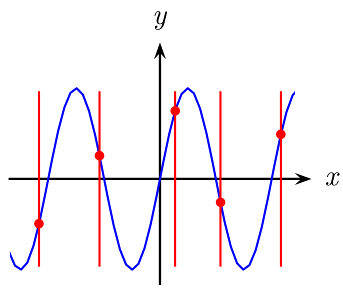
(a)



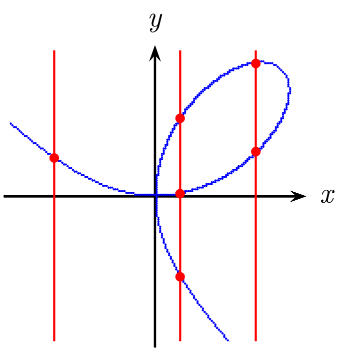
(b)

Solution :

(a) Toute droite verticale intersecte la courbe en un seul point. Ce graphe représente donc y comme une fonction de x.



(b) Certaines droites verticales intersectent la courbe en plus d'un point. Il ne s'agit donc pas du graphe d'une fonction.



Définition 5.3 Le **domaine** d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles $f(x)$ est définie. On note cet ensemble $\mathrm{Dom}(f)$.

Définition 5.4 L'**image** d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble de toutes les valeurs réelles y pour lesquelles il existe une valeur $x \in \mathrm{Dom}(f)$ telle que $y = f(x)$. On note cet ensemble $\mathrm{Im}(f)$.

Le fait de travailler dans l'ensemble des nombres réels peut amener des restrictions quant aux valeurs pour lesquelles on peut calculer l'image par la fonction. Toute valeur qui mène à une division par zéro ou à un nombre complexe qui n'est pas réel (par exemple, une racine paire d'un nombre négatif) ne peut pas être incluse dans le domaine de la fonction.

De façon générale, lorsque la représentation graphique d'une fonction f est donnée, le domaine de la fonction est l'ensemble des abscisses des points de la courbe $y = f(x)$ et l'image est l'ensemble des ordonnées de ces points. Le domaine et l'image de la fonction f peuvent ainsi être trouvés en examinant la courbe d'équation $y = f(x)$. Il s'agira alors d'une approche visuelle. Elle sera dépendante de la fenêtre graphique. Il faudra alors faire attention, car la fenêtre ne fournira pas toujours toute l'information.

Exemple 5.7

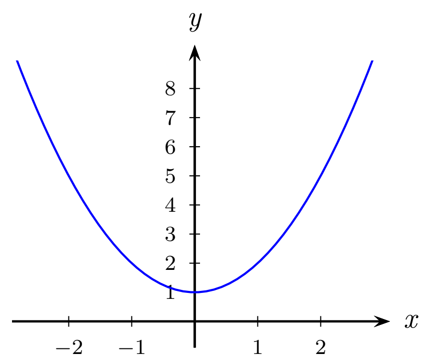
Déterminez le domaine et l'image de chacune des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = x^2 + 1$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$ (c) $h(t) = \sqrt{5-t}$

Solution :

(a) La fonction $f(x) = x^2 + 1$ est définie quelle que soit la valeur réelle x. Son domaine est alors l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. De plus, puisque x^2 n'est jamais négatif, $x^2 + 1$ sera toujours plus grand ou égal à 1, $x^2 + 1 \geq 1$. L'image de la fonction f est donc $\mathrm{Im}(f) = [1; \infty[$.

En examinant le graphe de la fonction, on remarque que la courbe passe par toutes les valeurs réelles x et qu'elle ne descend pas plus bas que $y = 1$.



(b) Évaluer la fonction $g(x) = \frac{1}{x+3}$ en $x = -3$ provoquerait une division par zéro. Le nombre -3 ne fait donc pas partie du domaine de g, $-3 \notin \mathrm{Dom}(g)$. Puisque g est définie quelle que soit la valeur réelle x différente de -3, son domaine est

$$\mathrm{Dom}(g) =]-\infty; -3[\cup]-3; \infty[= \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

En ce qui concerne l'image, plus la valeur de x est grande, plus $g(x)$ s'approche de 0 sans être 0.

x	0	10	100	1000	10000
$g(x)$	0,$\overline{3}$	0,0769...	0,0097...	0,000997	0,000099...

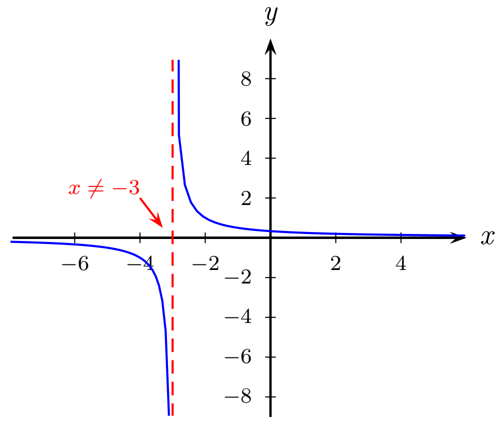
et plus x est petit, plus $g(x)$ s'approche de 0 sans être 0.

x	-1	-10	-100	-1000	-100000
$g(x)$	0,5	$-0{,}1428...$	$-0{,}010309...$	$-0{,}001003...$	$-0{,}0001...$

L'image de g est donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

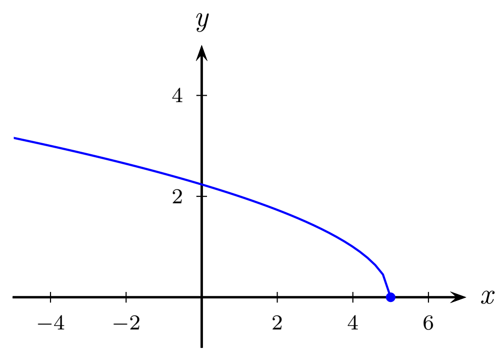
En examinant le graphe de la fonction g, on remarque que la courbe passe par toutes les valeurs réelles x différentes de -3 (il y a une asymptote verticale[i] d'équation $x = -3$) et qu'elle s'approche de la hauteur $y = 0$ sans l'atteindre (il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$).

i. Les asymptotes seront vues plus en détail au chapitre 6.



(c) La fonction $h(t) = \sqrt{5-t}$ n'est pas définie pour des valeurs de $t > 5$ puisque $5 - t$ serait alors négatif et mènerait au calcul d'une racine carrée d'un négatif. Le domaine de h est donc $\mathrm{Dom}(h) =]-\infty; 5]$. Aussi, puisque $\sqrt{5-t}$ désigne la racine carrée d'un nombre, on sait que h ne sera jamais négatif. L'image de h est donc $\mathrm{Im}(h) = [0; \infty[$.

En examinant le graphe de la fonction h, on remarque que la courbe passe par toutes les valeurs réelles x inférieures ou égales à 5 et qu'elle ne descend pas plus bas que $y = 0$.



Exercices

5.1 (a) Un économiste s'intéresse à la manière dont le prix de certains articles influence les ventes. Si la quantité q vendue, lorsque le prix d'un article est p \$, peut être modélisée par une fonction $q = f(p)$, que signifie $f(150) = 2000$?

(b) Si $f(v)$ désigne la consommation d'essence en litres par 100 km d'une voiture allant à la vitesse v km/h, que signifie $f(110) = 7{,}5$?

(c) La pression de vapeur de l'air humide représente la quantité maximale de vapeur d'eau que l'air peut contenir. Si $p(T)$ désigne la pression en mbar en fonction de la température en °C, que signifie $p(25) = 31{,}7$?

5.2 Soient les fonctions

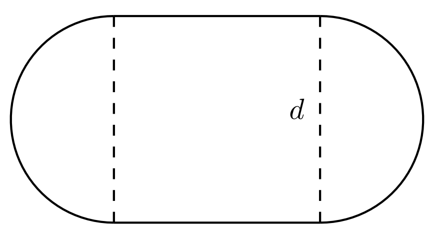
$$f(x) = 3x + 2\ ,\ g(x) = 3x^2 - x + 2\ ,\ h(r) = \sqrt{r-5} \text{ et } k(t) = \frac{2t+1}{1-t}.$$

Évaluez et simplifiez les expressions suivantes.

(a) $f(5)$
(b) $f(t)$
(c) $f(x+1)$
(d) $f(-x)$
(e) $g(0)$
(f) $g(-2)$
(g) $g(2a)$
(h) $g(-x)$
(i) $h(9)$
(j) $h(5)$
(k) $h(x)$
(l) $h(x+5)$
(m) $k(2)$
(n) $k(-2)$
(o) $k(-x)$
(p) $k(3t)$

5.3 Sachant que le graphe de la fonction $f(x) = kx^2 - 2x + 10$ passe par le point de coordonnées $(-2; 5)$, trouvez k.

5.4 Une fenêtre est formée d'une partie centrale carrée et de deux demi-cercles de diamètres identiques au côté du carré.

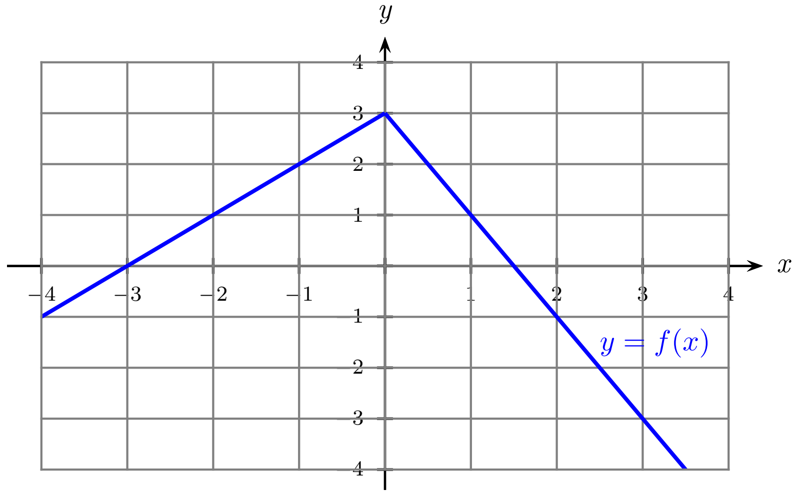


(a) Calculez l'aire totale de la fenêtre lorsque le diamètre mesure 50 cm.

(b) Calculez l'aire totale de la fenêtre lorsque le diamètre mesure 1 m.

(c) Exprimez l'aire totale de la fenêtre A comme une fonction du diamètre d de ses parties circulaires et vérifiez que les résultats obtenus en (a) et en (b) sont cohérents avec ce que calcule la fonction.

5.5 En observant le graphe de la fonction f, estimez les valeurs demandées.

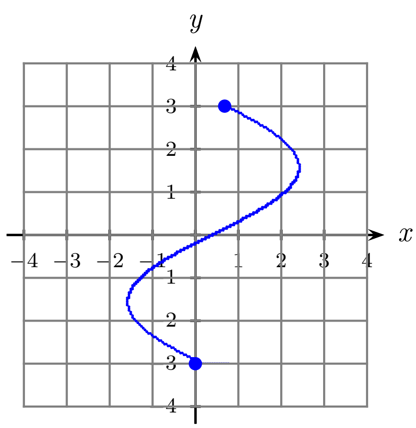


(a) $f(0)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(-1{,}5)$ (d) $f(1{,}5)$ (e) $f(3)$

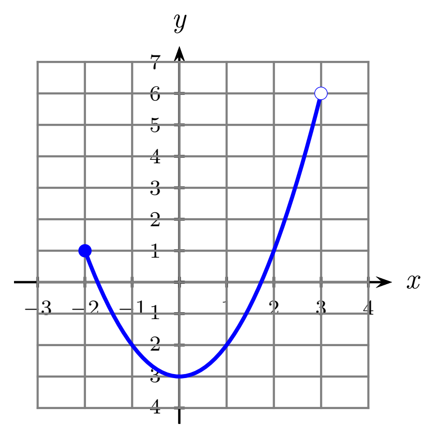
5.6 Parmi les équations suivantes, déterminez celles qui définissent y comme une fonction de x. Lorsqu'il s'agit d'une fonction, donnez son domaine.

(a) $x + y = 100$
(b) $x - 3 = y^2$
(c) $y = -\sqrt{3 - x}$
(d) $3x + 2y = 1$
(e) $x + y^3 = 27$
(f) $x^3 + 1 = y^2$

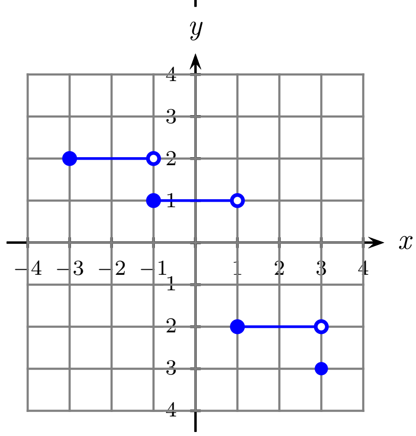
5.7 Parmi les courbes suivantes, déterminez celles qui sont des représentations graphiques de fonctions $y = f(x)$. Lorsqu'il s'agit d'une fonction, donnez son domaine et son image.



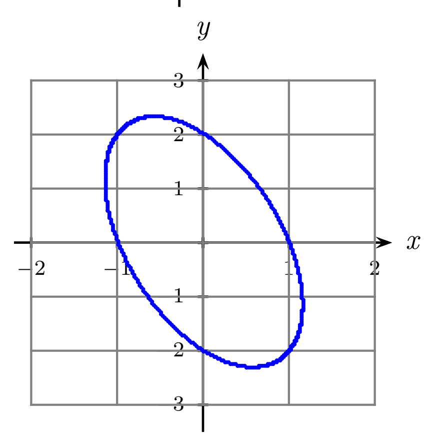
(a)



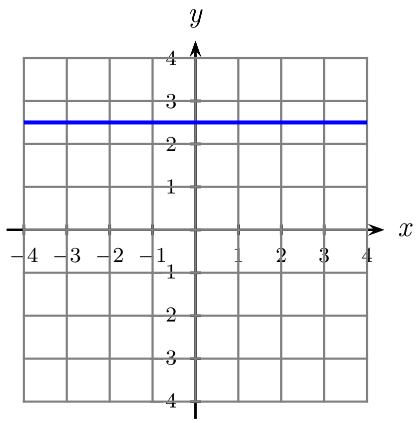
(c)

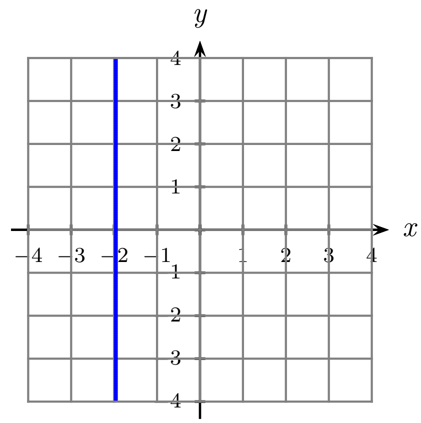


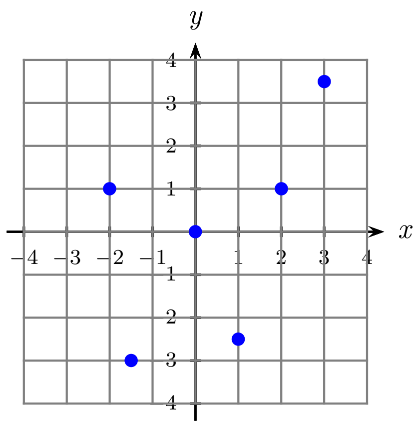
(b)

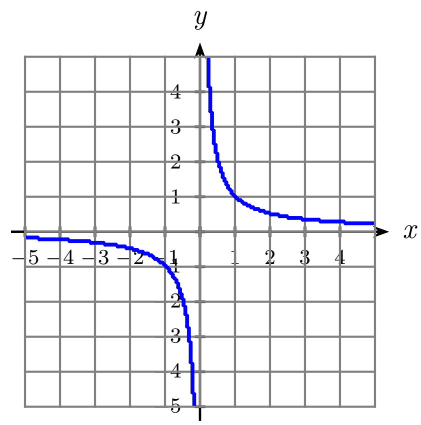


(d)


(e)


(g)


(f)


(h)

5.8 Considérez la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

(a) Déterminez algébriquement son domaine.

(b) Simplifiez l'expression $\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$ à l'aide de votre calculatrice et expliquez, à l'aide d'un argument algébrique, ce à quoi fait référence le triangle jaune qui apparait à l'extrémité gauche de l'écran. *Aide : Pour comprendre ce qui se passe, simplifiez aussi l'expression sans la calculatrice.*

(c) Tracez le graphe de la fonction à l'aide de votre calculatrice. Reproduisez-le sur papier en tenant compte des informations obtenues en (a).

(d) Évaluez, lorsque possible, $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(1{,}8)$, $f(2)$ et $f(5)$ et indiquez sur la reproduction du graphique ce à quoi correspondent ces valeurs.

5.9 Un écran d'ordinateur affiche une image circulaire de 10 cm de rayon. Si le rayon de l'image diminue de x cm, déterminez l'aire de la nouvelle image circulaire comme une fonction de x. Quels sont alors les domaine et image contextuels de la fonction ?

5.2 Les interprétations

Définition 5.5 Lorsque $0 \in \mathrm{Dom}(f)$, la valeur $f(0)$ est appelée **ordonnée à l'origine** de la fonction $f(x)$. Graphiquement, cette valeur correspond à l'ordonnée du point d'intersection de la courbe décrite par l'équation $y = f(x)$ et l'axe des y.
Une **abscisse à l'origine**, on dit aussi un **zéro** ou une **racine**, d'une fonction $f(x)$ est une valeur $x \in \mathrm{Dom}(f)$ qui est solution de l'équation $f(x) = 0$. Graphiquement, une telle valeur correspond à l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe décrite par l'équation $y = f(x)$ et l'axe des x.

Définition 5.6 En une valeur $x \in \mathrm{Dom}(f)$, une fonction $f(x)$ est dite
- strictement **positive** si $f(x) > 0$,
- strictement **négative** si $f(x) < 0$,
- ou **nulle** si $f(x) = 0$.

On dit que la fonction $f(x)$ est strictement positive, strictement négative ou nulle **sur un intervalle** si elle est respectivement, strictement positive, strictement négative ou nulle, en chacune des valeurs de l'intervalle.

Définition 5.7 Une fonction $f(x)$ est dite strictement **croissante** sur un intervalle I si

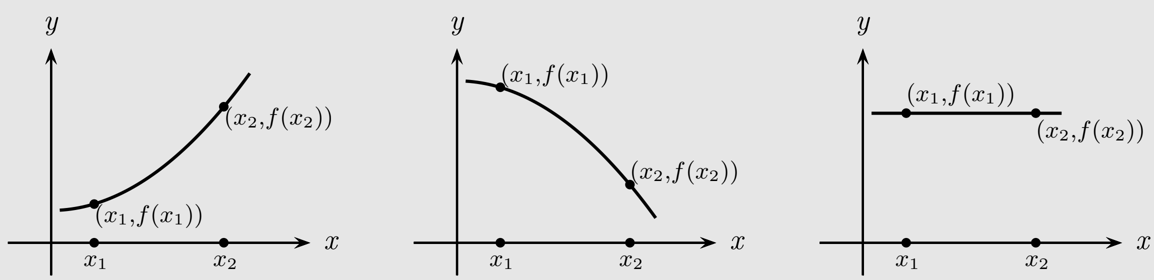
$$\forall x_1 \in I \text{ et } \forall x_2 \in I, \text{ lorsque } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

Une fonction $f(x)$ est dite strictement **décroissante** sur un intervalle I si

$$\forall x_1 \in I \text{ et } \forall x_2 \in I, \text{ lorsque } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

Une fonction $f(x)$ est dite **constante** sur un intervalle I si

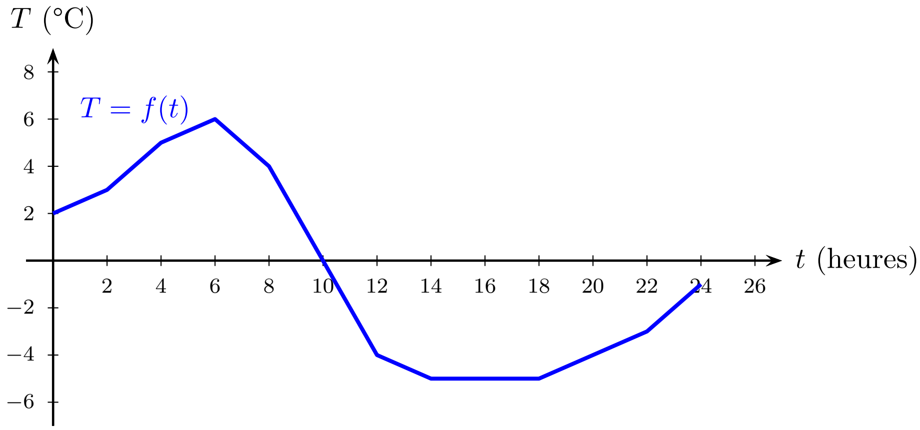
$$\forall x_1 \in I \text{ et } \forall x_2 \in I,\ f(x_1) = f(x_2).$$



Croissante $f(x_1) < f(x_2)$ — Décroissante $f(x_1) > f(x_2)$ — Constante $f(x_1) = f(x_2)$

Exemple 5.8

Des données météo pour une ville sont recueillies à toutes les heures sur une période de 24 heures. La courbe suivante, obtenue en reliant les points, sert de modèle simple pour décrire la température (en degrés Celsius) en fonction du temps (mesuré en heures).



(a) Pour quel intervalle de temps la température a-t-elle été au-dessus de zéro, ce qui correspond à l'intervalle où la fonction est positive ?

(b) Pour quel intervalle de temps la température a-t-elle été sous zéro, ce qui correspond à l'intervalle où la fonction est négative ?

(c) Sur quels intervalles de temps la température a-t-elle augmenté (la fonction est croissante) ?

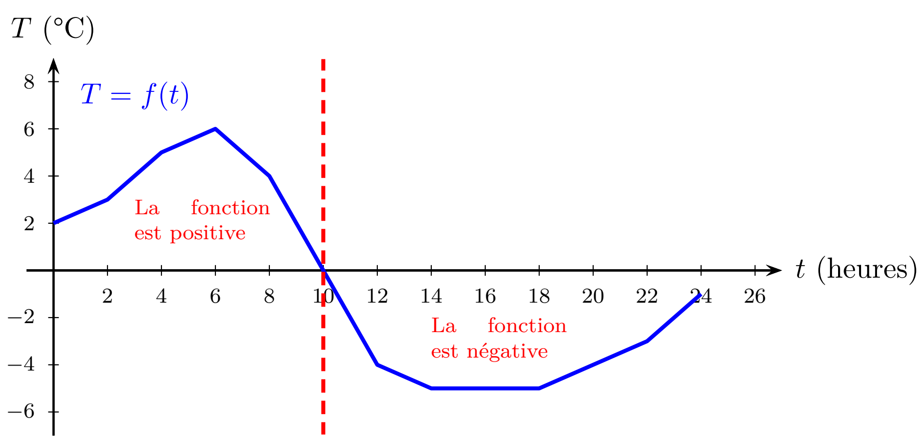
(d) Sur quel intervalle de temps la température a-t-elle diminué (la fonction est décroissante) ?

(e) Quel était l'intervalle de temps où la température est restée stable (la fonction est constante) ?

(f) Dressez un tableau indiquant les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction, ainsi que les signes de celle-ci.

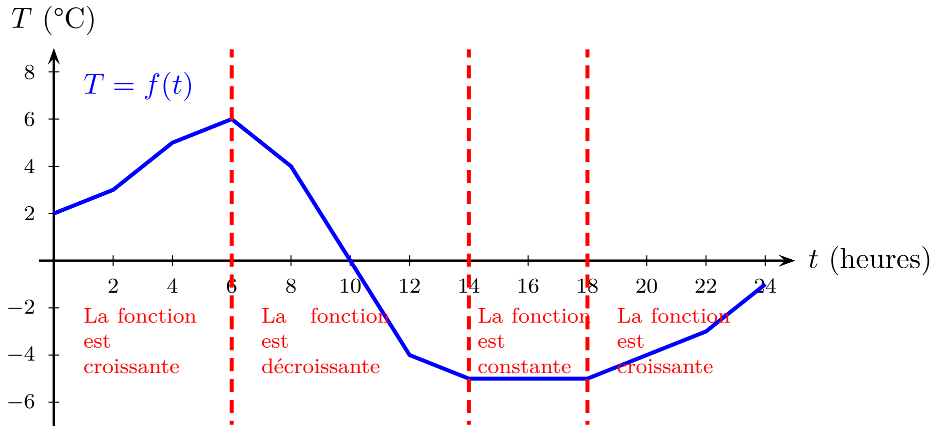
Solution :

(a) À la dixième heure, la fonction passe par zéro. C'est donc en $t = 10$ que la fonction change de signe. Avant, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps $[0; 10[$, la température est strictement positive.



(b) La fonction de température est strictement négative après $t = 10$, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps $]10; 24]$.

(c) La fonction de température est strictement croissante sur les intervalles de temps $[0; 6]$ et $[18; 24]$ donc, sur $[0; 6] \cup [18; 24]$.



(d) La fonction de température est strictement décroissante sur l'intervalle de temps $[6; 14]$.

(e) La température est constante sur l'intervalle $[14; 18]$.

(f) Les signes de la fonction, ainsi que ses variations, peuvent être résumés dans un tableau. Dans la première ligne, on indique les valeurs de t correspondant à un changement de signe de la fonction ($t = 10$) et celles où il y a un changement du sens de la variation ($t = 6$, $t = 14$ et $t = 18$). On y ajoute les intervalles compris entre ces valeurs. Pour chacune de ces valeurs et intervalles, le signe de la fonction est consigné à la deuxième ligne. Dans la troisième ligne, des flèches représentent le sens de la variation de la fonction, c'est-à-dire sa croissance, décroissance ou constance. Les points noirs indiquent les valeurs en abscisse auxquelles il y a changement du sens de la variation de la fonction.

t	0	$]0; 6[$	6	$]6; 10[$	10	$]10; 14[$	14	$]14; 18[$	18	$]18; 24[$	24
T	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\nearrow$ ou $\searrow$ ou $\longrightarrow$	$\nearrow$		$\bullet$	$\searrow$			$\bullet$	$\longrightarrow$	$\bullet$	$\nearrow$	

Définition 5.8 Le maximum absolu d'une fonction, s'il existe, est la valeur maximale atteinte par la fonction. Une fonction $f(x)$ atteint un **maximum absolu** $f(c)$ en $x = c \in \mathrm{Dom}(f)$ si

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(c) \geq f(x).$$

Le minimum absolu d'une fonction, s'il existe, est la valeur minimale atteinte par la fonction. Une fonction $f(x)$ atteint un **minimum absolu** $f(c)$ en $x = c \in \mathrm{Dom}(f)$ si

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f),\ f(c) \leq f(x).$$

Les **extremums absolus** d'une fonction sont le maximum absolu et le minimum absolu de la fonction.

Exemple 5.9

À l'aide du graphique présenté à l'exemple 5.8, déterminez quelle sont les températures maximale et minimale observées durant la période de 24 heures.

Solution :
La température maximale observée est $f(6) = 6$°C et la température minimale observée est $f(t) = -5$ °C pour $t \in [14; 18]$.

Lorsqu'on parle d'une valeur maximale ou d'une valeur minimale, on fait référence à l'ordonnée des points du graphe de la fonction température.

Définition 5.9 Une fonction $f(x)$ atteint un **maximum local** (ou **relatif**) $f(c)$ en $x = c \in \text{Dom}(f)$ s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ contenant c tel que

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in]a; b[\cap \text{Dom}(f).$$

Une fonction $f(x)$ atteint un **minimum local** (ou **relatif**) $f(c)$ en $x = c \in \text{Dom}(f)$ s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ contenant c tel que

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in]a; b[\cap \text{Dom}(f).$$

Les **extremums locaux** (ou relatifs) d'une fonction sont les maximums locaux et les minimums locaux de la fonction.

Exemple 5.10

Dressez un tableau de signes et de variations pour les fonctions suivantes à l'aide de leur graphe. Indiquez les extremums absolus et relatifs.

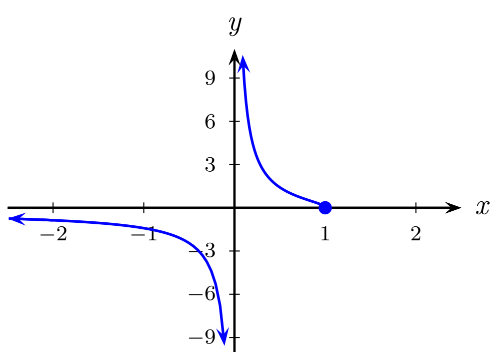
(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

(b) $g(x) = (x-3)^{2/3}(x+5)$

Solution :

(a) $f(x)$ est définie si $1 - x \geq 0$ et $x \neq 0$. Le domaine de la fonction f est donc $]-\infty; 0[\cup]0; 1]$. Elle n'a pas d'ordonnée à l'origine, puisque la fonction n'est pas définie en $x = 0$ et son seul zéro est $x = 1$, car $f(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{1} = 0$. Le signe de $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$ est le même que celui de x, puisque la racine carrée au numérateur est toujours positive. La fonction est donc strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive sur $]0; 1[$.

Le graphe de la fonction permet de valider ces conclusions.



C'est à l'aide de ce graphe qu'on peut déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction. [ii]

La fonction est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1]$. Elle ne possède aucun extremum absolu, puisque les valeurs $f(x)$ deviennent abitrairement grandes pour des valeurs de x positives

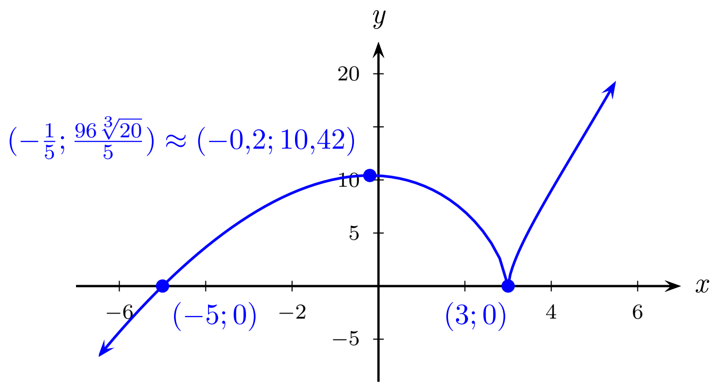
ii. On verra plus tard comment obtenir ces informations algébriquement, à l'aide du calcul différentiel.

s'approchant de 0, tandis que les valeurs $f(x)$ deviennent arbitrairement petites pour des valeurs de x négatives et s'approchant de 0. Cependant, la fonction atteint un minimum local de 0 en $x = 1$.

Le tableau suivant résume ces caractéristiques de la fonction.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;1[$	1
$f(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0
$\nearrow$ ou $\searrow$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\bullet$

(b) La fonction g a pour domaine $\mathbb{R}$. Son ordonnée à l'origine est $g(0) = 3^{2/3} \cdot 5 \approx 10{,}40$. Ses zéros sont $x = -5$ et $x = 3$.



Comme le facteur $(x-3)^{2/3}$, qui peut être vu comme $((x-3)^{1/3})^2$, est toujours positif, la fonction est strictement négative lorsque le facteur $(x+5)$ est négatif, c'est-à-dire sur $]-\infty;-5[$. Elle est strictement positive sur $]-5;3[\cup]3;\infty[$.

La fonction ne possède aucun extremum absolu, puisqu'elle prend des valeurs de plus en plus petites, pour des x de plus en plus petits, et de plus en plus grandes, pour des x de plus en plus grands. Elle présente toutefois un maximum local d'environ 10,42 en $x = -0{,}2$ et un minimum local de 0 en $x = 3$.

Attention ! Une valeur extrême est une valeur que prend la variable dépendante y.

Elle est croissante sur $]-\infty;-0{,}2] \cup [3;\infty[$ et décroissante sur $[-0{,}2;3]$.

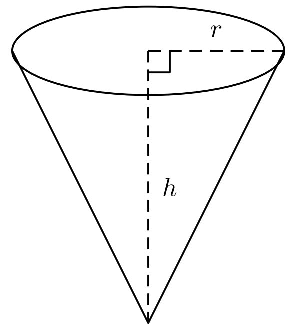
x	$]-\infty;-5[$	-5	$]-5;-0{,}2[$	$-0{,}2$	$]-0{,}2;3[$	3	$]3;\infty[$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$\nearrow$ ou $\searrow$		$\nearrow$		$\bullet$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Exemple 5.11

On veut concevoir un verre en papier ayant la forme d'un cône droit pouvant contenir 177 ml de liquide.

Rappel. Le volume V et l'aire A (sans la base) d'un cône de rayon r et de hauteur h sont donnés par

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$



(a) Calculez la hauteur h et la mesure de la surface A du cône de papier, si le rayon est de 3,5 cm.

Rappel. 1 mL = 1 cm^3

(b) Calculez la hauteur h et la mesure de la surface A du cône de papier, si le rayon est de 4 cm.

(c) Déterminez une formule donnant la hauteur du cône en fonction du rayon.

(d) Déterminez une formule donnant la mesure de la surface uniquement en fonction du rayon.

(e) Quelles valeurs peut prendre le rayon dans ce contexte ?

(f) Pour fabriquer un verre conique d'une capacité de 177 ml, quelles dimensions faut-il lui donner pour minimiser la quantité de papier utilisée ?

(g) Construisez un tableau de signes et de variations pour A en fonction de r et interprétez-le.

Solution :

(a) Sachant que le volume est de 177 m, on peut déduire la hauteur, en isolant h dans l'équation du volume.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\pi(3{,}5\text{ cm})^2 h &= 177\text{ cm}^3 \\ h &= \frac{3\cdot 177\text{ cm}^3}{\pi(3{,}5)^2\text{ cm}^2} \\ h &\approx 13{,}8\text{ cm} \end{aligned}$$

On obtient la mesure de la surface en remplaçant les mesures du rayon et de la hauteur dans l'équation de l'aire du cône.

$$A \approx \pi(3{,}5\text{ cm})\sqrt{(3{,}5\text{ cm})^2 + (13{,}8\text{ cm})^2} = \pi(3{,}5\text{ cm})\sqrt{202{,}69\text{ cm}^2} \approx 156{,}5\text{ cm}^2$$

(b) Pour $r = 4$ cm,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\pi(4\text{ cm})^2 h &= 177\text{ cm}^3 \\ h &= \frac{3\cdot 177\text{ cm}^3}{\pi\cdot 4^2\text{ cm}^2} \\ h &\approx 10{,}6\text{ cm} \end{aligned}$$

$$A \approx \pi(4\text{ cm})\sqrt{(4\text{ cm})^2 + (10{,}6\text{ cm})^2} = \pi(4\text{ cm})\sqrt{128{,}36\text{ cm}^2} \approx 142{,}4\text{ cm}^2$$

On constate que, pour maintenir un volume de 177 cm^3, lorsqu'on augmente le rayon de 3,5 cm à 4 cm, la hauteur doit diminuer et l'aire du cône diminue elle aussi.

(c) La hauteur du cône en fonction du rayon est donnée par

$$h = \frac{3 \cdot 177}{\pi r^2} = \frac{531}{\pi r^2}.$$

La hauteur étant inversement proportionnelle au carré du rayon, elle décroît si le rayon augmente, afin de maintenir le volume du cône à 177 cm^3.

(d) Pour obtenir la mesure de la surface uniquement en fonction du rayon, il suffit de substituer l'expression de h, en fonction de r, dans l'équation de l'aire

$$\begin{aligned} A &= \pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi r\sqrt{r^2 + \left(\frac{531}{\pi r^2}\right)^2} = \pi r\sqrt{\frac{\pi^2 r^6 + 531^2}{\pi^2 r^4}} \\ &= \pi r \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + 531^2}}{\pi r^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + 531^2}}{r} \end{aligned}$$

(e) Le rayon est positif. Il ne peut pas être nul, car sinon, le volume du cône serait nul.

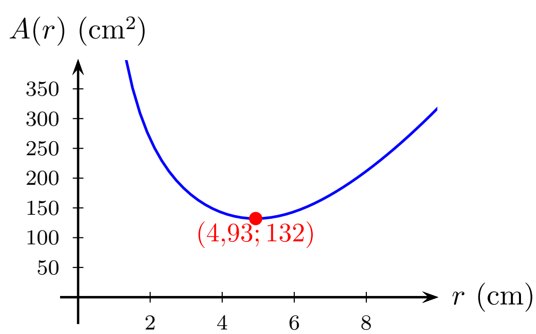
$$V = \frac{1}{3}\pi(0)^2 h = 0 \text{ cm}^3$$

Donc $r > 0$.
Le volume du cône étant de 177 cm^3, le rayon peut être exprimé en fonction de la hauteur par

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\pi r^2 h &= 177 \\ r^2 &= \frac{3 \cdot 177}{\pi h} \\ r &= \sqrt{\frac{531}{\pi h}} \end{aligned}$$

Selon cette relation, plus la hauteur sera grande et plus le rayon sera petit. Le rayon peut donc devenir aussi petit que l'on veut, sans être nul. De même, plus la hauteur sera petite, sans être 0, car dans ce cas aussi le volume serait nul, plus le rayon sera grand. Il n'y a donc pas de limite supérieure à la mesure du rayon. Ainsi, $r \in]0; \infty[$.

(f) On détermine les valeurs de r et h qui minimisent l'aire A à partir du graphe de la fonction.



Les outils d'analyse graphique de la calculatrice permettent de conclure que la fonction A atteint un minimum absolu d'environ 132 cm^2 lorsque r est approximativement de 4,93 cm. [iii]
On déduit la valeur de la hauteur à l'aide du rayon trouvé.

$$h \approx \frac{531}{\pi(4{,}93)^2} \approx 6{,}95$$

iii. Pour déterminer algébriquement ce minimum de la fonction et valider qu'il est absolu, il faudrait utiliser des outils du calcul différentiel.

Le verre conique d'une capacité de 177 ml ayant la plus petite surface de papier a un rayon d'environ 4,93 cm et une hauteur approximative de 6,95 cm. Il faudra 132 cm^2 de papier pour fabriquer ce verre.

(g) L'aire du verre est bien évidemment positive pour toute mesure du rayon. En effet, comme la mesure du rayon est positive et qu'une racine carrée l'est aussi, A est positive pour tout $r > 0$.

La fonction A est décroissante pour $r \in]0; 4{,}93]$, ce qui indique qu'on pourra diminuer l'aire du verre en augmentant le rayon dans cet intervalle, mais passé la valeur de $r = 4{,}93$, l'aire augmentera avec le rayon, puisque la fonction est croissante pour $[4{,}93; \infty[$.

r	$]0; 4{,}93[$	$4{,}93$	$]4{,}93; \infty[$
A	$+$	132	$+$
$\nearrow$ ou $\searrow$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$

Exercices

5.10 Déterminez algébriquement le domaine, l'ordonnée à l'origine et les zéros de chacune des fonctions suivantes. Si nécessaire, utilisez le solveur de votre calculatrice pour résoudre les équations. Tracez le graphe de la fonction à l'aide de votre calculatrice et, sur une reproduction de celui-ci, identifiez ce à quoi correspondent les valeurs trouvées. Choisissez une fenêtre graphique qui illustre bien le comportement de la fonction.

(a) $f(x) = 100 - x^2$
(b) $f(t) = -\sqrt{3-t}$
(c) $f(x) = 3x + 2$
(d) $f(x) = \sqrt[3]{27-x}$
(e) $f(t) = 2t^3 - 7t^2 - 17t + 10$

5.11 À l'aide des graphiques des fonctions du numéro 5.10, déterminez les valeurs des domaines pour lesquelles les fonctions sont strictement positives, celles pour lesquelles elles sont strictement négatives et celles pour lesquelles elles sont nulles.

5.12 À l'aide des graphiques des fonctions du numéro 5.10, déterminez les valeurs des domaines pour lesquelles les fonctions atteignent des valeurs extrêmes. Quelles sont ces valeurs extrêmes ? Pour quelles valeurs des domaines, les fonctions sont-elles strictement croissantes ? Strictement décroissantes ?

5.13 Pour chaque fonction, encerclez toutes les caractéristiques graphiques qui correspondent à l'énoncé.

(a) La pression de vapeur de l'air humide représente la quantité maximale de vapeur d'eau que l'air peut contenir. Si $p(T)$ désigne la pression en fonction de la température T, comment se traduit « la pression augmente avec la température » en termes graphiques ?

(i) La fonction p est positive (ii) La fonction p est croissante

(b) Le profit d'une entreprise est la différence entre ses revenus et ses dépenses. Si $P(t)$ désigne le profit en fonction du temps t écoulé en mois depuis le début de l'année, comment se traduit l'énoncé « l'entreprise est en déficit, mais celui-ci diminue avec les mois qui passent » en termes graphiques ?

(i) La fonction P est négative (ii) La fonction P est décroissante

(c) Si $h(t)$ représente la hauteur d'un objet par rapport au sol et $v(t)$ sa vitesse en fonction du temps t, alors « le corps est en chute libre » se traduit graphiquement par

(i) h est positive (ii) h est négative (iii) h est croissante (iv) h est décroissante

(v) v est positive (vi) v est négative (vii) v est croissante (viii) v est décroissante

5.14 On verse de l'eau dans un vase à un débit constant, mesuré en volume par unité de temps. Esquissez un graphe montrant la profondeur de l'eau en fonction du temps dans le cas de chacun des contenants suivants.

(a) Le vase a la forme d'un cylindre droit vertical.
(b) Le vase a la forme d'un cône posé sur sa base.
(c) Le vase a la forme d'une sphère.

5.15 L'hépatite B, une infection virale qui s'attaque au foie, est très répandue dans le monde et constitue un problème majeur dans plusieurs pays. Les données de l'Organisation mondiale de la santé permettent d'établir un modèle approximatif de la relation entre l'âge d'un enfant infecté et la probabilité qu'il devienne un porteur chronique de la maladie. Supposons que le modèle

$$p(x) = \frac{34}{x} + 21$$

décrit la probabilité (en %) qu'un enfant infecté à l'âge x années devienne porteur chronique de l'hépatite B. Supposons aussi que ce modèle est valide pour les enfants de 10 ans ou moins.

Définissez la fonction dans une fenêtre de calculs de votre calculatrice. Travaillez dans cette fenêtre pour répondre aux questions (a), (b) et (c).

(a) Quelle est la probabilité qu'un enfant infecté à l'âge de 2 ans devienne porteur chronique de l'hépatite B ?

(b) Quelle est la probabilité qu'un nourrisson infecté à l'âge de 6 mois devienne porteur chronique de l'hépatite B ?

(c) Selon ce modèle, si la probabilité qu'un enfant développe la forme chronique de la maladie est de 30 %, vers quel âge a-t-il été infecté ?

(d) Tracez le graphe de la fonction à l'aide de votre calculatrice dans une fenêtre appropriée. Reproduisez le graphique sur papier en y identifiant bien les axes, les unités des variables et les échelles. Sur ce graphique, identifiez clairement ce à quoi correspondent vos réponses en (a), en (b) et en (c).

(e) Dans le contexte, que nous dit le fait que la courbe soit décroissante ?

5.16 En coupant un fil de fer de 100 cm en deux morceaux, on souhaite former un carré et un cercle.

(a) Si on utilise 30 cm du fil pour former le carré et le reste du fil pour former le cercle, quelle sera l'aire totale des deux surfaces ?

(b) Si on utilise x cm du fil pour former le carré et le reste du fil pour le cercle, déterminez une fonction de x qui calcule l'aire totale des deux surfaces. Si on se permet de ne former qu'un carré ou qu'un cercle, quelle sera le domaine contextuel de la fonction ?

(c) Tracez le graphe de la fonction $A(x)$ à l'aide de votre calculatrice dans une fenêtre appropriée.

(d) Dans le contexte, que nous dit l'ordonnée à l'origine de la fonction ?

(e) À l'aide des outils d'analyse graphique de votre calculatrice, trouvez les valeurs extrêmes de la fonction sur le domaine et determinez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

(f) Quelles doivent être la longueur des côtés du carré et le rayon du cercle pour que l'aire totale des deux surfaces soit maximale ? Minimale ?

5.17 La distance, en mètres, entre deux objets en mouvement est donnée par la fonction

$$L(t) = \sqrt{13t^2 - 42t + 34} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 3,$$

où t est le temps exprimé en secondes.

(a) Quelle distance sépare les deux objets après 2 secondes ?

(b) Tracez le graphique de $L(t)$ à l'aide de votre calculatrice. Choisissez une fenêtre appropriée.

(c) En utilisant les outils d'analyse graphique de votre calculatrice, déterminez l'intervalle de temps pendant lequel les deux objets se rapprochent l'un de l'autre et celui où ils s'éloignent.

(d) À quel moment la distance séparant les deux objets est-elle la plus petite ? Quelle est cette distance ?

5.18 La position d'un objet se déplaçant sur une tige horizontale est donnée par la fonction

$$p(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 18 \text{ pour } 0 \leq t \leq 5$$

où t est exprimé en minutes depuis le début de l'observation et p est mesuré en mètres à partir d'un point de référence. Une position positive signifie que l'objet est situé à droite du point de référence (l'origine) tandis qu'une position négative signifie que l'objet est situé à sa gauche.

Faites tracer le graphe de cette fonction dans une fenêtre $[-1; 7] \times [-20{,}20]$ avec des graduations aux unités en abscisse et des graduations aux nombres pairs en ordonnée.

Quelles informations (position et direction), difficilement observables algébriquement nous révèle ce graphique ? *Suggestion : construisez un tableau de signes et de variations.*

5.3 Les opérations sur les fonctions

5.3.1 Les opérations de base

Tout comme pour les nombres, on peut effectuer les opérations de somme, de différence, de produit et de quotient sur des fonctions.

Définition 5.10 La **somme** des fonctions f et g, notée $f+g$, est définie par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

La **différence** des fonctions f et g, notée $f-g$, est définie par

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

Le **produit** des fonctions f et g, noté $f \cdot g$, est définie par

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Le **quotient** des fonctions f et g, noté $f \div g$, est définie par

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pour ces quatre opérations, l'évaluation des fonctions se fait en parallèle, c'est-à-dire que le résultat de l'évaluation d'une fonction n'influence pas le résultat de l'autre.

Exemple 5.12

Considérez les fonctions $f(x) = 1 - 3x$ et $g(x) = x^2 + 1$. Évaluez et simplifiez les expressions suivantes.

(a) $(f+g)(2)$
(b) $(f+g)(x)$
(c) $(f-g)(-1)$
(d) $(f-g)(x)$
(e) $(f \cdot g)(0)$
(f) $(f \cdot g)(x)$
(g) $(f \div g)(-2)$
(h) $(f \div g)(x)$

Solution :

(a) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = -5 + 5 = 0$

(b) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (1-3x) + (x^2+1) = x^2 - 3x + 2$

(c) $(f-g)(-1) = f(-1) - g(-1) = 4 - 2 = 2$

(d) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (1-3x) - (x^2+1) = -x^2 - 3x$

(e) $(f \cdot g)(0) = f(0) \cdot g(0) = 1 \cdot 1 = 1$

(f) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (1-3x) \cdot (x^2+1) = -3x^3 + x^2 - 3x + 1$

(g) $(f \div g)(-2) = f(-2) \div g(-2) = \dfrac{f(-2)}{g(-2)} = \dfrac{7}{5}$

(h) $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1-3x}{x^2+1}$

Exemple 5.13

Soit $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3$. Évaluez et simplifiez les expressions suivantes. Donnez une interprétation graphique des quantités impliquées.

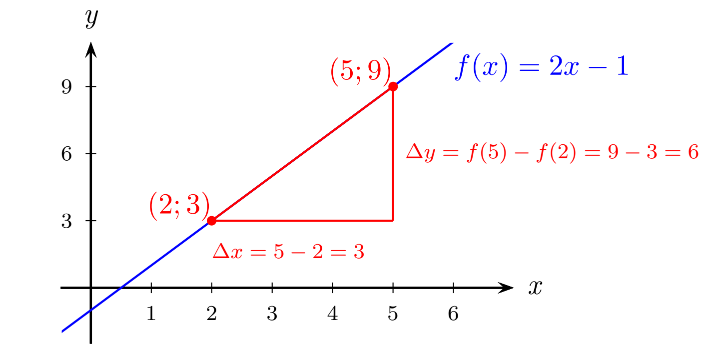
(a) $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$ (b) $\dfrac{g(3) - g(-1)}{3 - (-1)}$

Solution :

(a) On évalue la fonction en $x = 2$ et $x = 5$, $f(2) = 3$ et $f(5) = 9$, et on calcule

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - 3}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

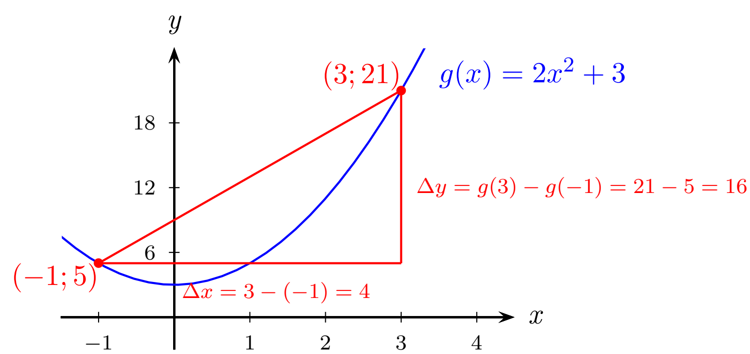
La valeur calculée est la pente de la droite passant par les points $(2; 3)$ et $(5; 9)$.



(b) Puisque $g(-1) = 5$ et $g(3) = 21$,

$$\frac{g(3) - g(-1)}{3 - (-1)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21 - 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

est la pente de la droite passant par les points $(-1; 5)$ et $(3; 21)$.

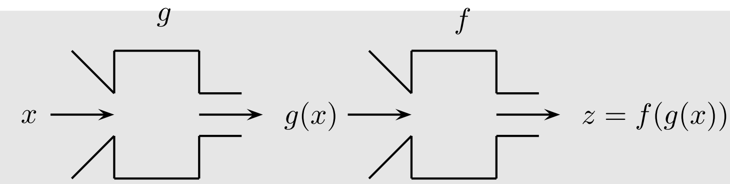


On peut aussi construire de nouvelles fonctions en les composant.

Définition 5.11 La **composition** des fonctions f et g est définie par

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right).$$

La notation $f \circ g$ se dit f **rond** g et signifie qu'on applique g à x pour ensuite appliquer f au résultat $g(x)$.



Contrairement aux opérations $+$, $-$, $\cdot$ et $\div$ de la définition 5.10, la composition de deux fonctions se fait en série, c'est-à-dire le résultat d'une fonction devient l'entrée de la seconde fonction.

Exemple 5.14

La composition permet de calculer le prix final d'un article dont le prix est réduit de 20 % et auquel on ajoute ensuite une taxe de 15 %. On peut calculer le montant de la facture pour cet article en composant une fonction f, qui ajoute la taxe, à une fonction g, qui déduit le rabais du prix affiché. Ainsi, si x est le prix affiché de l'article,

$$\text{prix réduit} = g(x) = 0{,}8x$$

$$\text{prix après taxe} = f(y) = 1{,}15y$$

et la composition $f \circ g$ permet de calculer le prix final après rabais et taxe.

$$\begin{array}{ccccc} \text{prix affiché} & & \text{prix réduit} & & \text{prix après rabais et taxe} \\ x & \xmapsto{g} & y = g(x) = 0{,}8x & \xmapsto{f} & z = f(g(x)) = 1{,}15(0{,}8x) \end{array}$$

Cette composition résulte en une nouvelle fonction $h = f \circ g$, telle que

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0{,}8x) = 1{,}15 \cdot 0{,}8x = 0{,}92x.$$

Exemple 5.15

Selon la loi des gaz parfaits, pour un nombre de moles n d'un gaz et une pression P (en kPa) donnés, le volume V (en L) de ce gaz varie en fonction de sa température T (en kelvins), selon l'équation

$$V(T) = \frac{nRT}{P},$$

où R est une constante. Si la température est donnée en degrés Celsius, il faut la convertir en kelvins pour obtenir le volume V par l'équation des gaz parfaits. La température T en kelvins correspondant à une température T_C en Celsius est donnée par la fonction

$$T = T(T_C) = T_C + 273.$$

On peut donc obtenir V_{T_C} le volume en fonction de la température en Celsius par la composition suivante des fonctions V et T

$$V_{T_C} = (V \circ T)(T_C) = V(T(T_C)) = V(T_C + 273) = \frac{nR(T_C + 273)}{P}$$

Exemple 5.16

En utilisant les fonctions $f(x) = \dfrac{1-2x}{3x-4}$, $g(x) = 3x^2$ et la table de valeurs pour h,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	1	0	-2	3	-3	-1	2

trouvez et simplifiez (lorsque possible) les expressions suivantes.

(a) $(f+g)(-1)$
(b) $(g-h)(2)$
(c) $(f \cdot g)(2)$
(d) $(h \div f)(0)$
(e) $(g \circ h)(-1)$
(f) $g(2x)$
(g) $f(x-1)$
(h) $(f \circ g)(x)$
(i) $(g \circ f)(x)$

Solution :

(a) $(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = \frac{1-2(-1)}{3(-1)-4} + 3(-1)^2 = \frac{3}{-7} + 3 = \frac{-3}{7} + 3 = \frac{-3+21}{7} = \frac{18}{7}$

(b) $(g-h)(2) = g(2) - h(2) = 3 \cdot (2)^2 - (-1) = 12 + 1 = 13$

(c) $(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = \frac{1-2(2)}{3(2)-4} \cdot 3(2)^2 = \frac{-3}{2} \cdot 12 = -18$

(d) $(h \div f)(0) = h(0) \div f(0) = 3 \div \frac{1}{-4} = -12$

(e) $(g \circ h)(-1) = g(h(-1)) = g(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$

(f) $g(2x) = 3(2x)^2 = 3 \cdot 4x^2 = 12x^2$

(g) $f(x-1) = \frac{1-2(x-1)}{3(x-1)-4} = \frac{1-2x+2}{3x-3-4} = \frac{3-2x}{3x-7}$

(h) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1-2(3x^2)}{3(3x^2)-4} = \frac{1-6x^2}{9x^2-4}$

(i) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3\left(\frac{1-2x}{3x-4}\right)^2 = \frac{3(1-2x)^2}{(3x-4)^2}$

5.3.2 La réciproque d'une fonction

Exemple 5.17

Lorsqu'on s'intéresse au volume d'une sphère connaissant son rayon r, on utilise la fonction

$$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Tandis que pour trouver le rayon, lorsqu'on connaît le volume de la sphère, on considère plutôt r comme fonction de V. Cette nouvelle fonction est appelée la fonction réciproque de f et est notée f^{-1}. Ainsi, $r = f^{-1}(V)$ est le rayon de la sphère de volume V et

$$r = f^{-1}(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Les valeurs de f^{-1} s'obtiennent soit en lisant le tableau 5.1 de droite à gauche, ou en consultant le tableau 5.2. Ainsi, la réciproque d'une fonction est obtenue en inversant l'ordre de toutes les paires $(r; V)$ qui forme l'ensemble solution de l'équation $V = f(r)$.
En composant les deux fonctions, on trouve

$$(f^{-1} \circ f)(r) = f^{-1}(f(r)) = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi}} = \sqrt[3]{r^3} = r$$

r en cm	$V = f(r)$ en cm^3
0	0
1	4,18...
2	33.5...
3	113,0...
4	268,0...
5	523,5...

Tableau 5.1 – V en fonction de r

V	$r = f^{-1}(V)$
0	0
4,18...	1
33.5...	2
113,0...	3
268,0...	4
523,5...	5

Tableau 5.2 – r en fonction de V

et

$$(f \circ f^{-1})(V) = f(f^{-1}(V)) = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right) = V.$$

Définition 5.12 Une fonction est dite **injective** si elle ne prend jamais deux fois la même valeur, c'est-à-dire

$$\text{si } x_1 \neq x_2 \text{ alors } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Lorsqu'une fonction est injective on peut définir sa fonction réciproque, c'est-à-dire son inverse sous la composition de fonctions.

Définition 5.13 Si f est une fonction injective de domaine X et d'image Y, sa **fonction réciproque** est définie par

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

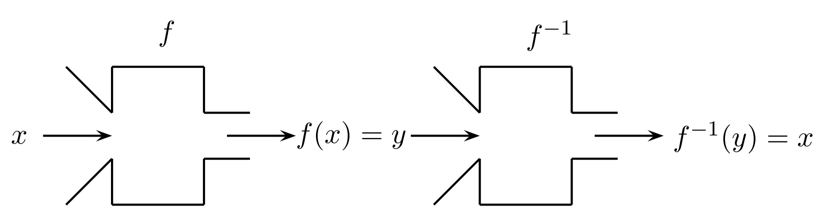
quel que soit $y \in Y$. La réciproque est alors de domaine Y et d'image X, c'est-à-dire

$$\mathrm{Dom}\Big(f^{-1}\Big) = Y = \mathrm{Im}(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\Big(f^{-1}\Big) = X = \mathrm{Dom}(f).$$

La notation fonctionnelle $f(x) = y$ signifie que f transforme x en y (ou f envoie x sur $y : x \mapsto y$) et la composition de fonctions

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

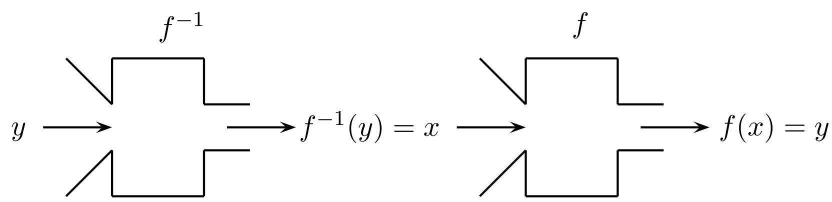
transforme x en y et ensuite transforme y en x. La « machine » f^{-1} défait ce que la « machine » f fait à x pour, finalement, rendre le x de départ intact.



De même, la notation $f^{-1}(y) = x$ signifie que f^{-1} transforme y en x (ou f^{-1} envoie y sur $x : y \mapsto x$) et la composition de fonctions

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

transforme y en x et ensuite transforme x en y pour rendre le y de départ intact.



Exemple 5.18

Soit la fonction $f(x) = 2x - 5$. Déterminez la valeur de $f^{-1}(10)$.

Solution :

Pour déterminer $f^{-1}(10)$, il faut trouver la valeur x correspondant à $y = 10$. On doit donc résoudre $2x - 5 = 10$ pour x.

$$\begin{aligned} 2x - 5 = 10 &\iff 2x = 15 \\ &\iff x = \tfrac{15}{2} \end{aligned}$$

Puisque $f\left(\frac{15}{2}\right) = 2 \cdot \frac{15}{2} - 5 = 15 - 5 = 10$, $f^{-1}(10) = \frac{15}{2}$.

Exemple 5.19

Déterminez la réciproque de la fonction $f(x) = x^3 - 1$.

Solution :

Étape 1. On remplace $f(x)$ par y : $y = x^3 - 1$

Étape 2. On intervertit x et y : $x = y^3 - 1$

Étape 3. On résout l'équation pour y :

$$\begin{aligned} x = y^3 - 1 &\iff x + 1 = y^3 \\ &\iff \sqrt[3]{x+1} = y \\ &\iff y = \sqrt[3]{x+1} \end{aligned}$$

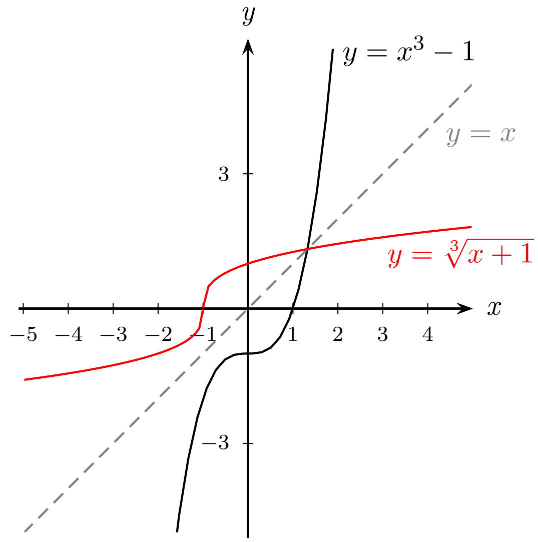
Étape 4. On remplace y par $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Validation. On vérifie algébriquement le résultat en calculant $(f \circ f^{-1})(x)$ et $(f^{-1} \circ f)(x)$ pour s'assurer que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ et que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\ &= f\left(\sqrt[3]{x+1}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 \\ &= (x+1) - 1 \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}(x^3 - 1) \\ &= \sqrt[3]{(x^3 - 1) + 1} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x \end{aligned}$$

On peut aussi vérifier que les fonctions ont des graphiques symétriques par rapport à la droite $y = x$ en les traçant dans une même fenêtre graphique.

Rappel. Les échelles en abscisse et en ordonnée doivent être identiques pour que les angles ne soient pas déformés.



Exemple 5.20

Déterminez la réciproque de la fonction $f(x) = \dfrac{2-3x}{2x+1}$.

Solution :

Étape 1. On remplace $f(x)$ par y : $y = \dfrac{2-3x}{2x+1}$

Étape 2. On intervertit x et y : $x = \dfrac{2-3y}{2y+1}$

Étape 3. On résout l'équation pour y :

$$\begin{array}{rcll} x = \frac{2-3y}{2y+1} & \iff & x(2y+1) = 2-3y & \text{on multiplie par } 2y+1 \text{ des deux côtés, pour } y \neq -\frac{1}{2} \\ & \iff & 2xy + x = 2 - 3y & \text{on développe} \\ & \iff & 2xy + 3y = 2 - x & \text{on additionne } 3y \text{ et on soustrait } x \text{ des deux membres} \\ & \iff & y(2x+3) = 2 - x & \text{on met } y \text{ en évidence} \\ & \iff & y = \frac{2-x}{2x+3} & \text{on isole } y\text{, pour } x \neq -\frac{3}{2} \end{array}$$

Étape 4. On remplace y par $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{2x+3}$.

Validation. On vérifie algébriquement que la fonction trouvée est bien la réciproque de f en calculant $(f \circ f^{-1}(x))(x)$ et $(f^{-1}(x) \circ f)(x)$.

$$\begin{array}{rcll}
(f \circ f^{-1}(x))(x) & = & f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2-x}{2x+3}\right) & \text{on compose les fonctions} \\
& = & \dfrac{2-3\left(\frac{2-x}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{2-x}{2x+3}\right)+1} & \text{on met au dénominateur commun} \\
& = & \dfrac{\dfrac{2(2x+3)-3(2-x)}{2x+3}}{\dfrac{2(2-x)+(2x+3)}{2x+3}} & \text{on développe} \\
& = & \dfrac{\dfrac{4x+6-6+3x}{2x+3}}{\dfrac{4-2x+2x+3}{2x+3}} & \text{on regroupe les termes semblables} \\
& = & \dfrac{\dfrac{7x}{2x+3}}{\dfrac{7}{2x+3}} = \dfrac{7x}{2x+3} \cdot \dfrac{2x+3}{7} & \text{on transforme la} \div \text{en} \cdot \\
& = & \dfrac{7x(2x+3)}{7(2x+3)} & \text{on multiplie} \\
& = & \dfrac{\cancel{7}\,x\,\cancel{(2x+3)}}{\cancel{7}\cancel{(2x+3)}} = x & \text{on simplifie les facteurs communs, pour } x \neq -\frac{3}{2}
\end{array}$$

On peut aussi vérifier que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ (*faites-le*) et que les graphiques des fonctions sont bien symétriques par rapport à l'axe $y = x$ (*faites-le*).

Exemple 5.21

Déterminez la réciproque de la fonction $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$ pour $x \geq 2$.

Solution :

Étape 1. On remplace $f(x)$ par y : $y = 3(x-2)^2 + 1$

Étape 2. On intervertit x et y : $x = 3(y-2)^2 + 1$

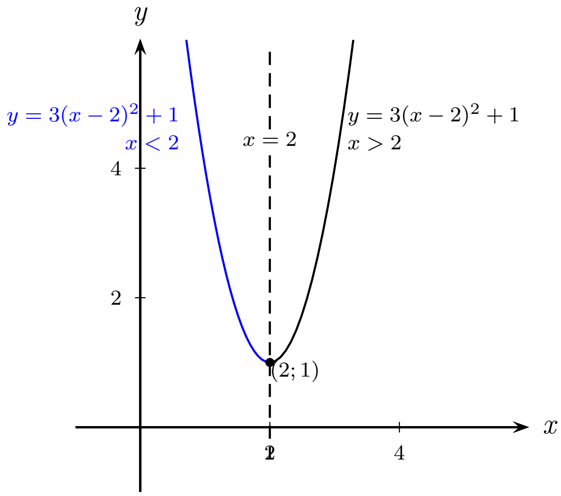
Étape 3. On résout l'équation pour y :

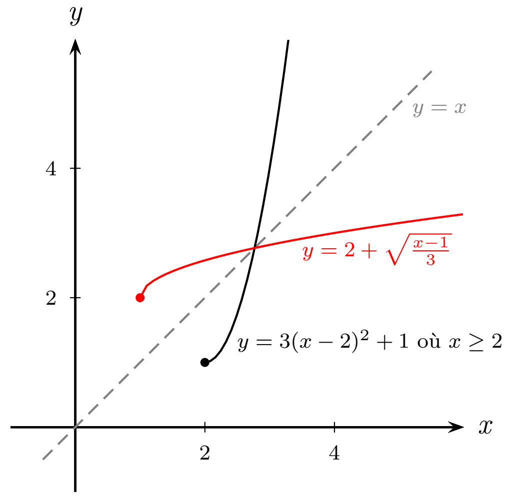
$$\begin{array}{rcl}
x = 3(y-2)^2 + 1 & \iff & x - 1 = 3(y-2)^2 \\
& \iff & \frac{x-1}{3} = (y-2)^2 \\
& \iff & (y-2)^2 = \frac{x-1}{3} \\
& \iff & y - 2 = \pm\sqrt{\frac{x-1}{3}} \\
& \iff & y = 2 \pm \sqrt{\frac{x-1}{3}}
\end{array}$$

Puisqu'il y avait au départ la contrainte $x \geq 2$, celle-ci se traduit sur la réciproque par $y \geq 2$. Ainsi $y = 2 + \sqrt{\frac{x-1}{3}}$.

Étape 4. On remplace y par $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{\frac{x-1}{3}}$

D'un point de vue graphique...


y
$y = 3(x-2)^2 + 1$
$x < 2$
$x = 2$
$y = 3(x-2)^2 + 1$
$x > 2$
4
2
$(2;1)$
x
2
4

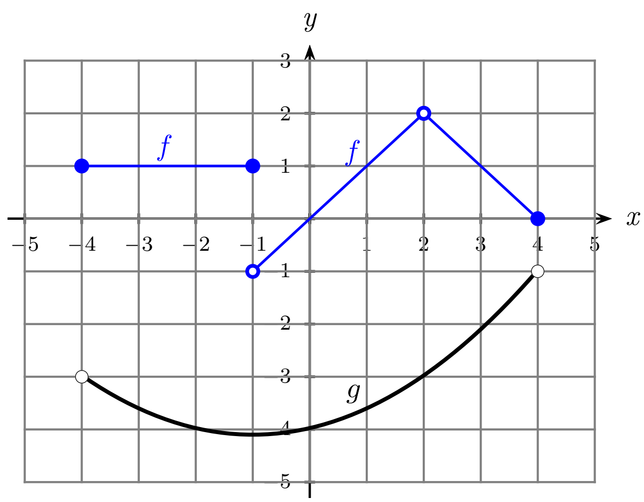

y
$y = x$
4
2
$y = 2 + \sqrt{\frac{x-1}{3}}$
$y = 3(x-2)^2 + 1$ où $x \geq 2$
x
2
4

Exercices

5.19 Soit $f(x) = 3x+2$, $g(x) = 3x^2 - x + 1$, $h(x) = \sqrt{x-3}$ et $i(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$. Évaluez et simplifiez les expressions suivantes.

(a) $(f+g)(0)$
(b) $(g-f)(-1)$
(c) $(g \cdot f)(1)$
(d) $(f \div g)(0)$
(e) $(g+f)(x)$
(f) $(f-g)(x)$
(g) $(g \cdot f)(x)$
(h) $(f \div g)(x)$
(i) $(f \circ i)(-2)$
(j) $(f \circ h)(12)$
(k) $(f \circ h)(x)$
(l) $(f \circ f)(x)$
(m) $(h \circ f \circ g)(0)$
(n) $(i \circ h)(2x)$
(o) $\dfrac{f(2x)}{2}$

5.20 En observant le graphique, estimez les valeurs demandées.



(a) Dom(f)
(b) Im(f)
(c) $f(3)$
(d) $f(-2)$
(e) Dom(g)
(f) $g(0)$
(g) $g(4)$
(h) $(f+g)(3)$
(i) $(g-f)(-2)$
(j) $(f \cdot g)(2)$
(k) $(g \div f)(3)$
(l) $(f \circ g)(3)$

5.21 En utilisant le tableau de valeurs de f et g, calculez les valeurs demandées.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	-5	-2	3
$g(x)$	0	1	4	-1

(a) $(f+g)(2)$
(b) $(f \cdot g)(2)$
(c) $(f \cdot g)(-1)$
(d) $(g \circ f)(-1)$
(e) $(f \circ g)(-1)$
(f) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$
(g) $(f \circ g)(0)$
(h) $(g \circ g)(0)$

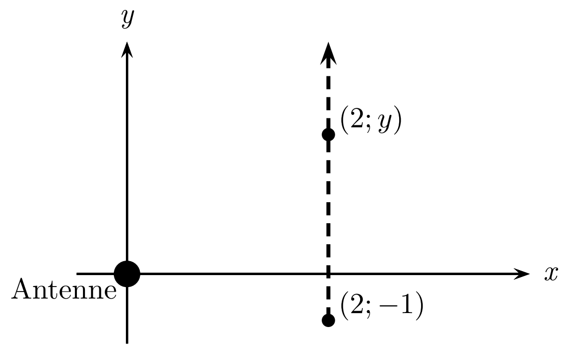
5.22 Produisez, à l'aide de votre calculatrice, le graphe de la fonction

$$f(x) = x + 3 - \frac{x^4}{32}$$

dans une fenêtre $[-3; 5] \times [-2; 5]$. Sur une reproduction de ce graphique, donnez une interprétation des valeurs suivantes.

(a) $f(-1)$
(b) $f(3)$
(c) $f(3) - f(-1)$
(d) $\dfrac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$

5.23 On s'intéresse à la distance qui sépare un promeneur, qui utilise son cellulaire, d'une antenne de transmission. Pour les besoins de la modélisation, on suppose que le nord est indiqué par l'axe des y, que l'antenne est située en $(0;0)$ et que le promeneur circule parallèlement à l'axe des y à partir du point $(2;-1)$ à une vitesse de 5 km/h. On suppose aussi que les distances sont mesurées en km.



(a) L'abscisse du point qui décrit la position du promeneur sera toujours 2 (tant qu'il marche vers le nord), qu'en est-il pour son ordonnée ? Déterminez une fonction $y = g(t)$ qui décrit l'ordonnée de la position du promeneur comme une fonction du temps t.

(b) Quelle fonction donne la distance d entre le promeneur, situé en $(2;y)$, et l'antenne ? Quelle est la variable dépendante ? Quelle est la variable indépendante ?

(c) Évaluez $(d \circ g)(t)$ et expliquez ce que cette nouvelle fonction représente dans le contexte.

5.24 Déterminez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

(a) $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$

(b) $f(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = -x$

(c) $f(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(e) $f(x) = \sqrt{3-x}$ et $g(x) = x^2 + 3$

(f) $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{5+x}{5-x}$

5.25 Exprimez chacune des fonctions suivantes comme une composition de deux fonctions f et g de telle sorte que $h(x) = (f \circ g)(x)$. N'utilisez pas les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x$.

(a) $h(x) = (4-x)^5$

(b) $h(x) = \sqrt{3x+2}$

(c) $h(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

(d) $h(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

(e) $h(x) = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{2-3x}}$

(f) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

5.26 Un réservoir cylindrique d'un mètre de rayon contient 8 m^3 d'eau. Au moyen d'une pompe on commence à vider le réservoir, ce qui fait baisser le niveau d'eau.

(a) Donnez l'expression de V, le volume d'eau retiré du réservoir, en fonction du niveau h de l'eau dans le réservoir à l'instant t.

(b) Déterminez la réciproque de V, c'est-à-dire exprimez h en fonction de V.

(c) Si le réservoir se vide à un débit constant de 0,7 m^3 par minute, quelle est l'expression $h(t)$ qui donne le niveau d'eau dans le réservoir en fonction du temps t en minutes ?

(d) Si le volume d'eau retiré en fonction du temps est donné par $V(t) = \frac{t^2}{3}$, quelle est l'expression de $h(t)$?

5.27 Pour chacune des paires de fonctions suivantes, évaluez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ afin de déterminer si f et g sont réciproques l'une de l'autre.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{4}$ et $g(x) = 4x$

(b) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \dfrac{x-3}{2}$

5.28 Déterminez la réciproque de chacune des fonctions suivantes. Vérifiez que vous avez bien trouvé la réciproque en montrant que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ et $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

(a) $f(x) = x^3 - 5$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{5x}{3+2x}$

5.29 Utilisez votre calculatrice pour tracer les graphes des fonctions f et g dans une même fenêtre. En plus de ces fonctions, faites tracer la droite $y = x$ et déterminez s'il est plausible que $f(x)$ et $g(x)$ soient réciproques l'une de l'autre.

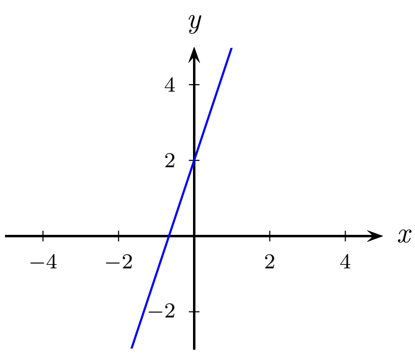
(a) $f(x) = \sqrt[3]{x-2} - 1$ et $g(x) = (2-x)^3 + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2}$ pour $x \geq 0$ et $g(x) = \sqrt{3+2x}$

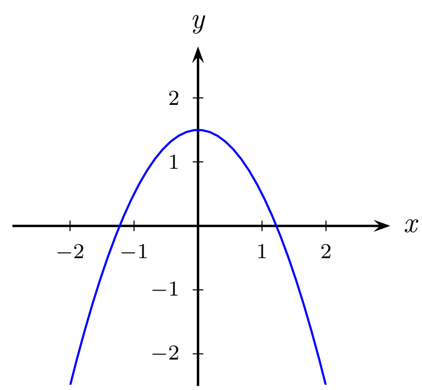
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$

5.30 Déterminez quels graphes parmi les suivants représentent des fonctions inversibles. Si une fonction est inversible, esquissez le graphe de sa réciproque. Déterminez le domaine et l'image de cette fonction réciproque.

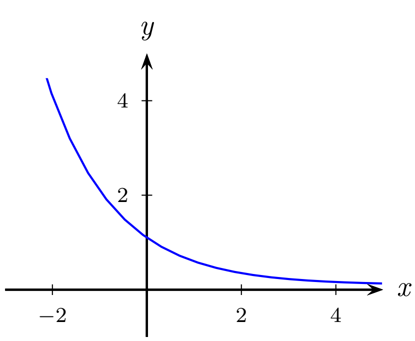
(a)



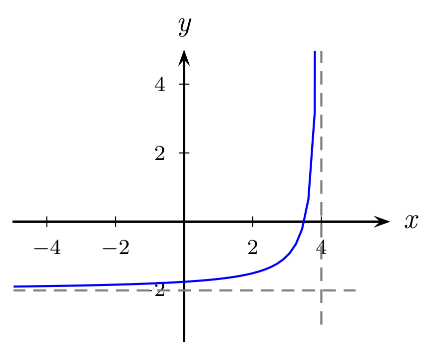
(c)



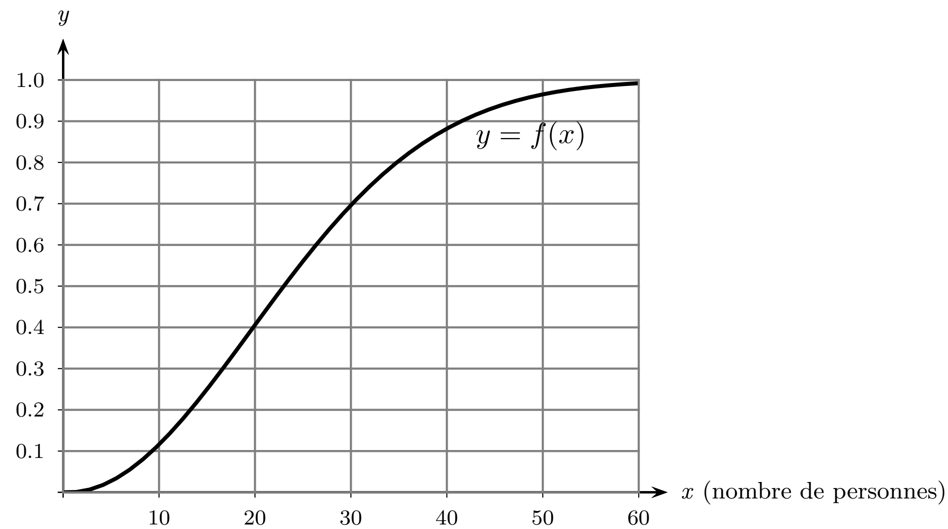
(b)



(d)



5.31 Le graphique ci-dessous décrit la probabilité que deux personnes présentes à une soirée aient la même date d'anniversaire de naissance en fonction du nombre de personnes qui sont présentes à la soirée. Désignons par x le nombre de personnes présentes à la soirée et $f(x)$ cette probabilité.



(a) En examinant le graphique, estimez la probabilité que deux personnes partagent la même journée d'anniversaire si 30 personnes sont présentes à la soirée.

(b) Décrivez en termes pratiques, dans le contexte, la signification de $f(10)$ et $f(40)$.

(c) Dans le contexte, que nous dit le fait que la courbe soit croissante ?

(d) En examinant le graphique, estimez le nombre minimal de personnes qui doivent être présentes à la soirée pour que la probabilité que deux anniversaires coïncident soit supérieure à 0,5.

(e) Expliquez pourquoi f possède une fonction réciproque.

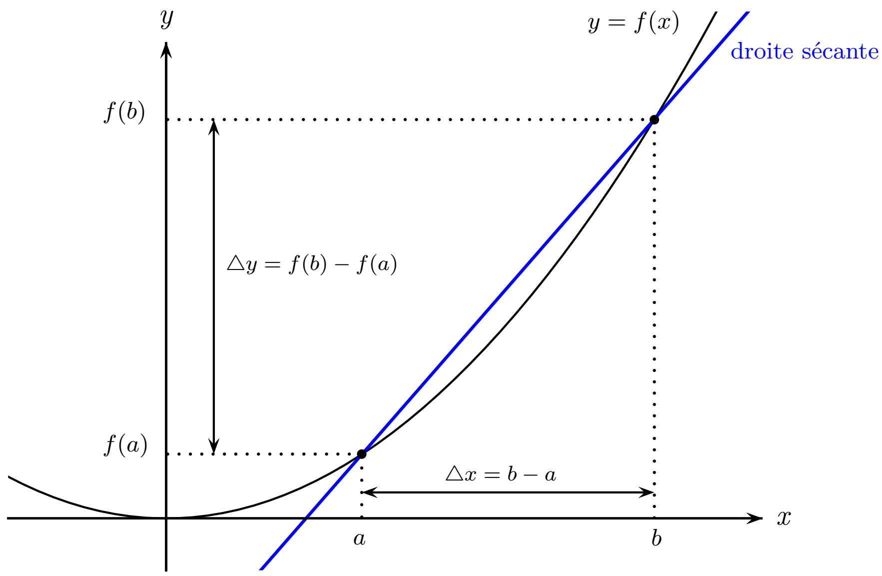
(f) Décrivez en termes pratiques, dans le contexte, la signification de $f^{-1}(0{,}1)$, $f^{-1}(0{,}5)$ et $f^{-1}(0{,}95)$.

5.4 Le taux de variation moyen

Définition 5.14 Le **taux de variation moyen** d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est donné par

$$TVM_{[a;b]} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sur le graphique de la fonction f, le **taux de variation moyen** $TVM_{[a;b]}$ correspond à la **pente de la droite sécante** qui passe par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.



En particulier, lorsque la fonction f est linéaire (c'est-à-dire dont le graphique est une droite non verticale) le taux de variation moyen est constant et correspond à la pente de la droite $y = f(x)$.

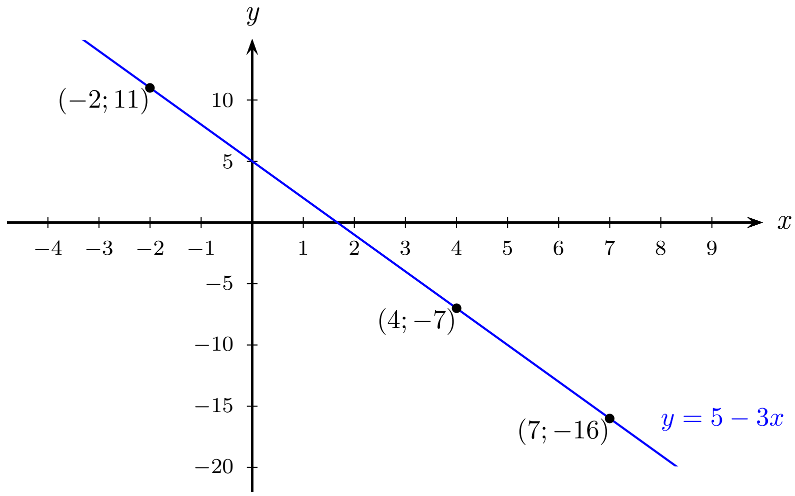
Calculons, par exemple, les taux de variation $TVM_{[4;7]}$ et $TVM_{[-2;4]}$ pour la fonction linéaire $f(x) = 5 - 3x$.

$$TVM_{[4;7]} = \frac{f(7)-f(4)}{7-4} = \frac{(-16)-(-7)}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

et

$$TVM_{[-2;4]} = \frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} = \frac{(-7)-11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

En examinant le graphique ci-dessous, on constate que les sécantes se confondent avec le graphe de la fonction $f(x) = 5 - 3x$. On peut donc penser que le taux de variation moyen correspond à la pente de la droite $y = 5 - 3x$.



C'est effectivement le cas car, quel que soit l'intervalle $[a;b]$ tel que $a < b$, le taux de variation moyen correspond toujours à la pente de la droite d'équation $y = 5 - 3x$:

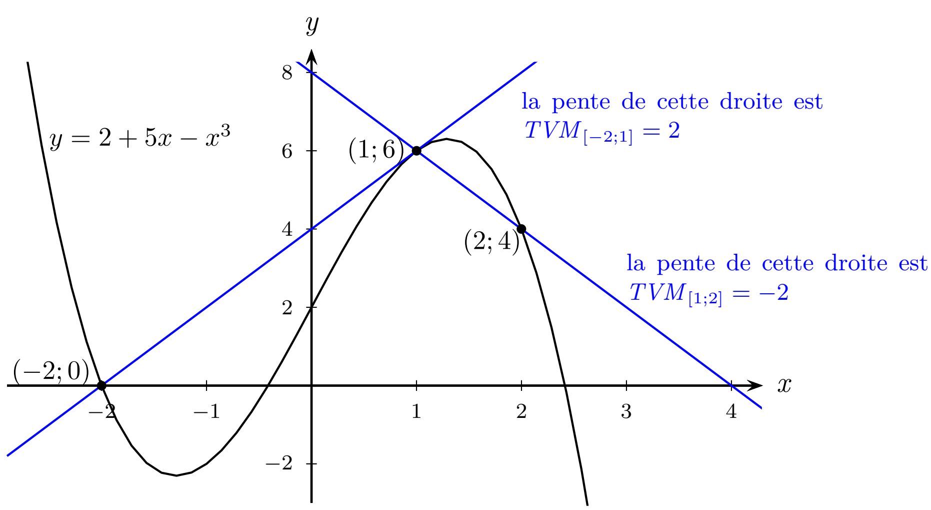
$$TVM_{[a;b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(5 - 3b) - (5 - 3a)}{b - a} = \frac{-3b + 3a}{b - a} = \frac{-3(b - a)}{b - a} = -3.$$

Exemple 5.22

Calculez les taux de variation $TVM_{[1;2]}$ et $TVM_{[-2;1]}$ pour la fonction $f(x) = 2 + 5x - x^3$ et donnez leur interprétation graphique.

Solution :

$TVM_{[1;2]} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-6}{2-1} = -2$ et $TVM_{[-2;1]} = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{6-0}{3} = 2$



Exemple 5.23

On a mesuré la pression P (exprimée en kPa) à différentes profondeurs d (en m) en mer. Les résultats sont donnés au tableau suivant.

d (m)	0	3	6	9	12	15
P (kPa)	101	131	161	193	225	256

(a) Expliquez ce que signifie $P(15) = 256$ dans le contexte.

(b) Calculez $TVM_{[12;15]}$ et indiquez ses unités. Expliquez ce que signifie cette valeur dans le contexte.

(c) En vous servant de $P(15) = 256$ et du taux trouvé en (b), estimez quelle sera la pression à 20 mètres de profondeur.

Solution :

(a) À 15 m de profondeur, la pression est de 256 kPa.

(b) $TVM_{[12;15]} = \frac{P(15)-P(12)}{15-12} = \frac{\triangle P}{\triangle d} = \frac{256-225}{3} = \frac{31}{3} \approx 10{,}3$ kPa/m. Ceci signifie qu'entre 12 et 15 m de profondeur, la pression augmente en moyenne de 31/3 kPa par mètre de profondeur. C'est-à-dire, qu'à 13 m de profondeur, la pression est d'environ $225 + 31/3 \approx 235{,}3$ kPa, qu'à 14 m de profondeur, la pression est d'environ $225 + 2 \cdot 31/3 \approx 245{,}7$ kPa et qu'à 15 m de profondeur, la pression est de $225 + 3 \cdot 31/3 = 256$ kPa.

(c) L'interprétation précédente nous amène naturellement, en faisant l'hypothèse que $TVM_{[15;20]}$ est identique à $TVM_{[12;15]}$, au calcul d'une approximation pour $P(20)$:

$$P(20) \approx P(15) + \frac{31}{3}(20-15) = 256 + \frac{31}{3}(5) = \frac{923}{3} \approx 307{,}7 \text{ kPa}.$$

Il est intéressant de noter que ceci correspond à approximer la courbe de la pression en fonction de la profondeur par la droite sécante de pente $TVM_{[12;15]}$ passant par le point $(15; P(15))$. En effet, en utilisant la forme pente-point d'une droite, on trouve que l'équation de cette sécante est

$$y - P(15) = TVM_{[12,15]}(d-15) \Longleftrightarrow y - P(15) = \frac{31}{3}(d-15).$$

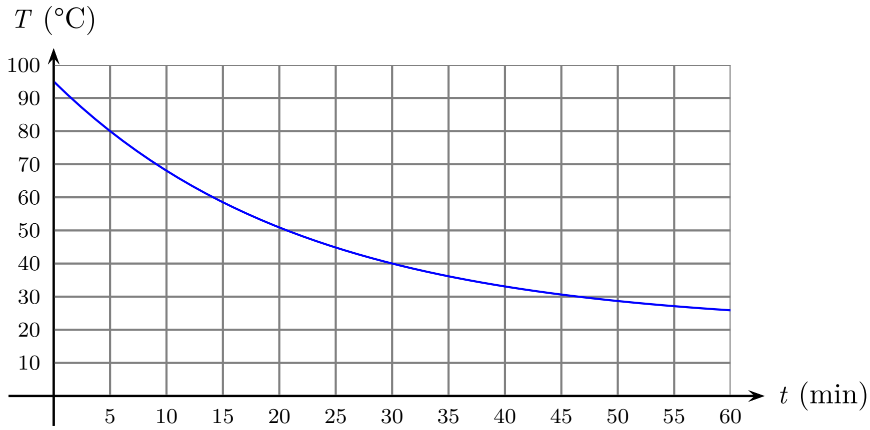
En isolant y et en évaluant en $d = 20$, on trouve le même résultat que précédemment

$$y = P(15) + \frac{31}{3}(d-15)\Big|_{d=20} = 256 + \frac{31}{3}(20-15) = \frac{923}{3} \approx 307{,}7.$$

Rappel. La forme pente-point de l'équation d'une droite est utile lorsqu'on connait sa pente a et les coordonnées $(x_0; y_0)$ d'un de ses points. L'équation de la droite est alors $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Exemple 5.24

La température T, mesurée en °C, d'un café est représentée au graphique ci-dessous, où t est mesuré en minutes depuis que le café a été servi.



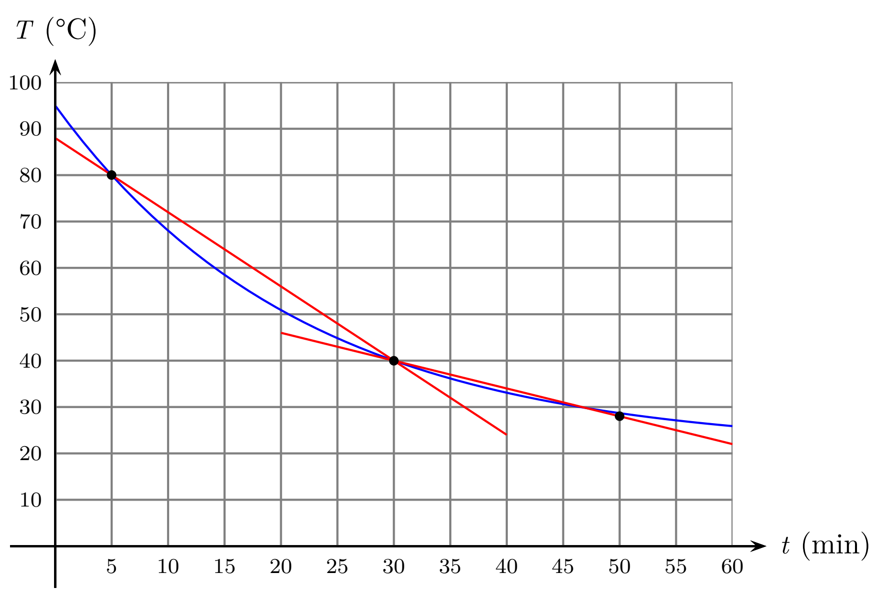
(a) Estimez $TVM_{[5;30]}$ à l'aide du graphique et expliquez ce que signifie cette valeur dans le contexte.

(b) En traçant des droites sécantes appropriées sur le graphique ci-dessus, déterminez si $TVM_{[30;50]}$ est plus petit ou s'il est plus grand que $TVM_{[5;30]}$ et expliquez ce que ceci nous dit dans le contexte.

Solution :

(a) $TVM_{[5;30]} = \frac{T(30)-T(5)}{30-5} \approx \frac{40-80}{25} = -\frac{8}{5} \approx -1.6$ °C/min. Ceci signifie qu'entre la 5e et la 30e minute depuis que le café a été servi, la température du café baisse en moyenne d'environ 1,6 °C par minute.

(b) En examinant le graphique ci-dessous, on constate que la pente de la droite passant par les points $(30; 40)$ et $(50; 28)$ est plus grande (plus près de zéro dans les négatifs) que celle passant par les points $(5; 80)$ et $(30; 40)$.



On en conclut que

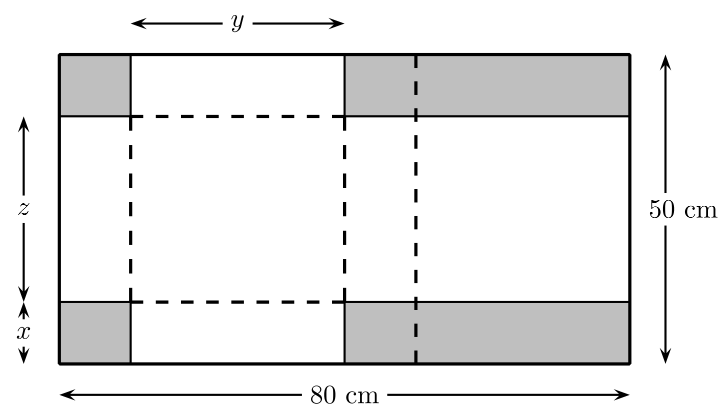
$$TVM_{[30;50]} > TVM_{[5;30]}.$$

Le calcul des taux permet de le confirmer, $TVM_{[30;50]} \approx -0{,}6$ tandis que $TVM_{[5;30]} \approx -1{,}6$. La valeur $-0{,}6$ est effectivement plus grande que $-1{,}6$.

La perte moyenne de température est donc plus importante entre la 5^e et la 30^e minute qu'entre la 30^e et la 50^e minute depuis que le café a été servi. Ceci est cohérent avec le fait que plus le café est chaud, plus sa température baisse rapidement.

Exemple 5.25

Vous construisez une boîte en découpant un carton 50 cm par 80 cm en lui enlevant les morceaux ombragés et en repliant le carton le long des lignes pointillées.



(a) Montrez que le volume de la boîte, comme fonction de la hauteur x, est donné par

$$V(x) = x(40 - x)(50 - 2x) \text{ où } x \in [0; 25].$$

(b) Calculez le taux de variation moyen du volume de la boîte par rapport à sa hauteur, lorsque celle-ci passe de 5 à 7 cm.

(c) Trouvez l'équation de la droite sécante qui passe par les points $(5; V(5))$ et $(7; V(7))$.

(d) Établissez le lien qui existe entre la sécante trouvée en (b) et le taux trouvé en (a). Illustrez graphiquement ce lien en traçant la fonction et la droite sécante sur un même référentiel. Indiquez sur ce graphique toutes les informations pertinentes.

(e) À l'aide du graphique de la fonction volume, c'est-à-dire sans faire de calculs, déterminez quel sera le signe de $TVM_{[15;20]}$. Que nous dit ce signe dans le contexte ?

(f) Calculez $TVM_{[7;15]}$. Que signifie cette valeur dans le contexte ?

Solution :

(a) Le volume de la boîte est donné par le produit de ses dimensions, $V = xyz$. À l'aide des contraintes sur les dimensions du carton, on trouve les relations entre les variables

$$2x + z = 50 \text{ et } 2x + 2y = 80.$$

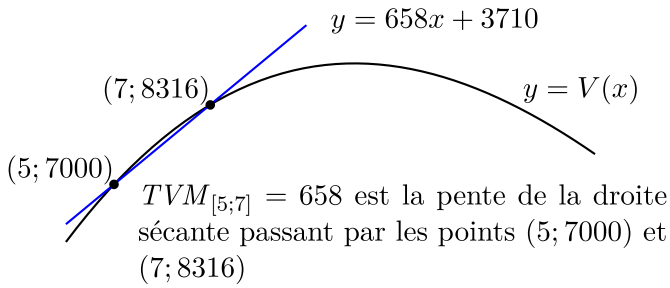
Ainsi $z = 50 - 2x$ et $2y = 80 - 2x \Leftrightarrow y = 40 - x$. On substitue ensuite ces relations dans l'expression xyz pour trouver le volume $V(x) = x(40-x)(50-2x)$ en fonction de x seulement. Le domaine contextuel est déterminé en utilisant le fait que chacune des dimensions doit être positive ou nulle.[iv] Ainsi, $x \geq 0$, $y = 40 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 40$ et $z = 50 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 25$. Le domaine contextuel est alors $[0; 25]$ pour que puisse satisfaire x toutes ces contraintes.

(b) $TVM_{[5;7]} = \frac{V(7)-V(5)}{7-5} = 658 \text{ cm}^3$ de volume/cm de hauteur.

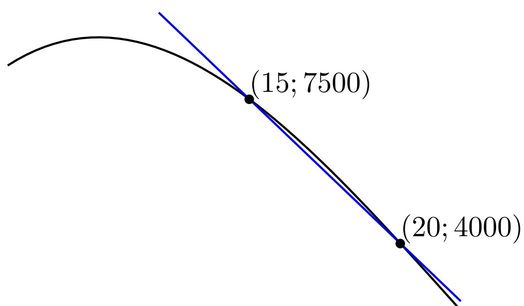
iv. On accepte que les dimensions soient nulles, puisque qu'un volume nul est possible dans le contexte.

(c) À l'aide de la forme pente-point, avec la pente $a = \frac{8316-7000}{7-5} = 658$ et le point $(7; 8316)$, on trouve $y - 8316 = 658(x - 7) \Leftrightarrow y = 658x + 3710$.

(d) La valeur $TVM_{[5;7]}$ correspond à la pente de la droite sécante passant par les points $(5; 7000)$ et $(7; 8316)$.

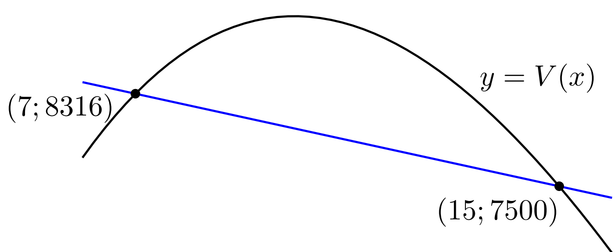


(e) $TVM_{[15;20]}$ est négatif. En moyenne, le volume de la boîte diminue lorsque sa hauteur passe de 15 à 20 cm.



(f) $TVM_{[7;15]} = -102$. Lorsque la hauteur de la boîte passe de 7 à 15 cm, son volume diminue en moyenne de 102 cm^3 par cm de hauteur.

Attention, ceci ne signifie pas que le volume décroît sur tout l'intervalle $[7; 15]$. En effet, sur cet intervalle, le volume croît pour ensuite décroître. La moyenne négative s'explique par le fait que sur l'intervalle $[7; 15]$, la perte de volume est plus importante que le gain.



Exercices

5.32 Soit $f(x) = x^4 - 8x - 40$.

(a) Pour cette fonction f, calculez les taux de variation $TVM_{[-2;3]}$, $TVM_{[-2;2]}$, $TVM_{[-2;1]}$ et $TVM_{[-2;0]}$ et donnez leur interprétation graphique.

(b) Existe-t-il une valeur $b > -2$, pour laquelle $TVM_{[-2;b]} = 0$? Si oui, laquelle ?

5.33 L'affaisement vertical[v] A (en m) mesuré au centre d'un câble hydroélectrique peut être modélisé comme une fonction de la température T (en °C).

(a) Expliquez ce que signifie dans ce contexte $A(15) = 3{,}6$.

(b) Déterminez les unités de $TVM_{[15;20]}$.

5.34 L'angle θ (mesuré en degrés) d'un bras de robot avec l'horizontale peut être modélisé comme une fonction du temps (mesuré en secondes) depuis que le robot a été mis en marche.

(a) Expliquez ce que signifie dans ce contexte $\theta(2) = 15$.

(b) Déterminez les unités de $TVM_{[2;4]} = 3$ et expliquez ce que cette valeur signifie dans le contexte.

(c) Sachant que $\theta(2) = 15$ et que $TVM_{[2;4]} = 3$, estimez quel sera l'angle du bras de robot avec l'horizontale 5 secondes après sa mise en marche.

5.35 Le tableau suivant donne le temps t, en années, que prend un investissement pour doubler en fonction du taux d'intérêt lorsque l'intérêt est composé annuellement.

i (%)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (années)	69,7	35	23,4	17,7	14,2	11,9	10,2	9	8	7,3

(a) Expliquez ce que signifie dans ce contexte $t(4) = 17{,}7$.

(b) Calculez $TVM_{[1;4]}$. Quelles sont ses unités ? Expliquez ce que $TVM_{[1;4]}$ nous dit dans le contexte.

5.36 Un brûleur à mazout propulse de l'air qui a été chauffé à 90 °C. On a mesuré la température de l'air T (°C) à différentes distances d (en m) du brûleur. Les résultats sont donnés au tableau suivant.

d (m)	0	1	3	5
T (°C)	90	84	66	46

(a) Expliquez ce que signifie $T(3) = 66$ dans ce contexte.

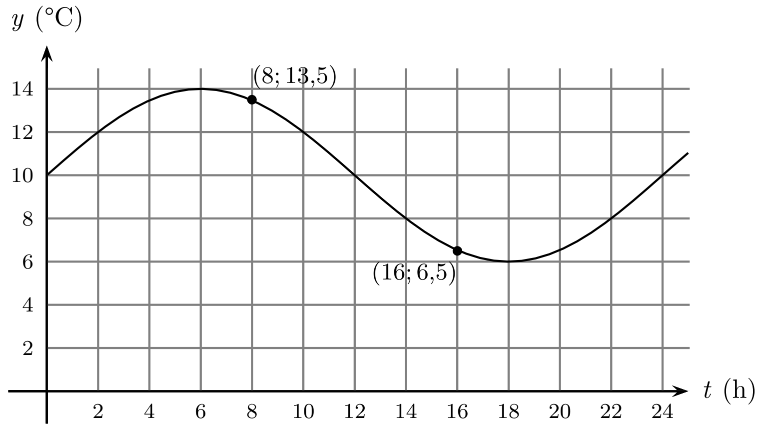
(b) Calculez $TVM_{[3;5]}$. Quelles sont ses unités ?

(c) Que nous dit le résultat précédent dans le contexte ?

(d) Utilisez $T(3) = 66$ et la valeur trouvée pour $TVM_{[3;5]}$ pour estimer la température de l'air à une distance de 3,5 m du brûleur.

v. Le terme technique est en fait *la flèche*, là où la distance verticale du câble à la ligne horizontale joignant les points d'attache du câble est maximale.

5.37 Le graphique d'une fonction $y = f(t)$ est donné à la figure ci-dessous. Supposez que cette fonction représente la température en °C d'un litre d'eau qui traîne sur une table de jardin au temps t mesuré en heures à compter de midi.



(a) À l'aide du graphique, estimez quelle sera la température de l'eau à midi, à 22 heures et à 6 heures le lendemain matin.

(b) À l'aide du graphique, estimez à quelle(s) heure(s) l'eau sera à 12°C.

(c) Trouvez l'équation de la droite sécante qui passe par les deux points indiqués sur le graphique. Dans ce contexte, comment peut-on interpréter la valeur de la pente de cette droite ?

(d) À l'aide du graphe de $y = f(t)$, c'est-à-dire sans faire de calculs, dites si la pente de la droite passant par les points $(4; 13{,}5)$ et $(12; 10)$ sera plus grande ou plus petite que la pente de celle trouvée en (c). Expliquez pourquoi ceci est plausible dans le contexte.

5.38 L'aire d'un cercle de rayon r est donnée par la fonction $A(r) = \pi r^2$.

(a) En supposant que le rayon est exprimé en cm, évaluez $TVM_{[2;5]}$ et déterminez ses unités. Expliquez ce que signifie cette valeur dans le contexte.

(b) À l'aide du graphique de la fonction, c'est-à-dire sans faire de calculs, déterminez si $TVM_{[4;6]}$ sera plus petit ou plus grand que $TVM_{[2;5]}$. Fournissez un graphique commenté.

(c) Expliquez à l'aide du contexte pourquoi votre conjecture en (b) est plausible. *Dessinez des cercles pour aider à l'interprétation.* Calculez ensuite $TVM_{[4;6]}$ à l'aide de la formule d'aire pour vérifier votre conjecture.

5.39 Le son se propage dans l'air à une vitesse qui dépend de la température. Cette vitesse peut être modélisée par la fonction $v(T) = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ où v est la vitesse du son exprimée en m/s et T est la température de l'air en °C.

(a) Quelle est la vitesse du son lorsque la température de l'air est de 18 °C ?

(b) Quelle est la température de l'air si la vitesse du son est de 337 m/s ?

(c) Le zéro absolu (ou 0 kelvin) est la température à laquelle, théoriquement, le son ne se propagerait plus. Quelle est, en degrés Celsius, la valeur du zéro absolu ?

(d) Comment change en moyenne la vitesse du son lorsque la température passe de 5 à 7°C ?

(e) À l'aide du graphe de la fonction vitesse, déterminez si la valeur $TVM_{[15;20]}$ sera plus petite ou plus grande que $TVM_{[5;7]}$ et interprétez ce que ceci signifie dans le contexte de la vitesse. Plus généralement, à l'aide du graphique, comment change le taux de variation moyen de la vitesse du son par rapport à la température de l'air lorsque la température augmente ? Produisez un graphique commenté afin d'expliquer votre raisonnement.

Chapitre 6

Les fonctions polynomiales et rationnelles

6.1 Les fonctions linéaires

En français, on distingue habituellement les fonctions de type linéaire $f(x) = ax$, $a \neq 0$, de celles de type affine $f(x) = ax + b$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Comme toutes les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$, quelles que soient les valeurs $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, sont représentées graphiquement par des droites $y = ax + b$, dans cet ouvrage, on les désignera toutes comme linéaires. Attention, toute fonction linéaire est représentée par une droite, mais les droites verticales $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$ ne représentent pas des fonctions.

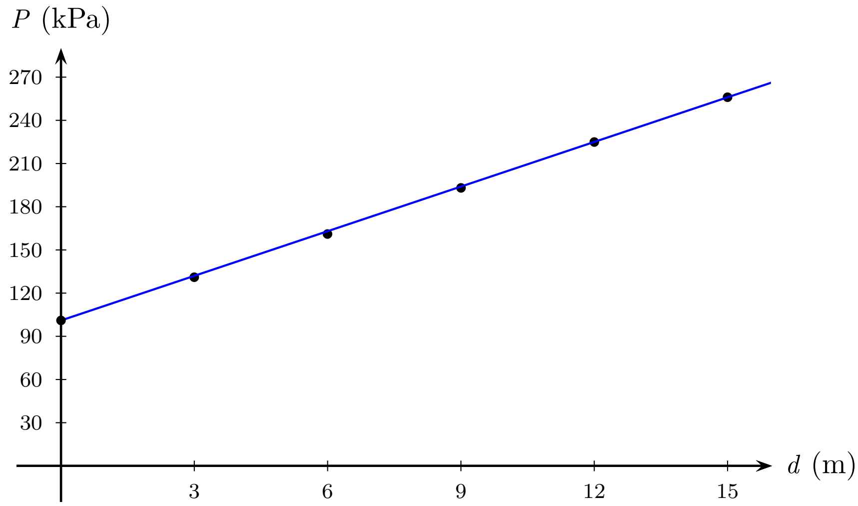
Définition 6.1 Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Exemple 6.1

À l'exemple 5.15 on a présenté des données sur la pression P (exprimée en kPa) à différentes profondeurs d (en m) en mer.

d (m)	0	3	6	9	12	15
P (kPa)	101	131	161	193	225	256

Un coup d'oeil rapide au graphique ci-dessous (où on superpose les points correspondants aux couples du tableau ci-dessus et la droite sécante passant par les points $(12; 225)$ et $(15; 256)$) peut laisser l'impression que P est linéaire en d.

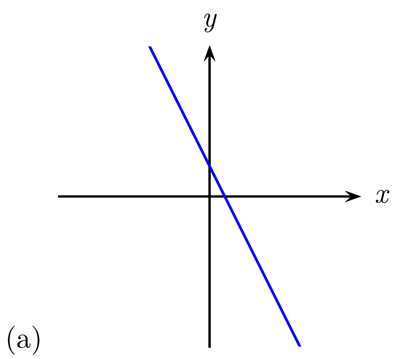


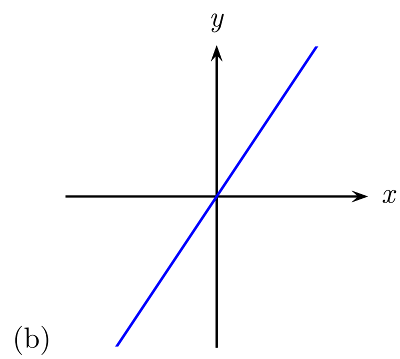
Il faut se méfier des impressions, même si P est bien une fonction de d, elle n'est pas linéaire en d. En effet, lorsque la profondeur d augmente de 3 m, la pression P n'augmente pas toujours de la même quantité. Les points ne peuvent donc pas tous être sur une même droite.

intervalles pour d	$[0\,;\,3]$	$[3\,;\,6]$	$[6\,;\,9]$	$[9\,;\,12]$	$[12\,;\,15]$
variation en d : $\triangle d$ (m)	3	3	3	3	3
variation en P : $\triangle P$ (kPa)	30	30	32	32	31

Exemple 6.2

Les graphiques suivants représentent des fonctions linéaires $f(x) = ax + b$. Dans chacun des cas, déterminez à l'aide du graphique, si a et b sont positifs, négatifs ou nuls.





Solution :

(a) $a < 0$, car la droite décroît et $b > 0$, car l'ordonnée à l'origine est au-dessus de l'axe des x.

(b) $a > 0$, car la droite croît et $b = 0$, car l'ordonnée à l'origine est 0.

Tableau 6.1 – Résumé des caractéristiques de la fonction constante $f(x) = b$

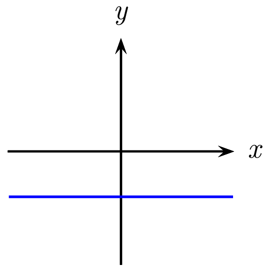
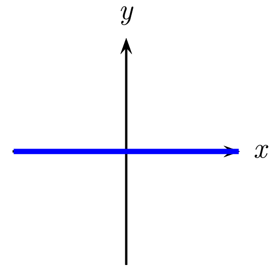
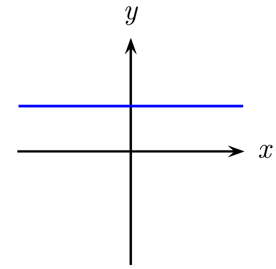
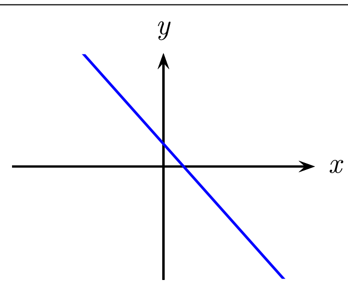
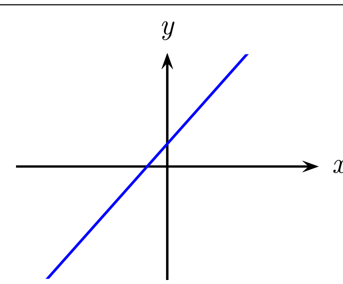
$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
		
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = \{b\}$	$\mathrm{Im}(f) = \{0\}$	$\mathrm{Im}(f) = \{b\}$
aucun zéro	toute les valeurs de x sont des zéros	aucun zéro
ordonnée à l'origine : b	ordonnée à l'origine : 0	ordonnée à l'origine : b
négative sur $\mathbb{R}$	nulle sur $\mathbb{R}$	positive sur $\mathbb{R}$
constante sur $\mathbb{R}$	constante sur $\mathbb{R}$	constante sur $\mathbb{R}$

Tableau 6.2 – Résumé des caractéristiques de la fonction linéaire $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ et $b > 0$

$a < 0$	$a > 0$
	
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$	$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
zéro : $x = -\frac{b}{a}$	zéro : $x = -\frac{b}{a}$
ordonnée à l'origine : b	ordonnée à l'origine : b
positive sur $]-\infty; -\frac{b}{a}[$ négative sur $]-\frac{b}{a}; \infty[$	positive sur $]-\frac{b}{a}, \infty[$ négative sur $]-\infty; -\frac{b}{a}[$
décroissante sur $\mathbb{R}$	croissante sur $\mathbb{R}$

Exercices

6.1 Parmi les équations suivantes lesquelles définissent y comme une fonction linéaire en x ?

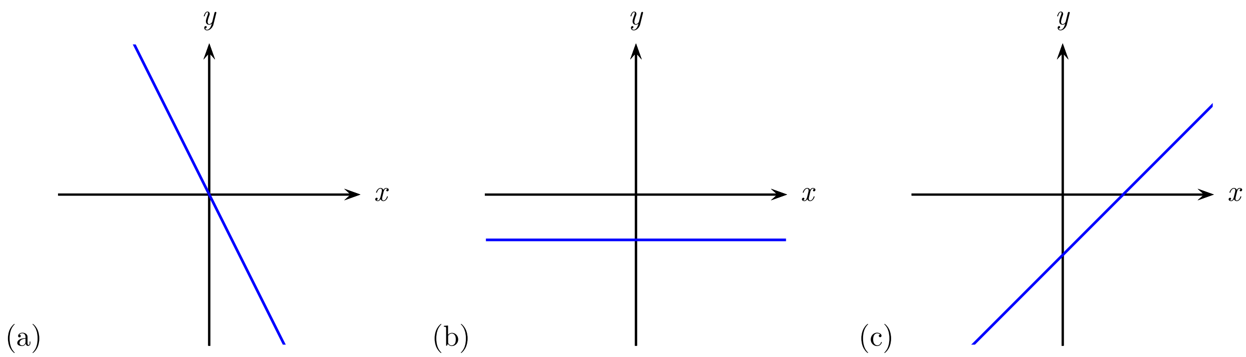
(a) $y + 2x = 1$ (b) $x = 3$ (c) $y = 3$

6.2 Le tableau ci-dessous contient, pour chacun des mois de l'année, les températures maximales moyennes[i] calculées sur une période de 30 ans.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Max moyen (°C)	−5,7	−3,9	2,2	10,7	19	23,6	26,2	24,8	19,7	12,7	5,3	−2,2

Est-il plausible que les données de ce tableau définissent la température maximale moyenne comme une fonction du mois de l'année ? Si cette relation est une fonction, est-elle linéaire ?

6.3 Les graphiques suivants représentent des fonctions linéaires $f(x) = ax + b$. Dans chacun des cas, déterminez à l'aide du graphique, si a et b sont positifs, négatifs ou nuls.



6.4 Pour chacune des fonctions linéaires suivantes, tracez la droite correspondante et déterminez ses caractéristiques (domaine, image, ordonnée à l'origine, zéro, les valeurs de x pour lesquelles la fonction est strictement positive, celles pour lesquelles elle est strictement négative, les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction ainsi que les valeurs pour lesquelles la fonction est constante).

(a) $f(x) = 4x + 5$ (b) $f(x) = 2 - 3x$ (c) $f(x) = 3$

6.5 Colette est vétérinaire dans une clinique d'urgence. Son salaire de base est 2 000 \$ par semaine, auquel est ajoutée une commission de 15 % du total de sa rentrée d'argent à la clinique dans la semaine.

(a) Quel salaire Colette reçoit-elle dans une semaine où sa rentrée d'argent à la clinique est de 15 000 \$?

(b) Si x représente sa rentrée d'argent à la clinique dans une semaine, exprimez son salaire hebdomadaire $S(x)$ comme une fonction de x.

(c) Déterminez les domaine et image de la fonction $S(x)$ et donnez-en une interprétation contextuelle.

i. Données provenant de Météo Média https://www.meteomedia.com.

6.6 Une entreprise fabrique une pièce spécialisée qui entre dans la construction d'une automobile de luxe. Cette pièce se vend 500 $ l'unité. La production de la pièce entraîne des coûts fixes (loyer, assurances, taxes, entretien, etc.) de 20 000 $ par année et des coûts variables (matériau, main d'oeuvre, etc.) de 200 $ par pièce produite.

(a) Déterminez une fonction linéaire $C(x)$ donnant les coûts de production annuels (en $) de x pièces.

(b) Déterminez une fonction linéaire $R(x)$ donnant les revenus (en $) associés à la vente de x pièces.

(c) Déterminez le seuil de rentabilité (en finance, on parle de *point mort*), c'est-à-dire le nombre de pièces qu'il faut produire et vendre en un an pour que les coûts soient égaux aux revenus.

(d) Tracez les fonctions coûts et revenus dans un même plan cartésien et donnez une interprétation graphique du seuil de rentabilité calculé en (c).

(e) Déterminez la fonction linéaire $P(x)$ donnant les profits engendrés par la production et la vente de x pièces en un an.

(f) Sur le même graphique que celui tracé en (d), tracez la courbe des profits et vérifiez que son zéro correspond à l'abscisse du point d'intersection des fonctions coûts et revenus, c'est-à-dire que le seuil de rentabilité correspond à un profit nul.

(g) Déterminez la fonction $P^{-1}(x)$ et, plus particulièrement, $P^{-1}(50\,000)$. Donnez une interprétation contextuelle de cette valeur.

6.2 Les fonctions quadratiques

On a vu au chapitre 3 comment résoudre une équation quadratique et en interpréter les solutions graphiquement. Il sera maintenant question des fonctions quadratiques. En particulier, on verra comment exploiter la représentation algébrique (la règle de correspondance) d'une fonction quadratique pour tracer rapidement une esquisse de son graphe (une parabole) à la main.

Définition 6.2 Une **fonction quadratique** est une fonction de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des nombres réels et où $a \neq 0$.

La forme générale (développée) $f(x) = ax^2 + bx + c$ permet de facilement repérer l'ordonnée à l'origine de la fonction.

Exemple 6.3

La fonction $f(x) = 3(x-1)^2 - 2(x+3) - 1$ est bien quadratique, car lorsqu'on développe l'expression $3(x-1)^2 - 2(x+3) - 1$ on obtient la forme $ax^2 + bx + c$ où $a = 3$, $b = -8$ et $c = -4$.

$$f(x) = 3(x-1)^2 - 2(x+3) - 1 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2(x+3) - 1 = 3x^2 - 8x - 4$$

On constate que le terme constant de la forme développée, -4, correspond à l'ordonnée à l'origine de la parabole, c'est-à-dire la même valeur que celle obtenue en évaluant la fonction quadratique en $x = 0$.

$$f(0) = 3(0-1)^2 - 2(0+3) - 1 = 3 - 6 - 1 = -4$$

La forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ permet de repérer facilement les zéros (r_1 et r_2) de la fonction.

Exemple 6.4

Déterminez les zéros de la fonction $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

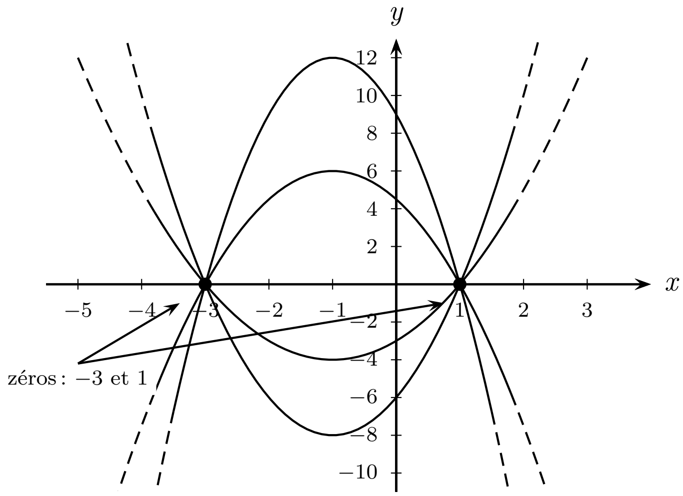
$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 6 &= 2(x^2 + 2x - 3) && \text{mise en évidence de 2} \\ &= 2(x-1)(x+3) && \text{par inspection : produit de } -3 \text{ et somme de } 2 \end{aligned}$$

La forme factorisée permet, à l'aide de la règle du produit nul, de déterminer ses zéros.

$$f(x) = 0 \iff 2(x+3)(x-1) = 0 \iff x = -3 \text{ ou } x = 1$$

Les zéros de la fonction sont donc -3 et 1.

Cette information, à elle seule, ne suffit pas pour tracer le graphe de la fonction quadratique, car un nombre infini de paraboles ont les mêmes zéros.



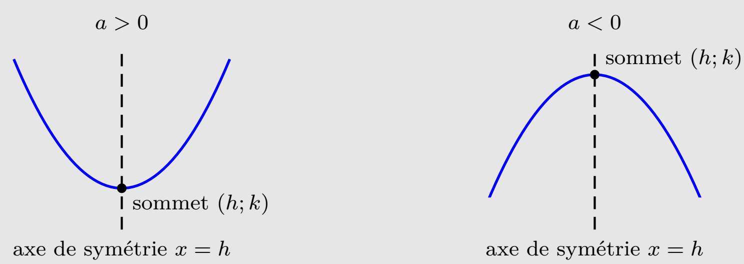
C'est grâce à la forme suivante, dite canonique, qu'on pourra déterminer rapidement l'axe de symétrie et le sommet de la parabole.

La forme canonique d'une fonction quadratique

Une fonction quadratique est dite sous **forme canonique** lorsqu'elle est écrite sous la forme

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \quad \text{où} \;\; a \neq 0.$$

La courbe d'équation $y = f(x)$ est une parabole de sommet $(h; k)$ et elle est symétrique par rapport à la droite verticale $x = h$. Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut et si $a < 0$, elle est ouverte vers le bas.



Exemple 6.5

Déterminez le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Solution :

On transforme l'expression $2x^2 + 4x - 6$ sous forme canonique par complétion de carré.

$$\begin{array}{rcll}
2x^2+4x-6 & = & 2[x^2+2x]-6 & \text{on met en évidence 2} \\
 & = & 2\left[(x+1)^2-1\right]-6 & \text{on complète le carré} \\
 & = & 2(x+1)^2-2-6 & \text{on distribue 2} \\
 & = & 2(x+1)^2-8 & \text{on réduit} \\
 & = & 2(x-(-1))^2+(-8) & \text{on reconnaît } h \text{ et } k
\end{array}$$

Le sommet de la parabole est donc $(-1; -8)$.

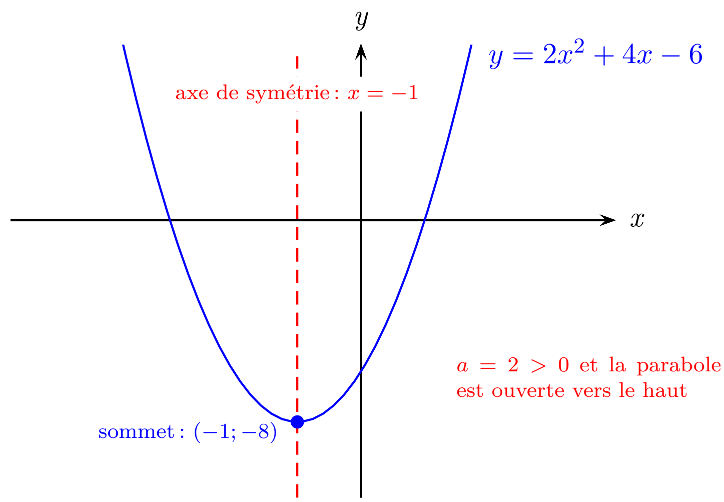
En effet, si on examine la forme canonique $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$ on constate que, quelle que soit la valeur $x \in \mathbb{R}$,

$$2(x+1)^2 \geq 0$$

puisqu'il s'agit du double d'un carré. Si on retranche 8 des deux côtés de l'inéquation, on trouve

$$2(x+1)^2 - 8 \geq -8.$$

$f(x) = 2(x+1)^2 - 8$ sera toujours plus grande ou égale à -8. Par conséquent, la fonction a comme valeur minimale -8 et ce, lorsque $x = -1$.



Exemple 6.6

Déterminez le sommet de la parabole d'équation $y = 3 + 12x - 3x^2$.

Solution :

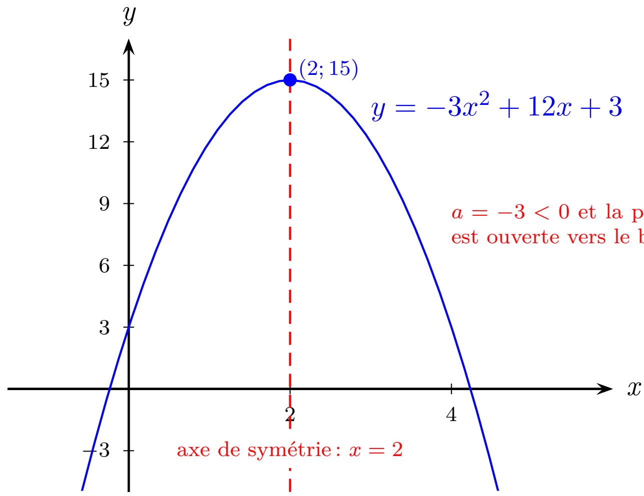
On complète le carré.

$$\begin{array}{rcll}
3 + 12x - 3x^2 & = & -3x^2 + 12x + 3 & \text{on place les termes en ordre décroissant} \\
 & & & \text{des exposants} \\
 & = & -3[x^2 - 4x] + 3 & \text{on met en évidence } -3 \\
 & = & -3\left[(x-2)^2 - 4\right] + 3 & \text{on complète le carré} \\
 & = & -3(x-2)^2 + 12 + 3 & \text{on distribue } -3 \\
 & = & -3(x-2)^2 + 15 & \text{on réduit} \\
 & = & 15 - 3(x-2)^2 &
\end{array}$$

Le sommet est donc $(2; 15)$ et la parabole est ouverte vers le bas. En effet, quelle que soit la valeur $x \in \mathbb{R}$,

$$-3(x-2)^2 \leq 0$$

puisqu'il s'agit d'un négatif multiplié par un carré. La fonction $f(x) = -3(x-2)^2 + 15$ sera toujours plus petite ou égale à 15. Sa valeur maximale sera donc 15 et celle-ci sera atteinte en $x = 2$.



Exemple 6.7

Comme on a vu aux exemples 6.4 et 6.5, la fonction quadratique $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ s'écrit de plusieurs façons équivalentes.

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 2x^2 + 4x - 6 & \text{forme développée} \\ & = & 2(x+3)(x-1) & \text{forme factorisée} \\ & = & 2(x+1)^2 - 8 & \text{forme canonique} \end{array}$$

Chacune de ces formes présente un intérêt lorsqu'on veut tracer une esquisse du graphe de la fonction à la main. La forme développée permet de déterminer rapidement l'ordonnée à l'origine de la courbe.

$$f(0) = 2x^2 + 4x - 6\Big|_{x=0} = -6$$

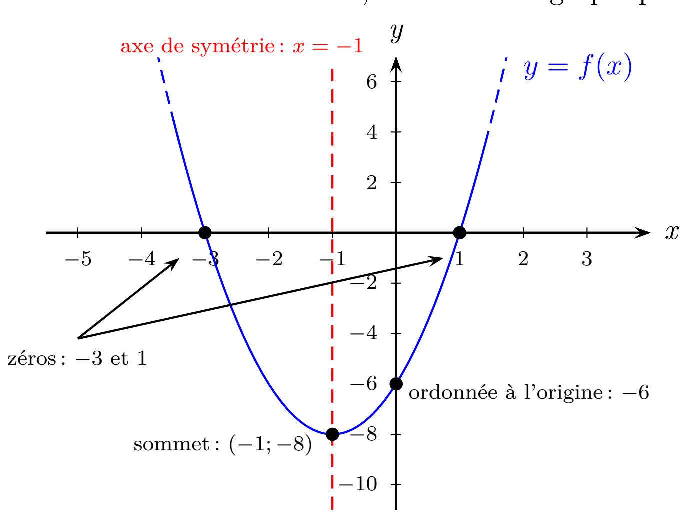
La forme factorisée permet, à l'aide de la règle du produit nul, de déterminer ses zéros

$$f(x) = 0 \iff 2(x+3)(x-1) = 0 \iff x = -3 \text{ ou } x = 1$$

et la forme canonique, de déterminer son sommet.

$$f(x) = 2(x+1)^2 - 8 \implies \text{sommet : } (-1; -8)$$

Lorsqu'on tient compte de toute cette information, on obtient le graphique suivant.

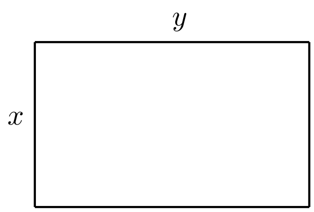


Exemple 6.8

On a 100 m linéaires de clôture pour ceinturer un enclos rectangulaire. Quelles sont les dimensions de l'enclos qui en maximiseront l'aire ?

Solution :

Soit x une des dimensions de l'enclos (en mètres) et y l'autre dimension (aussi en mètres).



La contrainte (quantité de clôture disponible) peut être décrite par les équations équivalentes $2x + 2y = 100 \iff y = 50 - x$.
L'aire de l'enclos, ce qu'on veut maximiser, peut être décrite par $A = x \cdot y$.

En substituant la contrainte $y = 50 - x$ dans l'expression pour l'aire $A = x \cdot y$, on obtient la fonction à une seule variable

$$A(x) = x \cdot y|_{y=50-x} = x \cdot (50 - x)$$

pour décrire l'aire de l'enclos.

On doit maintenant déterminer le domaine contextuel de la fonction, c'est-à-dire l'intervalle de recherche pour x. Puisque x et y sont les dimensions de l'enclos, on sait que $x \geq 0$ et $y \geq 0$ d'où

$$y \geq 0 \iff 50 - x \geq 0 \iff x \leq 50.$$

Puisque $x \geq 0$ et $x \leq 50$, le domaine contextuel est $[0; 50]$.

On veut donc maximiser la fonction $A(x) = x(50 - x)$ sur l'intervalle $[0; 50]$. Puisqu'il s'agit d'une fonction quadratique, on cherche le sommet de la parabole par complétion de carré.

$$\begin{aligned}
A(x) &= x \cdot (50 - x) \\
&= 50x - x^2 && \text{on développe} \\
&= -x^2 + 50x && \text{on place les termes en ordre décroissant des exposants} \\
&= -\left[x^2 - 50x\right] && \text{on met en évidence } -1 \\
&= -\left[(x - 25)^2 - 625\right] && \text{on complète le carré} \\
&= -(x - 25)^2 + 625 && \text{on distribue } -1 \\
&= 625 - (x - 25)^2
\end{aligned}$$

Le sommet est donc $(25; 625)$. L'aire maximale serait donc 625 m^2 lorsque $x = 25$ m.

- La valeur trouvée est possible dans le contexte puisque $25 \in \text{Dom}(A(x))$.
- Il s'agit bien d'une valeur maximale, car la parabole est ouverte vers le bas ($a = -1 < 0$).

Les dimensions de l'enclos qui maximiseront l'aire sont donc $x = 25$ m par $y = 50 - x = 25$ m.

Exemple 6.9

Une fusée miniature est tirée verticalement dans les airs à partir du sol avec une vitesse initiale de 100 m/s. L'altitude de la fusée peut être modélisée comme une fonction du temps par la quadratique $h(t) = 100t - 4{,}9t^2$ m, où t est mesuré en secondes depuis le décollage.

(a) Selon ce modèle, combien de temps doit-on attendre après son décollage pour que la fusée atteigne 250 m en altitude lors de sa montée ?

(b) Quel est la durée du vol ?

(c) Combien de temps doit-on attendre après son décollage pour que la fusée se mette à redescendre ?

(d) Quelle altitude maximale atteint-elle lors de son vol ?

Solution :

(a) En résolvant l'équation $h(t) = 250$ pour t, on trouve deux valeurs : $t \approx 2{,}9$ s ou $t \approx 17{,}5$ s. Puisqu'il s'agit du temps lors de la montée, on doit attendre environ 2,9 s.

(b) Puisque la fusée part du sol et retourne au sol, on doit résoudre l'équation $h(t) = 0$ pour t. On trouve $t = 0$ (au décollage) et $t \approx 20{,}4$ s (à l'atterrissage). La durée du vol est donc environ 20,4 s.

(c) La fusée redescendra dès qu'elle aura atteint son altitude maximale. On cherche donc le sommet de la parabole.

$$h(t) = 100t - 4{,}9t^2 \approx 510{,}2 - 4{,}9(t - 10{,}2)^2$$

La fusée se met donc à descendre environ 10,2 secondes après son décollage.

(d) Puisque

$$h(t) = 100t - 4{,}9t^2 \approx 510{,}2 - 4{,}9(t - 10{,}2)^2,$$

l'altitude maximale sera environ 510,2 m.

$h(t):=100\cdot t-4.9\cdot t^2$	*Terminé*
$\text{solve}(h(t)=250,t)$	$t=2.91691$ or $t=17.4913$
$\text{solve}(h(t)=0,t)$	$t=0.$ or $t=20.4082$
$\text{completeSquare}(h(t),t)$	$510.204-4.9\cdot(t-10.2041)^2$
$\dfrac{20.408163265306}{2}$	10.2041
$h(10.204081632653)$	510.204

On aurait pu aussi trouver l'abscisse du sommet (temps avant la descente) en utilisant le fait qu'il sera à égale distance des zéros $x \approx (20{,}4 - 0)/2 = 10{,}2$. Pour retrouver l'altitude, il suffit d'évaluer la fonction $h(10{,}2) \approx 510{,}2$ m.

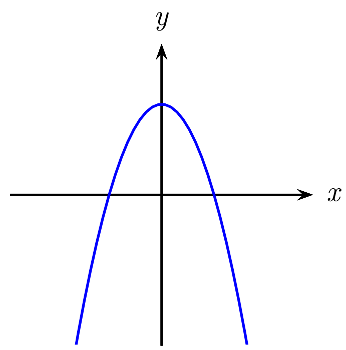
En général, lorsqu'on écrit la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous la forme canonique on trouve que les coordonnées du sommet sont $(h; k) = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$. En effet,

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left[x^2 + \tfrac{b}{a}x\right] + c && \text{on met en évidence } a \\
&= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2}\right] + c && \text{on complète le carré} \\
&= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - a\tfrac{b^2}{4a^2} + c && \text{on distribue } a \\
&= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c && \text{on simplifie}
\end{aligned}$$

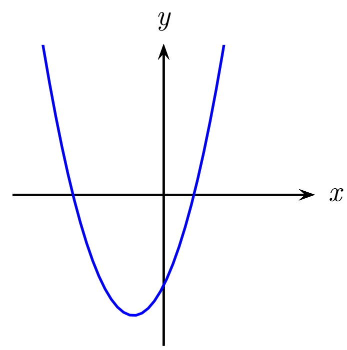
Il est surtout intéressant, ici, de constater que l'abscisse du sommet est $h = -\frac{b}{2a}$ et on pourra toujours trouver l'ordonnée du sommet en évaluant la fonction : $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Exemple 6.10

Les graphiques suivants représentent des fonctions quadratiques $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dans chacun des cas, déterminez à l'aide du graphique, si a, b et c sont positifs, négatifs ou nuls.



(a)



(b)

Solution :

(a) $a < 0$, car la parabole est ouverte vers le bas.
$b = 0$, car l'abscisse du sommet $-\frac{b}{2a} = 0 \Longleftrightarrow b = 0$.
$c > 0$, car l'ordonnée à l'origine est $c = f(0) > 0$.

(b) $a > 0$, car la parabole est ouverte vers le haut.
$b > 0$, car l'abscisse du sommet est négative $-\frac{b}{2a} < 0$ et, puisque $a > 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$ seulement si $b > 0$.
$c < 0$, car l'ordonnée à l'origine est $c = f(0) < 0$.

Il y a plusieurs façons de trouver la règle de correspondance d'une fonction quadratique. On utilisera la forme (développée, factorisée ou canonique) qui reflète le mieux l'information dont on dispose.

Exemple 6.11

Donnez la forme développée de la fonction quadratique dont le graphe est une parabole de sommet $(3; -2)$ qui passe par le point $(-1; 6)$.

Solution :

Puisqu'on connaît le sommet de la parabole, on utilise la forme canonique de la fonction quadratique pour en trouver l'équation.

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2$$

On utilise les coordonnées du point $(-1; 6)$ pour déterminez la valeur inconnue a.

$$f(-1) = 6 = a(-1-3)^2 - 2 \Longleftrightarrow 6 = 16a - 2 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

La fonction quadratique est donc

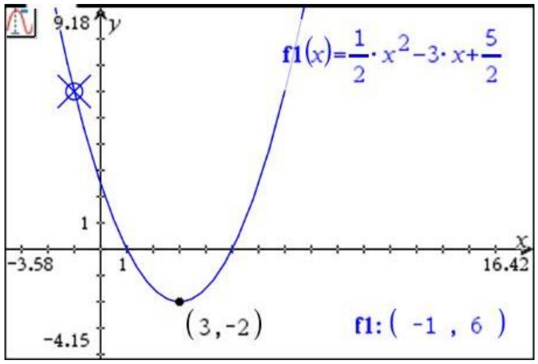
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2.$$

Puisqu'on en demande sa forme développée, on développe.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

La règle de correspondance sous forme développée est donc $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.

Validation. On fait tracer le graphe de la fonction quadratique sous sa forme développée et on s'assure qu'il reflète bien les caractéristiques énoncées.



Exemple 6.12

Déterminez la règle de correspondance de la fonction quadratique représentée par une parabole dont l'ordonnée à l'origine est -2 et dont le zéro est $x = 5$.

Solution :

Puisqu'on sait que la fonction n'a qu'un seul zéro (dans l'énoncé, on dit « le » zéro), on utilise sa forme factorisée (dans ce cas, il s'agit aussi de sa forme canonique)

$$f(x) = a(x-5)^2$$

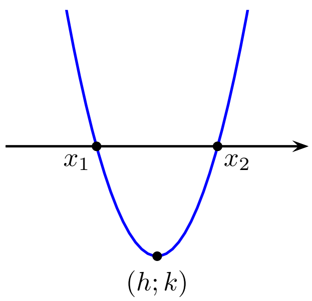
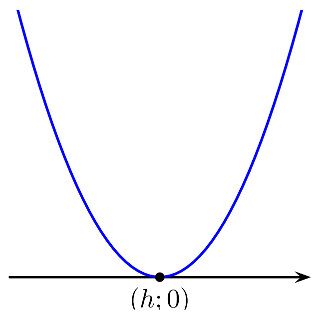
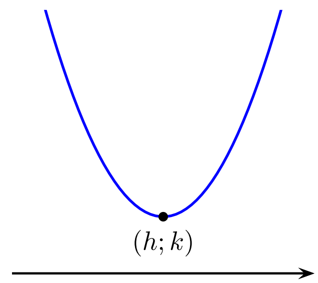
pour en trouver l'équation. L'information au sujet de l'ordonnée à l'origine, $f(0) = -2$, permet de trouver la valeur inconnue a.

$$f(0) = -2 = a(x-5)^2\Big|_{x=0} \iff -2 = 25a \iff a = -\frac{2}{25}$$

La règle de correspondance est donc $f(x) = -\frac{2}{25}(x-5)^2$.

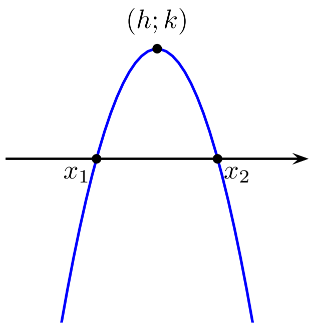
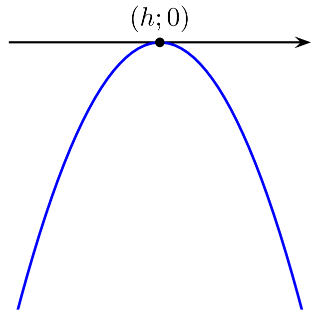
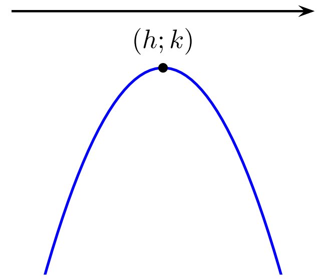
Validation. Faites-la.

TABLEAU 6.3 – Résumé des caractéristiques de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a > 0$

<table>
<tr><th>$b^2 - 4ac > 0$</th><th>$b^2 - 4ac = 0$</th><th>$b^2 - 4ac < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\text{Im}(f) = [k;\infty[$</td><td>$\text{Im}(f) = [0;\infty[$</td><td>$\text{Im}(f) = [k;\infty[$</td></tr>
<tr><td colspan="3">sommet : $(h;k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">axe de symétrie : $x = h$</td></tr>
<tr><td>zéros :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$</td><td>zéro : $x = -\frac{b}{2a} = h$</td><td>aucun zéro</td></tr>
<tr><td colspan="3">ordonnée à l'origine : c</td></tr>
<tr><td>négative sur $]x_1;x_2[$
positive sur $]-\infty;x_1[\cup]x_2;\infty[$</td><td>jamais négative
positive sur $\mathbb{R}\setminus\{h\}$</td><td>jamais négative
positive sur $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">décroissante sur $]-\infty;h]$
croissante sur $[h;\infty[$</td></tr>
<tr><td colspan="3">min absolu (et relatif) : k
atteint en $x = h$</td></tr>
<tr><td colspan="3">aucun max</td></tr>
</table>

Dans ce tableau, la croissance (croissante et décroissante) et les signes (négative et positive) sont utilisés au sens strict.

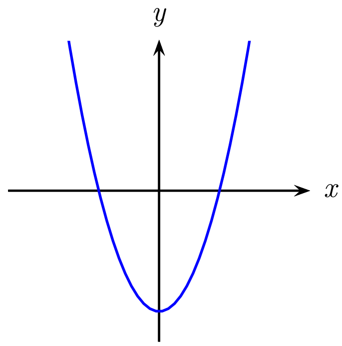
Tableau 6.4 – Résumé des caractéristiques de la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a < 0$

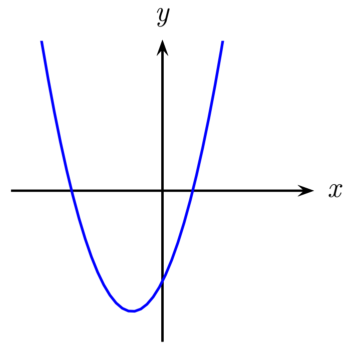
<table>
<tr><th>$b^2 - 4ac > 0$</th><th>$b^2 - 4ac = 0$</th><th>$b^2 - 4ac < 0$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Im}(f) =]-\infty; k]$</td><td>$\mathrm{Im}(f) =]-\infty; 0]$</td><td>$\mathrm{Im}(f) =]-\infty; k]$</td></tr>
<tr><td colspan="3">sommet : $(h;k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">axe de symétrie : $x = h$</td></tr>
<tr><td>zéros :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$</td><td>zéro : $x = -\frac{b}{2a} = h$</td><td>aucun zéro</td></tr>
<tr><td colspan="3">ordonnée à l'origine : c</td></tr>
<tr><td>négative sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; \infty[$
positive sur $]x_1; x_2[$</td><td>négative sur $\mathbb{R} \setminus \{h\}$
jamais positive</td><td>négative sur $\mathbb{R}$
jamais positive</td></tr>
<tr><td colspan="3">décroissante sur $[h; \infty[$
croissante sur $]-\infty; h]$</td></tr>
<tr><td colspan="3">max absolu (et relatif) : k
atteint en $x = h$</td></tr>
<tr><td colspan="3">aucun min</td></tr>
</table>

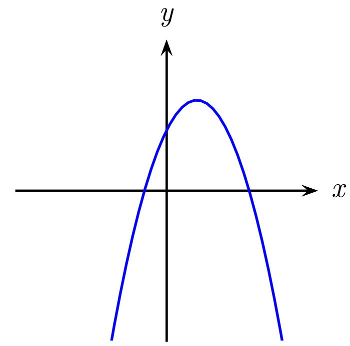
Dans ce tableau, la croissance (croissante et décroissante) et les signes (négative et positive) sont utilisés au sens strict.

Exercices

6.7 Les graphiques suivants représentent des fonctions quadratiques $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dans chacun de ces cas, déterminez à l'aide de ces graphiques, si a, b et c sont positifs, négatifs ou nuls.

(a)


(b)


(c)


6.8 Déterminez les coordonnées du sommet de chacune des paraboles définies par les fonctions quadratiques suivantes.

(a) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$
(b) $f(x) = (x-2)^2 - 12$
(c) $f(x) = 2(x+3)^2 + 5$
(d) $f(x) = 24 - 5(x+3)^2$
(e) $f(x) = x^2 + 4x + 5$
(f) $f(x) = 6 - 2x^2 - 12x$

6.9 Utilisez le sommet et les zéros de la fonction quadratique pour tracer son graphe. Donnez son axe de symétrie et son ordonnée à l'origine.

(a) $f(x) = (x-1)^2 - 4$
(b) $f(x) = (x-3)^2 + 1$
(c) $f(x) = 3(x+2)^2 - 12$
(d) $f(x) = (x+2)^2$
(e) $f(x) = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
(f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
(g) $f(x) = 6 - 2x^2 - 12x$
(h) $f(x) = 6 - 4x + x^2$

6.10 Pour chacune des fonctions quadratiques suivantes, tracez à la main la parabole correspondante et donnez ses caractéristiques (domaine, image, ordonnée à l'origine, zéros, les valeurs de x pour lesquelles la fonction est strictement positive, celles pour lesquelles elle est strictement négative, les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction, les valeurs pour lesquelles la fonction est constante ainsi que ses extremums absolus).

(a) $f(x) = x^2$
(b) $f(x) = 4 - (x-3)^2$
(c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6.11 Sans en tracer le graphe, déterminez si la fonction quadratique possède une valeur minimale ou maximale. Trouvez ensuite cette valeur extrême.

(a) $f(x) = 3x^2 - 12x - 1$
(b) $f(x) = 3 - 2x^2 - 12x$
(c) $f(x) = x^2 - x$

6.12 Madame Farmer doit construire un enclos rectangulaire qui longe au moins le côté complet de sa grange de 40 m de largeur.

(a) Quelles sont les dimensions de l'enclos d'aire maximale que madame Farmer peut espérer construire si elle possède 200 m linéaires de clôture ?
(b) Quelles sont les dimensions de l'enclos d'aire maximale que madame Farmer peut espérer construire si elle ne possède que 100 m linéaires de clôture ?

6.13 Déterminez la règle de correspondance de la fonction quadratique représentée par une parabole qui passe par le point $(2; 5)$ et dont le sommet est $(1; 3)$.

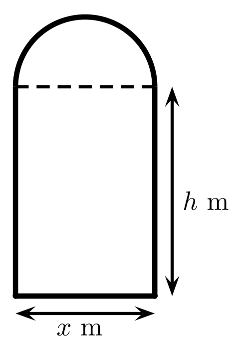
6.14 Déterminez la règle de correspondance de la fonction quadratique représentée par une parabole dont l'ordonnée à l'origine est -2 et qui passe par les points $(-2; -2)$ et $(1; 7)$.

6.15 Dans la partie sans calculatrice d'un test en MAT145, Julien doit calculer l'aire de la région bornée entre les courbes $y = 2x - 9$ et $y = -2x^2 + 4x + 3$ à l'aide d'une intégrale. Il trouve 68 unités de surface et se demande si sa réponse est plausible. L'est-elle ?

Aide : Tracez la parabole et la droite dans un même plan et utilisez le sommet de la parabole et les points d'intersection des deux courbes pour approximer l'aire de la région par une forme géométrique dont la surface est facile à calculer.

6.16 Une fenêtre est formée d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle, telle qu'illustrée à la figure ci-dessous. Si le périmètre de la fenêtre est 12 m, déterminez les dimensions x et h qui maximiseront son aire.

Utilisez votre calculatrice pour compléter le carré afin de trouver le sommet. Vérifiez votre réponse finale à l'aide du graphe de la fonction à maximiser.



6.3 Les fonctions polynomiales

Définition 6.3 Une **fonction polynomiale** de degré n est une fonction de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

où a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1 et a_0 sont des nombres réels, $a_n \neq 0$, et $n \in \mathbb{N}$. Le terme de plus haut degré, a_nx^n, est appelé le **terme dominant**.

On connaît déjà plusieurs fonctions polynomiales.

— Les fonctions constantes $f(x) = a$ où $a \neq 0$ sont des fonctions polynomiales de degré 0.

— Les fonctions linéaires $f(x) = ax + b$ où $a \neq 0$ sont des fonctions polynomiales de degré 1.

— Les fonctions quadratiques $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ sont des fonctions polynomiales de degré 2.

Dans cette section, on abordera plus particulièrement les fonctions polynomiales de degré supérieur ou égal à 3.

Exemple 6.13

Identifiez parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynomiales. Lorsqu'une fonction est polynomiale, donnez son degré et son domaine.

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ (b) $g(y) = \frac{3y+2y^4-4}{2}$ (c) $h(x) = \frac{\sqrt{2}\,x^5+1}{x}$

Solution :

(a) $f(x)$ est une fonction polynomiale de degré 3 où $n = 3$, $a_3 = 2$, $a_2 = -3$, $a_1 = 1$ et $a_0 = 5$. Son domaine est $\mathbb{R}$, car il n'y a pas de possibilité de division par zéro, ni de racine paire de nombre négatif.

(b) Puisque

$$g(y) = \frac{3y + 2y^4 - 4}{2} = \frac{3}{2}y + y^4 - 2 = y^4 + \frac{3}{2}y - 2,$$

$g(y)$ est une fonction polynomiale (en y) de degré 4. Dans ce cas, $n = 4$, $a_4 = 1$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = \frac{3}{2}$ et $a_0 = -2$. Son domaine est $\mathbb{R}$.

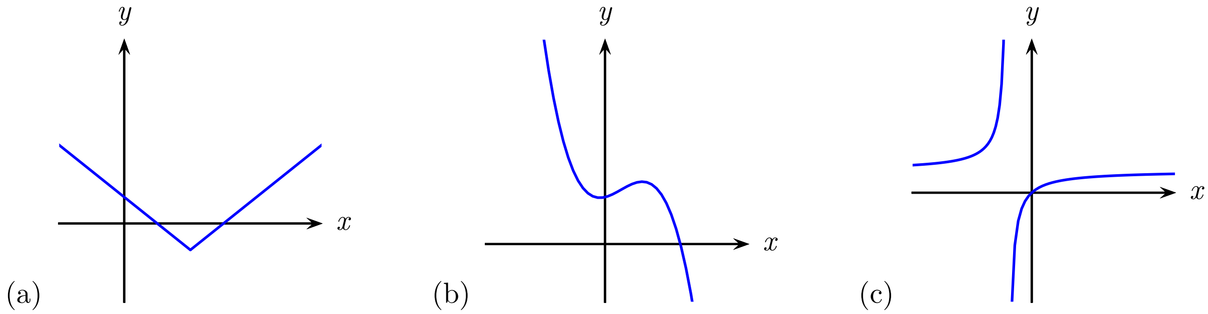
(c) $h(x)$ n'est pas une fonction polynomiale, car l'exposant du facteur x^{-1} est un entier négatif, $-1 \notin \mathbb{N}$.

$$h(x) = \frac{\sqrt{2}\,x^5 + 1}{x} = (\sqrt{2}\,x^5 + 1) \cdot \frac{1}{x} = (\sqrt{2}\,x^5 + 1) \cdot x^{-1}.$$

La courbe associée à une fonction polynomiale a deux caractéristiques importantes. Elle est **lisse** (elle n'a aucun point anguleux) et elle est **continue** (elle peut être tracée à la main sans lever son crayon).

Exemple 6.14

Identifiez parmi les courbes suivantes, lesquelles ne pourraient pas représenter une fonction polynomiale.



Solution :

Ni (a), ni (c) ne peuvent être polynomiales, car en (a), la courbe n'est pas lisse (il y a un point anguleux) et en (c), la courbe n'est pas continue.

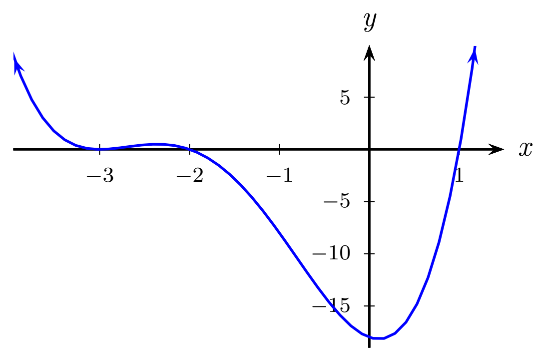
Seulement le graphique (b) pourrait être celui d'une fonction polynomiale. La courbe semble lisse et continue.

Comme x peu croître ou décroître sans fin, la courbe représentant une fonction polynomiale va éventuellement monter ou descendre sans fin. Par exemple, la fonction

$$f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$$

croit sans borne lorsque x croit sans borne ou lorsqu'il décroit sans borne.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	18 252	-10	4 312
100	107 129 682	-100	93 130 282
1 000	1 007 012 996 982	$-1\,000$	993 013 002 982
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	∞	$-\infty$	∞



Pour décrire ce comportement, on utilise la notation suivante.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{se lit « lorsque } x \text{ tend vers l'infini, } f(x) \text{ tend vers l'infini »}$$

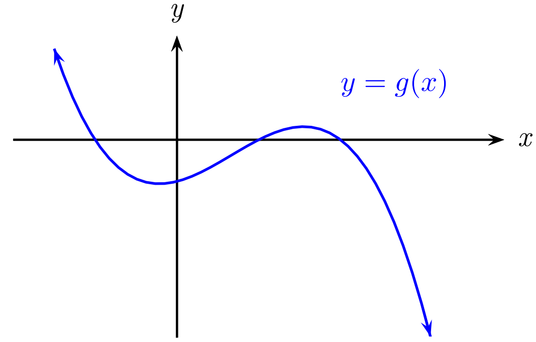
et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{se lit « lorsque } x \text{ tend vers moins l'infini, } f(x) \text{ tend vers l'infini »}$$

Exemple 6.15

Complétez les affirmations suivantes à l'aide des informations données ci-dessous.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	14	-10	25
100	140	-100	250
1 000	1 400	-1000	2 500
10 000	14 000	$-10\,000$	25 000
100 000	140 000	$-100\,000$	250 000



(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \boxed{}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \boxed{}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{}$

Solution :

(a) La suite de valeurs de la fonction 14, 140, 1 400, 14 000, 140 000, ... semble grossir sans borne lorsque x grandit sans borne. On peut alors conjecturer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) La suite 25, 250, 2 500, 25 000, 250 000, ... semble grossir sans borne lorsque x décroît sans borne. On peut donc penser que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

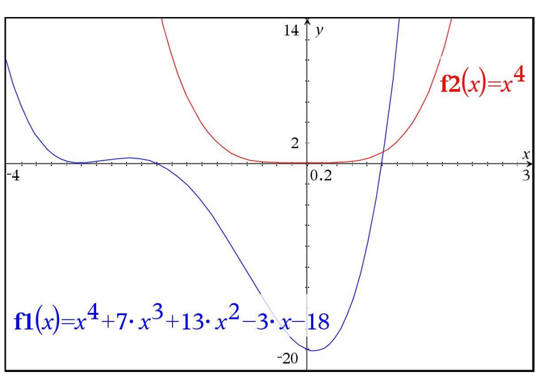
(c) La courbe représentant la fonction $g(x)$ décroît sans borne lorsque x croît sans borne, ainsi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$.

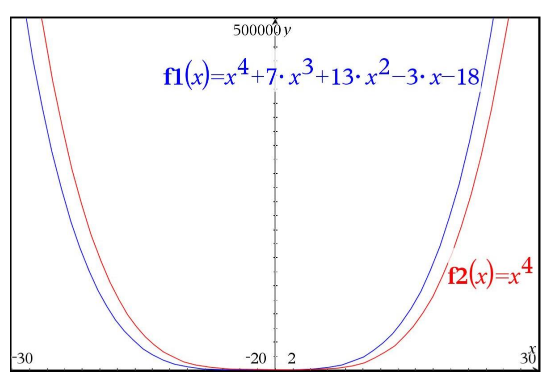
(d) Lorsque x décroît sans borne, $g(x)$ croît sans borne, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$.

En examinant chacun des termes de la fonction $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$ on constate que le terme dominant est celui qui prend le plus d'importance lorsque x est très grand ou très petit.

x	x^4	$7x^3$	$13x^2$	$-3x$	-18
1000	1 000 000 000 000	7 000 000 000	13 000 000	$-3\,000$	-18
-1000	1 000 000 000 000	$-7\,000\,000\,000$	13 000 000	3 000	-18

Si on superpose le graphe de $y = f(x)$ et celui de $y = x^4$, on constate que ces courbes sont très différentes.





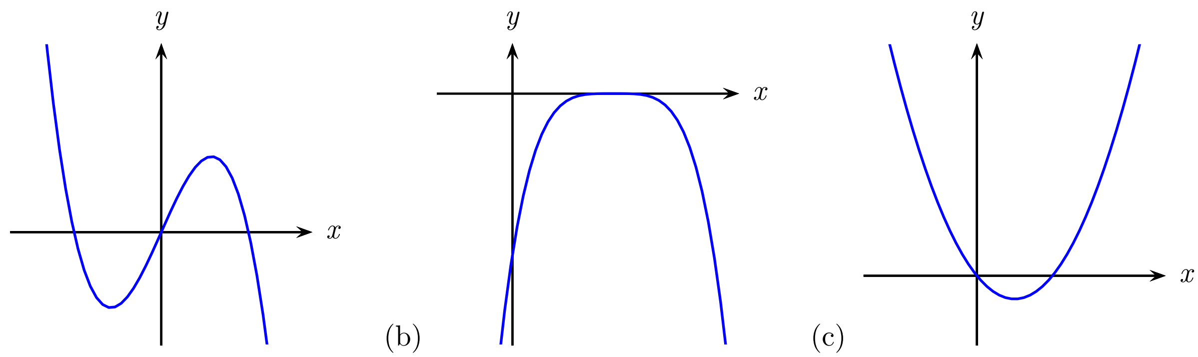
On peut constater, à l'aide d'un zoom arrière, qu'elles ont néanmoins le même comportement asymptotique, c'est-à-dire qu'elles ont le même comportement lorsque x tend vers ∞ ou $-\infty$. Un résumé des limites (à l'infini et à moins l'infini) d'une fonction polynomiale est présenté au tableau 6.5, à la page 64.

Ainsi, lorsqu'on tentera de s'imaginer la courbe représentant une fonction polynomiale, on pourra examiner son terme dominant pour savoir comment elle se comporte lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini.

Exemple 6.16

Associez les fonctions polynomiales f, g et h aux graphiques (a), (b) et (c) en examinant leur comportement asymptotique.

$$f(x) = x^2 - 2x \quad g(x) = -(3x-2)^4 \quad h(x) = 3x - x^3$$



(a) (b) (c)

Solution :

Il est impossible que $f(x)$ ait (a) ou (b) comme graphique, car son terme dominant est x^2 et $\infty^2 = \infty$ et $(-\infty)^2 = \infty$. Le graphique de f est donc (c).

Puisque $g(x) = -(3x-2)^4$, son terme dominant est $-81x^4$. Puisque $-81(\infty)^4 = -\infty$ et $-81(-\infty)^4 = -\infty$, son graphique est (b).

Le graphique de $h(x)$ est donc, par élimination, (a). En effet, son terme dominant est $-x^3$ et $-(\infty)^3 = -\infty$ tandis que $-(-\infty)^3 = \infty$, ce qui est cohérent avec le graphique en (a).

Exemple 6.17

Déterminez la règle de correspondance de la fonction polynomiale de degré 4 dont la courbe correspondante passe par le point $(1;12)$ et dont les zéros sont -1, -2, 0 et 2.

Solution :

Puisque ses zéros sont -1, -2, 0 et 2, la fonction cherchée sera de la forme

$$f(x) = a(x+1)(x+2)(x-0)(x-2) = ax(x+1)(x+2)(x-2).$$

On détermine la valeur a en remplaçant les coordonnées du point $(1;12)$ dans la fonction

$$f(1) = a \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1-2) = -6a$$

et en la résolvant pour a,

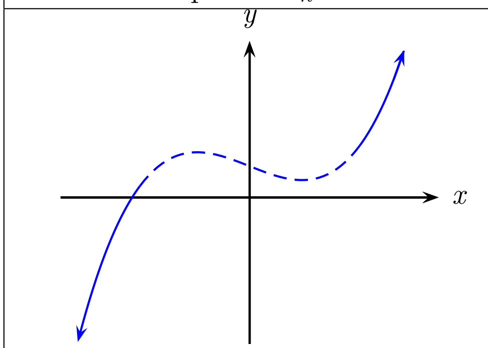
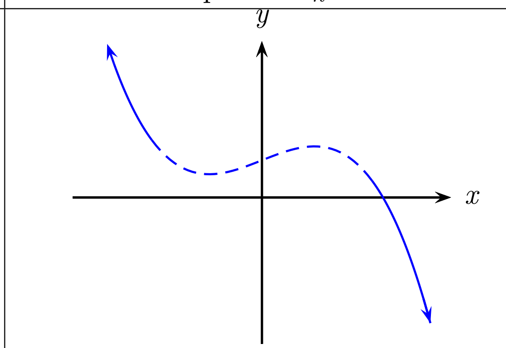
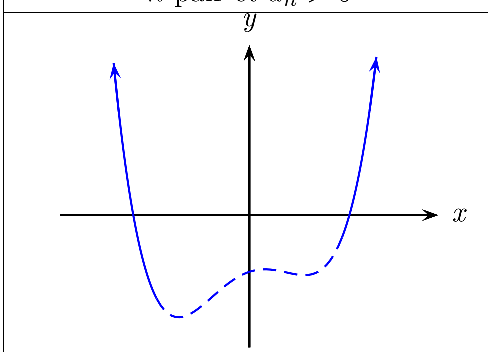
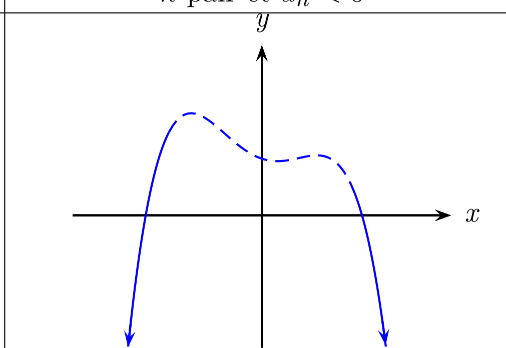
$$f(1) = 12 = -6a \Longleftrightarrow a = -2.$$

La règle de correspondance cherchée est donc

$$f(x) = -2x(x+1)(x+2)(x-2).$$

Validation. Faites-la.

Tableau 6.5 – Les limites à l'infini d'une fonction polynomiale $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

n impair et $a_n > 0$	n impair et $a_n < 0$
	
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
n pair et $a_n > 0$	n pair et $a_n < 0$
	
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Exercices

6.17 Identifiez, parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynomiales. Lorsqu'une fonction est polynomiale, donnez son degré et son domaine.

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x$

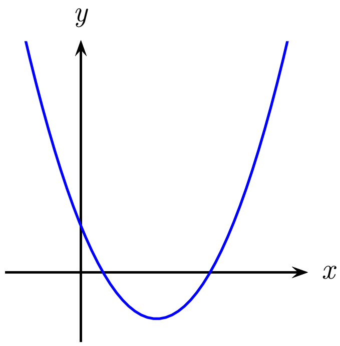
(b) $g(x) = 2x^3 - \sqrt{2}\,x + 1$

(c) $h(y) = \dfrac{1 + y^2}{2}$

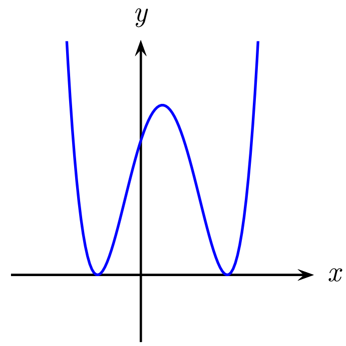
(d) $f(t) = t^{1/2} + 2t - 1$

(e) $g(r) = 2\pi r^2 - \dfrac{1}{2} r$

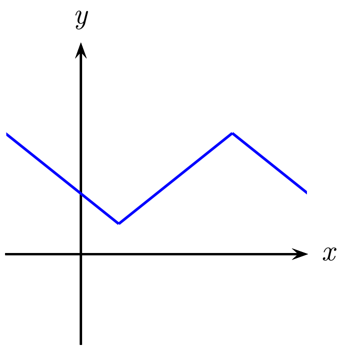
6.18 Identifiez, parmi les graphiques suivants, lesquels ne pourraient pas être des graphiques de fonctions polynomiales.



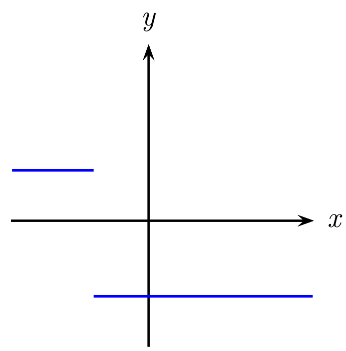
(a)



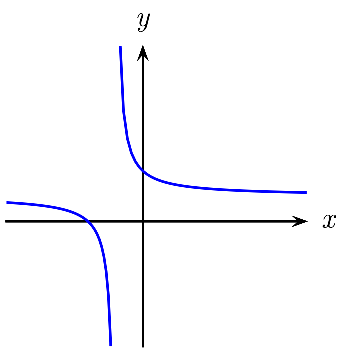
(d)



(b)



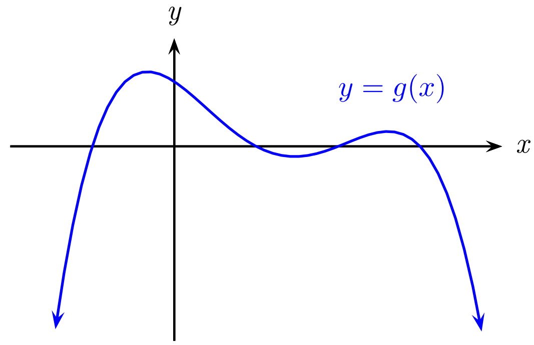
(e)



(c)

6.19 Complétez les affirmations suivantes à l'aide des informations données ci-dessous.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	-5	-10	15
100	-50	-100	150
1 000	-500	-1000	1 500
10 000	$-5\,000$	$-10\,000$	15 000
100 000	$-50\,000$	$-100\,000$	150 000



(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \boxed{}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{}$

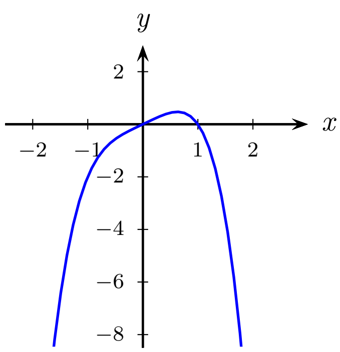
(c) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \boxed{}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{}$

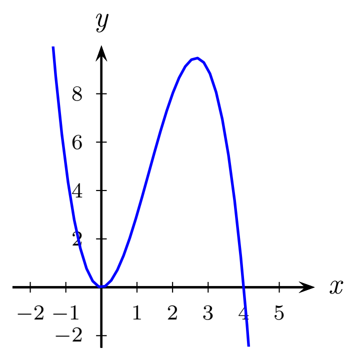
6.20 Associez les fonctions polynomiales f, g, h, j et k à leur graphiques (a), (b), (c), (d) et (e) en examinant leur comportement asymptotique et leurs zéros.

$$f(x) = (x-3)^2 \quad g(x) = x^3 - 4x^2 \quad h(x) = x - x^4 \quad j(x) = x - x^3 \quad k(x) = 4x^2 - x^3$$

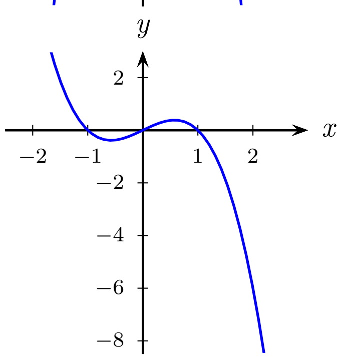
(a)



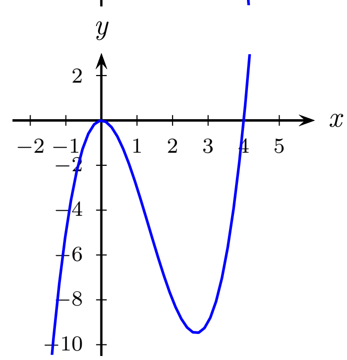
(d)



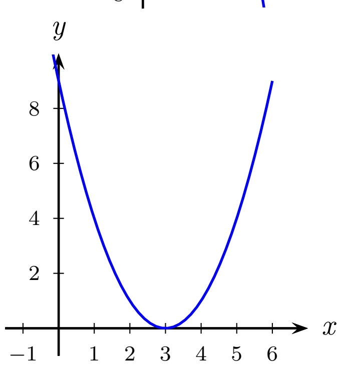
(b)



(e)



(c)

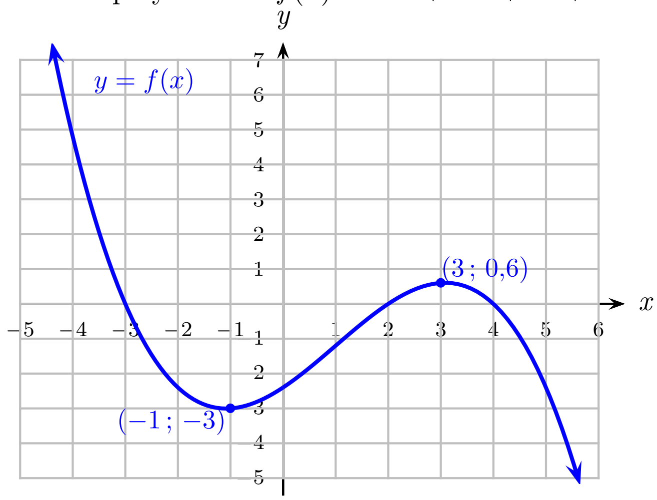


6.21 Le graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{x^4 - 17x^3 + 30x^2}{10},$$

tel qu'il est illustré dans la fenêtre standard de la calculatrice, nous informe-t-il correctement sur le comportement asymptotique de la fonction ?

6.22 On considère la fonction polynomiale $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ illustrée ci-dessous.



(a) Selon le graphe de $f(x)$, le terme constant du polynôme est-il positif, négatif ou nul ? Pourquoi ?

(b) Selon le graphe de $f(x)$, le coefficient du terme dominant du polynôme est-il positif, négatif ou nul ? Pourquoi ?

(c) Pour quelles valeurs de x, la fonction est-elle strictement décroissante ? Donnez votre réponse sous forme d'intervalle(s). Utilisez une notation mathématique appropriée.

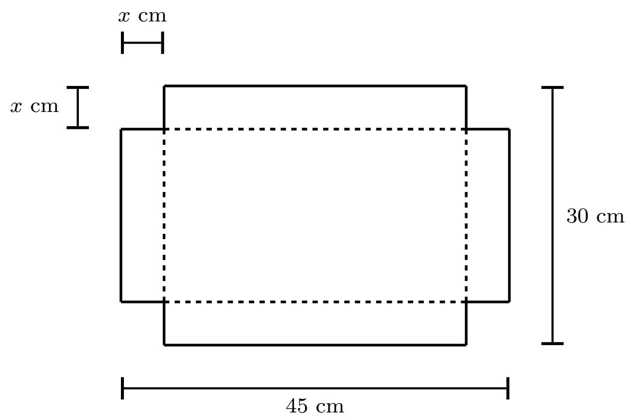
(d) Donnez les valeurs extrêmes de la fonction (locales et absolues) sur $\mathbb{R}$ et qualifiez la nature des valeurs extrêmes (min local, max local, min absolu, max absolu) ou dites s'il n'y en a pas.

(e) Si les zéros de la fonction sont bien -3, 2 et 4, quelle est la règle de correspondance de la fonction $f(x)$?

6.23 Déterminez la règle de correspondance de la fonction polynomiale de degré 3 dont le graphe est d'ordonnée à l'origine 20 et dont les zéros sont 2, 5 et -1.

6.24 Déterminez la règle de correspondance de la fonction polynomiale de degré 4 dont le graphe passe par $(3; -2)$ et dont les zéros sont -6, -3, 0, et 1.

6.25 Vous disposez d'un carton de 45 cm par 30 cm et vous voulez construire une boîte sans couvercle selon le plan suivant.



Vous découpez quatre petits carrés de même dimension et vous pliez selon les pointillés.

(a) Si la hauteur de la boîte est $x = 3$ cm, quel est son volume ? Si $x = 5$ cm ? Si $x = 10$ cm ?

(b) Déterminez une expression pour le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de sa hauteur x.

(c) Tracez le graphique de la fonction $V(x)$ à l'aide de votre calculatrice dans une fenêtre $[-5; 25] \times [-1500; 4000]$. En examinant ce graphique, interprétez comment le volume évolue lorsque x augmente à partir de 0. À l'aide de cette interprétation, déterminez le domaine contextuel de la fonction.

(d) On peut déterminer le domaine contextuel de la fonction algébriquement, sans avoir recours au graphique, en examinant les contraintes du problème. En utilisant le fait que le carton mesure 45 cm par 30 cm, déterminez algébriquement le domaine de la fonction.

(e) Tracez à nouveau le graphique de la fonction à l'aide de votre calculatrice dans une fenêtre mieux adaptée au contexte que celle utilisée en (c). À l'aide des outils d'analyse graphique de votre calculatrice, déterminez le volume maximal que peut avoir une telle boîte. Quelles sont alors les dimensions de la boîte de volume maximal ?

6.4 Les fonctions rationnelles

Définition 6.4 Une **fonction rationnelle** est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Le **domaine** de la fonction est l'ensemble des nombres réels qui n'annulent pas le dénominateur, c'est-à-dire $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}$.

Exemple 6.18

Trouvez le domaine de chacune des fonctions rationnelles suivantes.

(a) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-25}$ (b) $g(x) = \dfrac{x^2-25}{x^2+5}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+x^2-2x}$

Solution :

Puisqu'une fonction rationnelle est formée d'une division et que la division par 0 n'est pas définie, on doit exclure toutes les valeurs x qui annuleraient le polynôme du dénominateur.

(a) On peut résoudre l'équation $x^2 - 25 = 0$ par factorisation, à l'aide de la règle du produit nul.

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5) = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = -5.$$

Le domaine est donc $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\} =]-\infty; -5[\cup]-5; 5[\cup]5; \infty[$.

(b) Puisque $x^2 + 5$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$, il ne s'annule jamais, quelle que soit la valeur x. Le domaine est donc $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

(c) On factorise le dénominateur par une mise en évidence et ensuite par inspection.

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2).$$

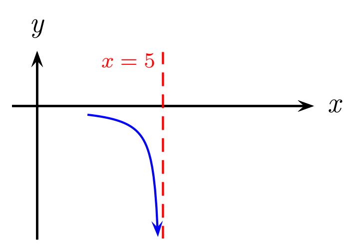
Par la règle du produit nul,

$$x(x-1)(x+2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

Le domaine est donc $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 1[\cup]1; \infty[$.

Puisque le dénominateur de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{x+5}{x^2-25}$ s'annule lorsque $x = 5$, 5 n'est pas dans le domaine de f, $5 \notin \text{Dom}(f)$, elle n'y est donc pas définie. On peut tout de même avoir une idée du comportement de la fonction $f(x)$ lorsque x est près de 5 en l'évaluant en des valeurs qui s'approchent de plus en plus de 5.

x	4,9	4,99	4,999	4,9999	$\to$	5
$f(x)$	-10	-100	$-1\,000$	$-10\,000$	$\to$	$-\infty$



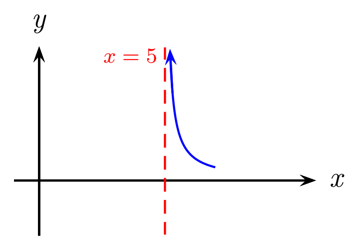
On constate que, lorsque les valeurs de x sont plus petites que 5 (à la gauche de 5), mais de plus en plus près de 5, la valeur de $f(x)$ décroît sans borne. On dit alors

« lorsque x tend vers 5 par la gauche, $f(x)$ tend vers moins l'infini » et on écrit

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$$

En contrepartie, lorsque les valeurs de x sont plus grandes que 5 (à la droite de 5) tout en étant de plus en plus près de 5, $f(x)$ croît sans borne.

x	5	$\leftarrow$	5,0001	5,001	5,01	5,1
$f(x)$	∞	$\leftarrow$	10 000	1 000	100	10



On dit alors

« lorsque x tend vers 5 par la droite, $f(x)$ tend vers l'infini »

et on écrit

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \infty$$

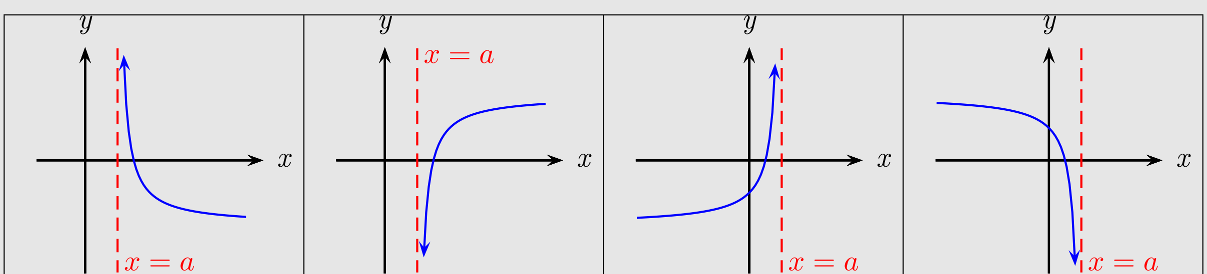
Le graphe de f ressemble à la droite verticale $x = 5$ lorsque x est près de 5. On dit alors qu'il possède une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

Tableau 6.6 – Résumé de la notation avec les flèches

notation	signification
$x \to a^+$	x tend vers a par la droite
$x \to a^-$	x tend vers a par la gauche
$x \to \infty$	x tend vers l'infini, il croît sans borne
$x \to -\infty$	x tend vers moins l'infini, il décroît sans borne

Définition 6.5 La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = f(x)$ si $f(x)$ croît ou décroît sans borne lorsque x tend vers a.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

De façon informelle, la courbe $y = f(x)$ a une asymptote verticale $x = a$ lorsqu'elle ressemble à la droite verticale $x = a$ quand x est à proximité de a. Ici, les asymptotes sont représentées par des lignes pointillées.

Exemple 6.19

Déterminez les équations de toutes les asymptotes verticales au graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}.$$

Solution :

On détermine d'abord le domaine de la fonction. Dans ce cas, le dénominateur x^2+4x+3 se factorise facilement par inspection $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ et, par la règle du produit nul,

$$(x + 1)(x + 3) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = -3$$

on trouve que le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1; -3\}$.

On examine ensuite la fonction à proximité des valeurs exclues du domaine. On étudie donc le comportement de la fonction près de $x = -3$ et $x = -1$.

À l'aide de la table de valeurs suivante, on peut conjecturer que $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$.

x	$f(x)$
$-2{,}9$	-49
$-2{,}99$	-499
$-2{,}999$	-4999
$-2{,}999$	-49999
$-2{,}9999$	-499999
$\downarrow$	$\downarrow$
-3^+	$-\infty$

La droite $x = -3$ serait donc une asymptote verticale au graphe de $f(x)$ puisque la fonction décroît sans borne lorsque x s'approche de -3 par la droite, c'est-à-dire par des valeurs plus grandes que -3.

On pourrait aussi construire une table de valeurs pour $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ (*faites-le*), conjecturer que $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$ et que $x = -3$ est bien une asymptote verticale.

L'une ou l'autre des limites (à gauche ou à droite) suffit pour conclure à l'asymptote verticale.

Lorsque x est à proximité de -1, la fonction ne croît, ni ne décroît, sans borne. Elle s'approche de plus en plus de $-1{,}5$. La droite $x = -1$ n'est donc pas une asymptote verticale au graphe de $f(x)$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$-1{,}1$	$-1{,}63158\ldots$	$-0{,}9$	$-1{,}38095\ldots$
$-1{,}01$	$-1{,}51256\ldots$	$-0{,}99$	$-1{,}48756\ldots$
$-1{,}001$	$-1{,}50125\ldots$	$-0{,}999$	$-1{,}49875\ldots$
$-1{,}0001$	$-1{,}500125\ldots$	$-0{,}9999$	$-1{,}49988\ldots$
$-1{,}00001$	$-1{,}50001\ldots$	$-0{,}99999$	$-1{,}49999\ldots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
-1^-	$-1{,}5$	-1^+	$-1{,}5$

On peut vérifier nos conjectures en calculant algébriquement les limites. Puisque

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\cancel{(x+1)}(x - 2)}{\cancel{(x+1)}(x + 3)} = \frac{x - 2}{x + 3} \quad \text{si } x \neq -1$$

on trouve

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x\to -3^+} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{-3^+ - 2}{-3^+ + 3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

tandis que

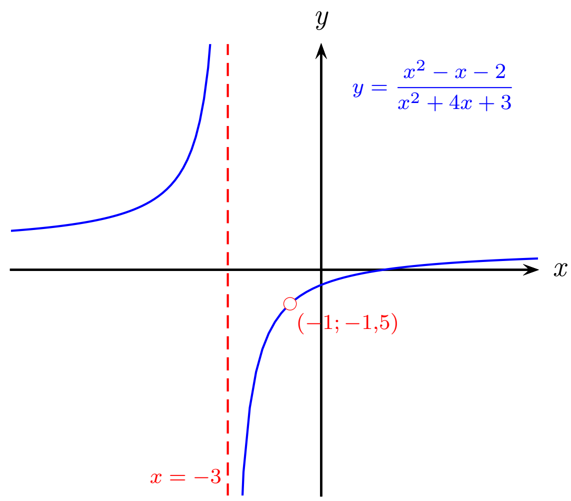
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{-1^- - 2}{-1^- + 3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

et

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{-1^+ - 2}{-1^+ + 3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$

Attention ! La notation $\frac{-5}{0^+}$ ne signifie pas que le nombre -5 est divisé par 0, ce qui n'a pas de sens dans les réels. Elle indique que, lorsque x s'approche de -3 par des valeurs supérieures à -3, $x^2 - x - 2$ s'approche de -5 et $x^2 + 4x + 3$ s'approche de 0 par des valeurs positives. Le quotient $\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}$ décroît donc sans borne.

Ainsi, le graphe de la fonction f possède une asymptote verticale $x = -3$ et, peu importe qu'on calcule la limite à gauche ou la limite à droite lorsque x tend vers -1, $f(x)$ tend vers $-1{,}5$. Il y a donc un trou en $x = -1$ et l'ordonnée de ce trou est $-1{,}5$.



Comme on l'a fait à la section précédente, on peut aussi examiner le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$$

lorsque x croît sans borne ou décroît sans borne. Le tableau suivant présente le résultat des évaluations de la fonction pour plusieurs valeurs de x.

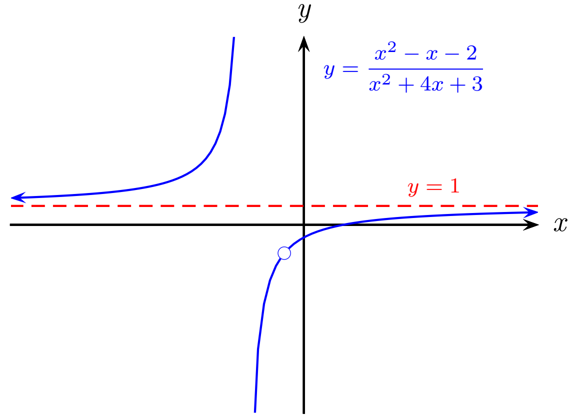
x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	0,615 ...	-10	1,714 ...
100	0,951 ...	-100	1,051 ...
1 000	0,995 ...	-1000	1,005 ...
10 000	0,9995 ...	$-10\,000$	1,0005 ...
100 000	0,99995 ...	$-100\,000$	1,00005 ...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	1	$-\infty$	1

Ces valeurs suggèrent que la courbe $y = f(x)$ ressemble de plus en plus à la droite horizontale $y = 1$ lorsque x croît ou décroît sans borne. On dit alors que « lorsque x tend vers ∞, $f(x)$ tend vers 1 » et on écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

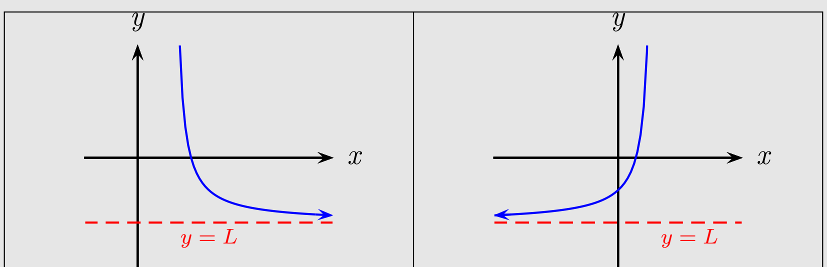
et « lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 1 » , on écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$



Définition 6.6 Une droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

De façon informelle, la courbe $y = f(x)$ a une asymptote horizontale $y = b$ lorsque celle-ci ressemble à la droite horizontale $y = b$ quand x croît (tend vers ∞) ou décroît (vers $-\infty$) sans borne.

Exemple 6.20

Déterminez l'équation de l'asymptote horizontale au graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 3x - 2}.$$

Solution :

À l'aide de la table de valeurs suivante,

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	0,532 . . .	-10	0,685 . . .
100	0,592 . . .	-100	0,607 . . .
1 000	0,5992 . . .	-1000	0,6007 . . .
10 000	59992 . . .	$-10\,000$	0,60007 . . .
100 000	0,599992 . . .	$-100\,000$	0,600007 . . .
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	0,6	$-\infty$	0,6

$f(x) := \dfrac{3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1}{5\cdot x^2 + 3\cdot x - 2}$	*Terminé*
$f(10.)$	0.532197
$f(100.)$	0.592489
$f(1000.)$	0.599241
$f(1000.)$	0.599241
$f(10000.)$	0.599924
$f(100000.)$	0.599992

on peut conjecturer que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0{,}6 = \frac{3}{5} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}6 = \frac{3}{5}.$$

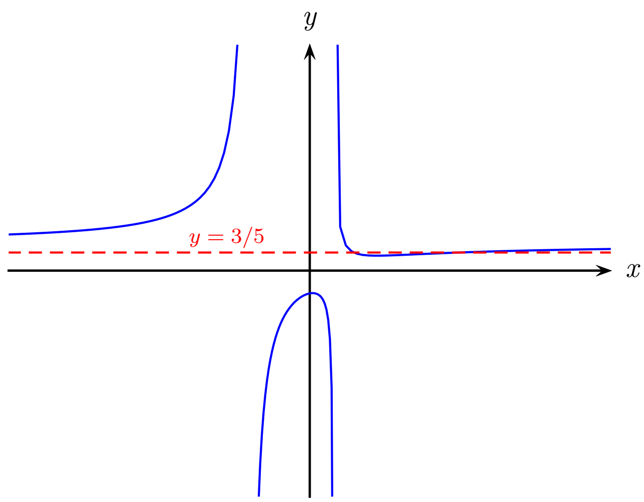
Il y aurait donc une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{3}{5}$.
On peut évaluer ces limites algébriquement en mettant la plus haute puissance de x en évidence au numérateur et au dénominateur, pour ensuite la simplifier.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 3x - 2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{3 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{5 + \frac{3}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}} \\
&= \frac{3-0+0}{5+0-0} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Ce calcul nous permet d'affirmer qu'il y a effectivement une asymptote horizontale $y = \frac{3}{5}$.

Attention ! La notation $\frac{2}{\infty}$ signifie qu'on cherche à calculer la limite du quotient de 2 par un nombre qui devient très grand. Lorsqu'on divise une constante par un nombre très grand, le quotient est proche de 0.

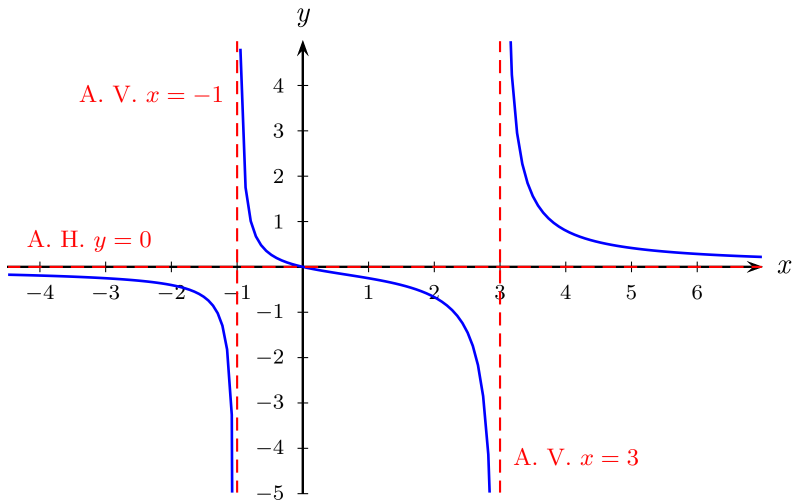
Validation. Le graphique semble corroborer la conclusion.



Attention ! Dans le graphique ci-dessus, on remarque que l'asymptote horizontale croise la courbe dans le premier quadrant. C'est effectivement possible, car une asymptote horizontale ne qualifie pas le comportement d'une courbe près de l'origine, mais bien son comportement lorsque x croît ou décroît sans borne.

Exercices

6.26 À l'aide du graphique, déterminez le domaine de la fonction et complétez les affirmations suivantes.



(a) lorsque $x \to 3^-$, $f(x) \to \boxed{}$

(b) lorsque $x \to 3^+$, $f(x) \to \boxed{}$

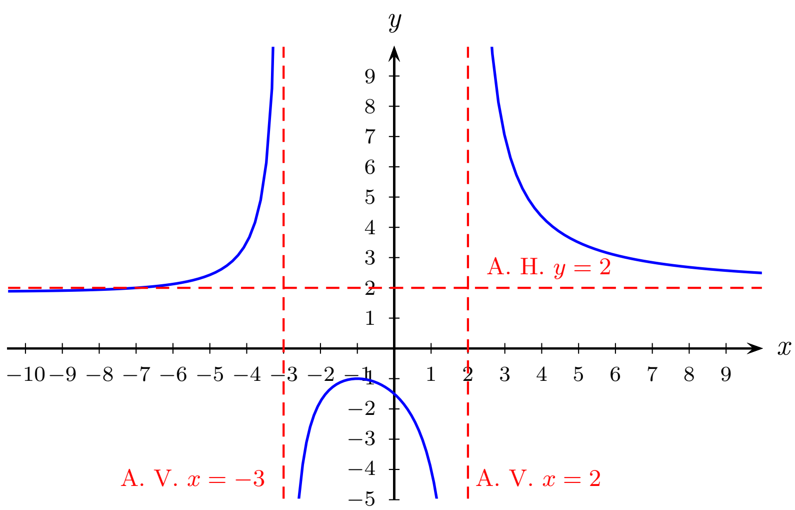
(c) lorsque $x \to -1^-$, $f(x) \to \boxed{}$

(d) lorsque $x \to -1^+$, $f(x) \to \boxed{}$

(e) lorsque $x \to \infty$, $f(x) \to \boxed{}$

(f) lorsque $x \to -\infty$, $f(x) \to \boxed{}$

6.27 À l'aide du graphique, déterminez le domaine de la fonction et complétez les affirmations suivantes.



(a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \boxed{}$

(b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \boxed{}$

(c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \boxed{}$

(d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \boxed{}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \boxed{}$

(f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{}$

6.28 Trouvez le domaine de chacune des fonctions rationnelles suivantes. Déterminez ensuite les équations de ses asymptotes verticales (s'il y en a).

Attention ! Vérifiez qu'il s'agit bien d'une asymptote verticale en examinant un tableau de valeurs approprié et ensuite, algébriquement, en calculant des limites.

(a) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x}$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$ (c) $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2+9}$

6.29 Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes, déterminez à l'aide d'un tableau de valeurs, l'équation de son asymptote horizontale (s'il y en a une).

Attention ! Vérifiez vos conclusions algébriquement, en calculant des limites.

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+9}$ (b) $g(x) = \dfrac{2x-1}{3x-5}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

6.30 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x+5}{1-2x}$.

(a) Déterminez algébriquement toutes les asymptotes au graphe de la fonction $f(x)$.
(b) Déterminez la réciproque de la fonction $f(x)$ et trouvez toutes ses asymptotes.
(c) Comment expliquez le lien qui existe entre les asymptotes au graphe de $f(x)$ et celles au graphe de $f^{-1}(x)$?

6.31 Quel type d'asymptote auraient les fonctions rationnelles $f(x)$ et $g(x)$, si on se fie aux tables de valeurs suivantes ? Quelles seraient les équations de ces asymptotes ?

(a)

x	$f(x)$
10	1,24
100	1,46
1000	1,49
10 000	1,499
100 000	1,4999
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	1,5

(b)

x	$g(x)$
2,1	10
2,01	90
2,001	810
2,0001	7 290
2,00001	65 610
$\downarrow$	$\downarrow$
2	∞

6.32 Le coût moyen de fabrication des pièces dont il est question à l'exercice 6.6 est donné par la fonction

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{20\,000 + 200x}{x}$$

(a) Calculez le coût moyen par pièce lorsque le nombre de pièces produites est 50, 250, 500 et 1000.
(b) Déterminez l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe représentant la fonction $\overline{C}(x)$. Que nous dit cette équation dans le contexte ?

6.33 Une drogue est injectée à des patients et sa concentration dans le sang est surveillée. Les données recueillies permettent d'établir un modèle approximatif de la relation entre le temps écoulé depuis une injection et la concentration de la drogue dans le sang d'un patient. On suppose que la fonction

$$C(t) = \frac{5t}{t^2+2}$$

décrit cette concentration de drogue (en mg/L) dans le sang du patient t heures suivant l'injection.

(a) Selon ce modèle, quelle sera la concentration de la drogue dans le sang une demi-heure suivant l'injection ?

(b) Selon ce modèle, quelle sera la concentration de la drogue dans le sang trois heures suivant l'injection ?

(c) Dans une fenêtre graphique, tracez le graphe de la fonction $C(t)$ pour illustrer comment la concentration de drogue dans le sang évolue pendant les douze heures suivant l'injection. À l'aide des outils d'analyse graphique, déterminez combien de temps il faudra pour que la concentration dans le sang soit maximale. Quelle est cette concentration maximale ?

(d) Déterminez l'équation de l'asymptote horizontale au graphique de $C(t)$. Donnez une interprétation contextuelle de cette équation.

Chapitre 7

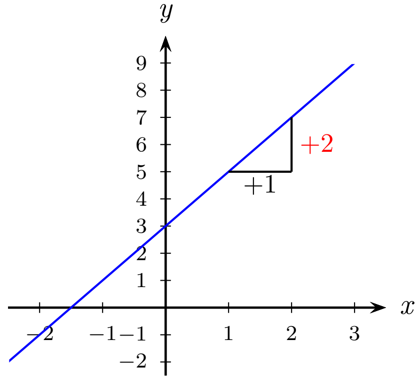
Les fonctions exponentielles et logarithmiques

7.1 Les fonctions exponentielles

En quoi se distinguent les fonctions exponentielles des fonctions linéaires vues au chapitre précédent ?

La pente de la fonction linéaire $f(x) = 2x+3$ est 2 et celle-ci signifie que pour chaque augmentation d'une unité en x, $y = f(x)$ **augmente** de deux unités.

x	y
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9



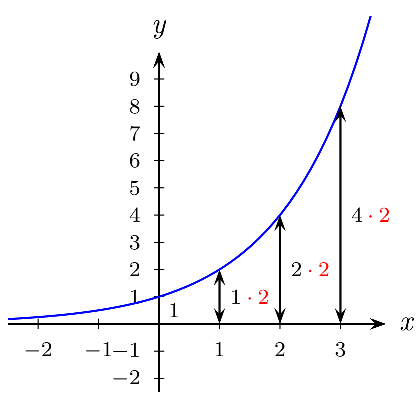
En général, si $y = ax + b$
lorsque x augmente d'une unité,

$$y = y_{\text{précédent}} + a$$

et la fonction est croissante lorsque $a > 0$.

Dans le cas de la fonction exponentielle $g(x) = 2^x$, pour chaque augmentation d'une unité en x, y est **multiplié** par deux.

x	y
-3	$1/8$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4
3	8



En général, si $y = b^x$
lorsque x augmente d'une unité,

$$y = y_{\text{précédent}} \cdot b$$

et la fonction est croissante lorsque $b > 1$.

La base b est le rapport entre deux valeurs consécutives (en y) du tableau.

Les fonctions exponentielles croissantes permettent de modéliser des phénomènes tels que la propagation de rumeurs et des infections, la progression d'un placement à intérêts composés, etc.

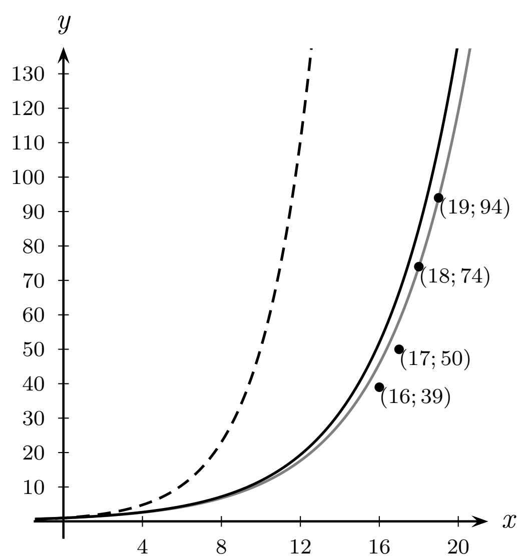
Exemple 7.1

Le directeur général de l'Organisation mondiale de la santé (OMS) annonçait en conférence de presse, le 11 mars 2020, que l'on faisait face à une pandémie de la COVID-19. L'OMS a alors demandé à tous les pays de prendre des « mesures urgentes et agressives » contre le virus.

Par curiosité, étudiant en MAT144, on examine le nombre de cas détectés de coronavirus entre le 16 et le 19 mars 2020. On désigne par x le nombre de jours depuis le 1$^{\text{er}}$ mars 2020 et y, le nombre de cas déclarés au Québec depuis le 1$^{\text{er}}$ mars. Pour avoir une idée de la progression du virus, on calcule les rapports (r) du nombre de cas connus une journée sur le nombre de cas connus la journée précédente.

x	y	r
16	39	
17	50	1,28
18	74	1,48
19	94	1,27

Les courbes $y = 1.28^x$ (en noir), $y = 1.48^x$ (en pointillé) et $y = 1.27^x$ (en gris) sont illustrées au graphique ci-dessous. On y a superposé les données recensées.



Parmi ces trois courbes, celle en gris ($y = 1{,}27^x$) semble le mieux représenter les données à ce moment. Elle prédit que le nombre de cas détectés est multiplié par $b = 1{,}27$ à tous les jours.

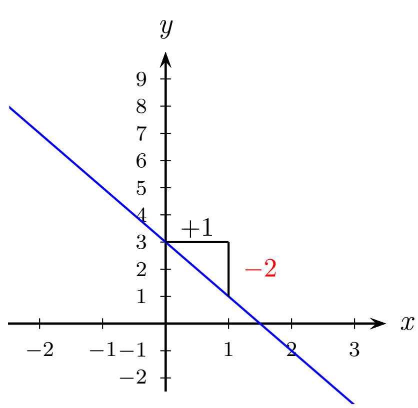
Si le virus continue à se propager de cette façon, après un mois, il y aurait plus de 1 600 personnes infectées. Après 2 mois, il y en aurait plus de 1,5 million.

x	y
31	1 651
45	46 899
60	1 691 310

Ce modèle, quoique très imparfait, nous invite tout de même à la prudence. Si rien n'est fait pour « aplatir la courbe » (réduire la propagation), les hôpitaux seront submergés.

De la même façon, lorsqu'une fonction linéaire est décroissante, la pente est négative. Par exemple, la pente de $f(x) = -2x + 3$ indique que pour chaque augmentation d'une unité en x, y diminue de deux unités.

x	y
-2	7
-1	5
0	3
1	1
2	-1
3	-3
4	-5



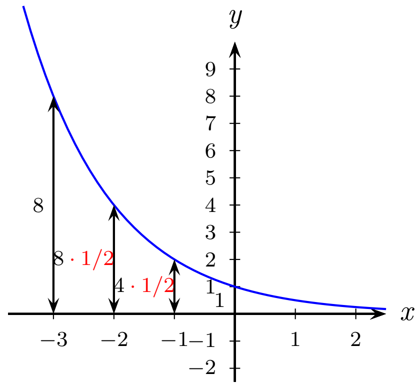
Encore une fois, si $y = ax + b$ lorsque x augmente d'une unité,

$$y = y_{\text{précédent}} + a$$

et la fonction est décroissante lorsque $a < 0$.

Dans le cas de la fonction exponentielle $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}5^x$, pour chaque augmentation d'une unité en x, y est multiplié par une demie.

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$



En général, si $y = b^x$ lorsque x augmente d'une unité,

$$y = y_{\text{précédent}} \cdot b$$

et la fonction est décroissante lorsque

$$0 < b < 1.$$

Les fonctions exponentielles décroissantes permettent de modéliser des phénomènes tels que la perte de chaleur, la désintégration radioactive, etc.

Définition 7.1 La **fonction exponentielle** est une fonction de la forme

$$f(x) = b^x$$

où b est un nombre réel positif, non nul et différent de 1 ($b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $b \neq 1$) et x est une variable réelle. On appelle b la **base** de la fonction exponentielle.

Exemple 7.2

Voici quelques exemples de fonctions exponentielles.

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 10^x \qquad h(x) = 5^{2x+1}$$

Chacune de ces fonctions a une base constante et un exposant variable. En contraste, les fonctions suivantes ne sont pas des fonctions exponentielles.

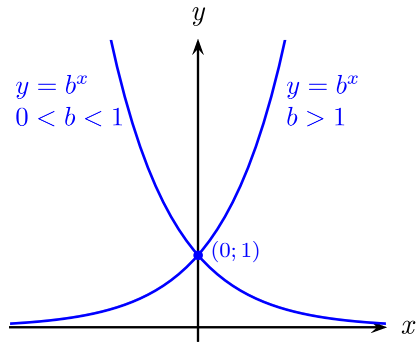
$$i(x) = x^2 \qquad j(x) = 1^x \qquad k(x) = x^{2x+1}$$

La fonction $i(x) = x^2$ n'est pas une fonction exponentielle, car l'exposant n'est pas variable. Il s'agit plutôt d'un monôme de degré 2.

La fonction $j(x) = 1^x$ n'est pas une fonction exponentielle puisque, quelle que soit la valeur $x \in \mathbb{R}$, $j(x) = 1^x = 1$ est une fonction constante.

Finalement, $k(x) = x^{2x+1}$ a une base variable. Il ne s'agit donc pas d'une fonction exponentielle au sens de la définition 7.1, même si l'exposant est variable.

Comme on l'a vu avec les graphes des fonctions 2^x et $0{,}5^x$, le graphe d'une fonction exponentielle de type $f(x) = b^x$ dépend de la valeur de la base b,



mais, peu importe sa valeur (en autant qu'elle satisfait les contraintes $b > 0$ et $b \neq 1$), elle aura les caractéristiques suivantes :

— Son **domaine** est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et son **image** est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls $]0,\infty[$.
— La courbe passe par le point $(0; 1)$, car $f(0) = b^0 = 1$.
— La fonction est **positive** sur son domaine.
— Lorsque $b > 1$,
$$\lim_{x \to -\infty} (b^x) = 0$$
et lorsque $0 < b < 1$,
$$\lim_{x \to \infty} (b^x) = 0.$$
L'axe des x, c'est-à-dire la droite $y = 0$, est une asymptote horizontale au graphe de $y = b^x$.
— Si $b > 1$, la fonction est croissante.
— Si $0 < b < 1$, la fonction est décroissante.

Deux bases en particulier retiendront notre attention : la base 10 et la base e qu'on retrouve de façon standard sur les calculatrices.

Rappel. Le symbole « e » a été introduit au 18$^{\text{e}}$ siècle par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) pour désigner le nombre irrationnel 2,71828...

Toutes les propriétés des exposants décrites au chapitre 1 restent valides pour les fonctions exponentielles et sont résumées au tableau 7.1 de la page 83. Les propriétés numérotées de 1 à 5 du tableau sont des identités utiles pour simplifier des expressions contenant des exponentielles, tandis que les propriétés 6 et 7 sont des équivalences utiles pour résoudre des équations exponentielles.

TABLEAU 7.1 – Propriétés des fonctions exponentielles

Propriétés :	Exemples :
Pour simplifier des expressions :	
1. $a^x a^y = a^{x+y}$	$3^{2x}3^5 = 3^{2x+5}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\dfrac{2^{x+1}}{2^3} = 2^{x+1-3} = 2^{x-2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}} = \dfrac{1}{e^{3/2}} = e^{-3/2}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$	$(2b)^3 = 2^3b^3 = 8b^3$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	$\left(\dfrac{a}{5}\right)^{2x} = \dfrac{a^{2x}}{5^{2x}} = \dfrac{a^{2x}}{(5^2)^x} = \dfrac{a^{2x}}{25^x}$
5. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$	$(e^4)^x = e^{4\cdot x} = e^{4x}$ où $e = 2{,}71828\ldots$
Pour résoudre des équations :	
6. $a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$	$3^{2x+1} = 9^5 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = \left(3^2\right)^5 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^{10} \Leftrightarrow 2x+1 = 10 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 9/2$
7. $a^x = b^x \Longleftrightarrow a = b$	$10^{0{,}05x} = b^x \Leftrightarrow 10^{0{,}05} = b$

On suppose que a et b sont des nombres réels strictement positifs et différents de 1 et que x et y sont des variables réelles.

Exemple 7.3

Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{2^{x-3}}{2^{2x-5}}$

(b) $\left(\dfrac{5^x}{10^y}\right)^3$

(c) $\dfrac{5x^4e^{5x}-2x^3e^{5x}}{x^8}$

(d) $\dfrac{(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2}{2}$

Solution :

(a) On soustrait les exposants (prop. 2 du tableau 7.1) et on regroupe les termes semblables de l'exposant.

$$\frac{2^{x-3}}{2^{2x-5}} = 2^{(x-3)-(2x-5)} = 2^{-x+2} = 2^{2-x}$$

(b) On factorise 10, on applique l'exposant y au produit (prop.3), on soustrait les exposants (prop. 2) et on applique l'exposant au quotient (prop. 4).

$$\left(\frac{5^x}{10^y}\right)^3 = \left(\frac{5^x}{(2\cdot 5)^y}\right)^3 = \left(\frac{5^x}{2^y\cdot 5^y}\right)^3 = \left(\frac{5^{x-y}}{2^y}\right)^3 = \frac{5^{3(x-y)}}{2^{3y}}$$

(c) On factorise le numérateur pour ensuite simplifier le facteur commun x^3.

$$\frac{5x^4e^{5x}-2x^3e^{5x}}{x^8} = \frac{x^3e^{5x}(5x-2)}{x^8} = \frac{e^{5x}(5x-2)}{x^5}$$

(d) On développe les carrés, on utilise les propriétés des exposants, on regroupe les termes semblables et on simplifie les facteurs communs.

$$\begin{aligned}\frac{(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2}{2} &= \frac{((e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2)+((e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2)}{2}\\ &= \frac{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}+e^{2x}-2e^0+e^{-2x}}{2}\\ &= \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{2} = \frac{\cancel{2}(e^{2x}+e^{-2x})}{\cancel{2}} = e^{2x}+e^{-2x}\end{aligned}$$

Exemple 7.4

Résolvez chacune des équations suivantes en ramenant les deux membres à une base commune.

(a) $5^{3x} = 5^{4x-2}$

(b) $64^{x+1} = \dfrac{1}{16}$

(c) $9^{x^2} = 3^{3x-1}$

Solution :

(a) Puisque les deux membres de l'équation ont la même base, il suffit de comparer les exposants (prop. 6 du tableau 7.1) et de résoudre l'équation linéaire obtenue.

$$5^{3x} = 5^{4x-2} \iff 3x = 4x-2 \iff x = 2.$$

Validation. On vérifie la réponse en la remplaçant dans l'équation de départ.

$$5^{3(2)} \stackrel{?}{=} 5^{4(2)-2} \text{ est vrai, car } 3(2)=6 \text{ et } 4(2)-2=6.$$

(b) On ramène les deux membres de l'équation à une base commune et on utilise les propriétés du tableau 7.1 pour résoudre l'équation.

$$\begin{aligned}
64^{x+1} = \frac{1}{16} &\iff (4^3)^{x+1} = 4^{-2} && \text{la base commune est 4}\\
&\iff 4^{3(x+1)} = 4^{-2} && \text{on multiplie les exposants, prop.5}\\
&\iff 3(x+1) = -2 && \text{la base est identique, les exposants doivent donc être égaux, prop. 6}\\
&\iff x = -\tfrac{5}{3} && \text{on résout l'équation linéaire}
\end{aligned}$$

Validation. Faites-la.

(c) On ramène les deux membres de l'équation à une base commune.

Attention ! $9^{x^2} = 9^{(x^2)}$ et non $(9^x)^2$, car $(9^x)^2 = 9^{2x} \neq 9^{x^2}$.

$$\begin{aligned}
9^{x^2} = 3^{3x-1} &\iff (3^2)^{x^2} = 3^{3x-1} && \text{la base commune est 3}\\
&\iff 3^{2x^2} = 3^{3x-1} && \text{on multiplie les exposants, prop. 5}\\
&\iff 2x^2 = 3x-1 && \text{on égalise les exposants, prop. 6}\\
&\iff 2x^2 - 3x + 1 = 0 && \text{on additionne } -3x+1 \text{ aux deux membres}\\
&\iff x = \tfrac{1}{2} \text{ ou } x = 1 && \text{on résout l'équation quadratique}
\end{aligned}$$

Validation. Il suffit de vérifier chacune des solutions en les remplaçant une à la fois dans l'équation de départ. *Faites-le.*

Exemple 7.5

Résolvez l'équation $3xe^{-x} + x^2e^{-x} = 0$.

Solution :

On effectue d'abord la mise en évidence des facteurs communs.

$$3xe^{-x} + x^2e^{-x} = 0 \iff xe^{-x}(3+x) = 0$$

Puisque la fonction exponentielle e^{-x} ne s'annule jamais, les solutions de l'équation $xe^{-x}(3+x) = 0$ sont celles de l'équation polynomiale $x(3+x) = 0$. Ainsi, par la règle du produit nul, $x = 0$ et $x = -3$ sont les solutions cherchées.

Validation. On vérifie chacune des solutions en les remplaçant une à la fois dans l'équation de départ. Si $x = -3$ on trouve

$$\begin{aligned}
3(-3)e^{-(-3)} + (-3)^2e^{-(-3)} &\stackrel{?}{=} 0\\
-9e^3 + 9e^3 &= 0 \quad \text{qui est vraie}
\end{aligned}$$

On effectue la vérification pour $x = 0$ de la même façon. *Faites-le.*

Exemple 7.6

L'objectif de cet exemple est d'illustrer l'importance de s'assurer que l'équation à résoudre est bien exponentielle avant d'utiliser la propriété 7 du tableau 7.1. En effet, l'équation exponentielle $a^x = a^y$ possède les mêmes solutions que l'équation $x = y$, mais les solutions de l'équation $x^a = y^a$ ne sont pas nécessairement les mêmes que celles de $x = y$.

L'équation $(1-x)^4 = (3x-2)^4$ n'est pas une équation exponentielle, car l'inconnue x n'est pas en exposant. Si nous utilisons par mégarde la propriété 7 du tableau 7.1 pour la résoudre, elle nous amène à résoudre une équation linéaire.

$$1 - x = 3x - 2 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

La valeur $\frac{3}{4}$ est bien une solution de l'équation, car

$$\begin{array}{ccc} \left(1-\frac{3}{4}\right)^4 & \stackrel{?}{=} & \left(3\cdot\frac{3}{4}-2\right)^4 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^4 & = & \left(\frac{1}{4}\right)^4 \quad \text{est vraie.} \end{array}$$

Mais l'équation $(1-x)^4 = (3x-2)^4$ possède aussi comme solution $x = \frac{1}{2}$. En effet,

$$\begin{array}{ccc} \left(1-\frac{1}{2}\right)^4 & \stackrel{?}{=} & \left(3\cdot\frac{1}{2}-2\right)^4 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 & = & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \text{est vraie.} \end{array}$$

L'équation $(1-x)^4 = (3x-2)^4$ n'est donc pas équivalente à l'équation $1-x = 3x-2$ puisqu'elles n'ont pas le même ensemble solution. L'équation étant polynomiale, on doit la résoudre de la façon suivante.

$$(1-x)^4 = (3x-2)^4 \Longleftrightarrow 1-x = \pm(3x-2) \begin{array}{l} \nearrow \quad 1-x = 3x-2 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{4} \\ \\ \searrow \quad 1-x = -(3x-2) \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{array}$$

L'ensemble solution est alors $\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\}$.

Il faut donc s'assurer que l'équation à résoudre est bien exponentielle avant d'utiliser la propriété 7.

Exercices

7.1 À l'aide d'une table de valeurs, tracez le graphe correspondant à chacune des fonctions suivantes. Vérifiez ensuite votre graphe en le faisant tracer par votre calculatrice.

(a) $1{,}5^x$ (b) $0{,}7^x$

7.2 Identifiez le graphe qui représente le mieux chacune des fonctions décrites par les équations suivantes.

(a) $f(x) = 2^x$

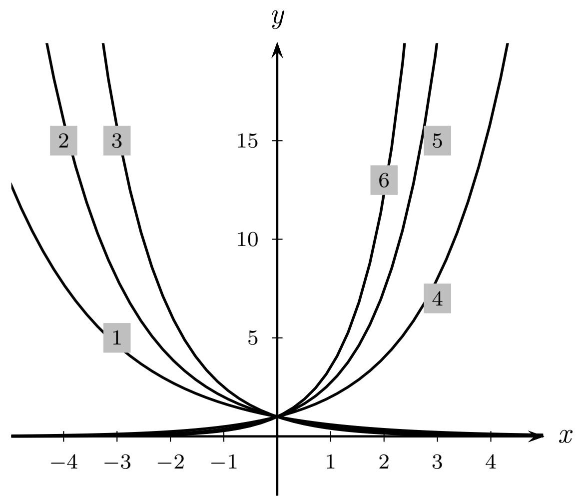
(b) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = 3{,}5^x$

(d) $f(x) = 0{,}4^x$

(e) $f(x) = 0{,}5^x$

(f) $f(x) = 0{,}6^x$



7.3 Indiquez les fonctions exponentielles parmi les fonctions suivantes. S'il s'agit d'une fonction exponentielle, esquissez son graphe. S'il ne s'agit pas d'une fonction exponentielle, dites pourquoi.

> **Rappel.** Esquissez un graphe signifie qu'on le trace à la main, sommairement, sans entrer dans le détail.

(a) $f(x) = 2^x$ (b) $f(x) = 2^{-x}$ (c) $f(x) = (-2)^{-x}$ (d) $f(x) = (\sqrt{2})^{-x}$

7.4 Simplifiez les expressions suivantes.

(a) $\sqrt{\dfrac{7^{x+2}}{7^{2-x}}}$

(b) $3^x(3^{-x}+1) - 3^{-x}(3^x+1)$

(c) $\dfrac{3e^x - (2+3x)e^x}{(e^x)^2}$

(d) $\dfrac{(-2e^{-2x})x^3 - e^{-2x}(3x^2)}{(x^3)^2}$

(e) $\dfrac{4^{2x}16^{-2x+1}}{2^{x-2}}$

(f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x} 5^{-x+2}$

(g) $\dfrac{2^{x+y} - 2^x}{2^x}$

(h) $\dfrac{6^t + 6^{x+t}}{6^{-\frac{x}{2}+t}}$

(i) $\dfrac{3^{t+2}}{3^{t-1} - 3^{t+1}}$

(j) $\dfrac{3(2e^{-x})^3 e^{2x-1}}{e^{4x}e^6}$

7.5 Les fonctions hyperboliques $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ sont définies par les équations suivantes.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) En calculant et en simplifiant le côté gauche de l'équation ci-dessous, montrez que

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1.$$

(b) Traduisez l'expression $\cosh(2x) + \sinh(2x)$ en termes d'exponentielles et simplifiez.

(c) Traduisez l'expression $\cosh x \sinh x - (\sinh x)^2$ en termes d'exponentielles et simplifiez.

7.6 ★ Quand on calcule la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{xe^x}$ à l'aide des règles et des formules de dérivation on obtient la fonction

$$\frac{1}{2}(xe^x)^{-1/2}\left(e^x + xe^x\right),$$

tandis que si on fait faire le calcul par la calculatrice, on obtient

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

Montrez que les deux réponses sont équivalentes, c'est-à-dire montrez que

$$\frac{1}{2}(xe^x)^{-1/2}\left(e^x + xe^x\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

7.7 Résolvez chacune des équations suivantes.

(a) $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$

(b) $4^{x-1} = 2^{1-x}$

(c) $25^{x+1} = 125^{2x}$

(d) $e^{x^2-3} = e^{2x}$

(e) $2x^2e^{-x} = 18e^{-x}$

(f) $10^{2x(x+3)} = 100^{x^2-1}$

(g) $2^{x-5} = 16^{x+\frac{5}{4}}$

(h) $4^{x^2+\frac{7}{2}x} = 2^{2x^2-9}$

(i) $7^{x-3} = 49^{2x+6}$

(j) $3^{3x^2-4x+4} = 9^{x^2}$

(k) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1}$

(l) $\dfrac{3^{x^2-3x}\cdot 3^3}{9^x} = \dfrac{1}{3}$

7.8 Un montant P \$ est investi au taux annuel r % (en décimal, par exemple 1 % = 0,01) et est composé M fois par année. Après N années, le montant accumulé F \$, à partir du montant initial P \$, est donné par la formule

$$F = P\left(1 + \frac{r}{M}\right)^{MN}.$$

(a) Quel montant sera accumulé à partir d'un investissement initial de 5 000 \$ placé pendant 10 ans à un taux d'intérêt de 2,5 % composé annuellement, c'est-à-dire une fois par année ? Et si ce montant est composé trimestriellement, c'est-à-dire à tous les trois mois, quel sera le montant accumulé ?

(b) Vous avez 15 000 \$ à investir. Lequel des investissements suivants donne le meilleur rendement sur une période de 10 ans : 6 % composé annuellement ou 5,9 % composé mensuellement ?

7.9 Selon la Banque du Canada, un « panier » de biens et services coûtant 100 \$ en 1965, coûterait 752,66 \$ en 2015 pour un taux d'inflation moyen d'environ 4,12 % par année tandis qu'un panier de 100 \$ en l'an 2000, coûterait 132,09 \$ en 2015 pour un taux d'inflation moyen d'environ 1,87 % par année.

(a) Si C est la valeur initiale, r est le taux d'inflation annuel moyen pour la période et S est la valeur inflationnée après N années, vérifiez que la formule

$$S = C(1 + r)^N$$

reflète bien les données de la Banque du Canada.

(b) Si on suppose que taux d'inflation demeure autour de 1,9 % dans les années à venir, une voiture qui se vend 20 000 \$ en 2015 se vendrait combien en 2030 ?

(c) Le taux d'inflation moyen entre 1970 et 1980 était de 8,33 %. Si l'inflation était toujours à ce niveau, la voiture qui se vend 20 000 $ en 2015 se vendrait combien en 2030 ?

(d) Sachant que le taux d'inflation moyen a été de 4,15 % entre 1970 et 2015, à ce taux d'inflation, la voiture qui se vend 20 000 $ en 2015 se vendrait combien en 2030 ?

7.10 La catastrophe nucléaire de Tchernobyl a eu lieu le 26 avril 1986 à la centrale Lénine en République socialiste soviétique d'Ukraine. Elle a été provoquée par l'augmentation incontrôlée de la puissance d'un réacteur conduisant à la fusion du coeur. L'explosion aurait libéré environ 1000 kg de césium-137 dans l'atmosphère. La demi-vie du césium-137 étant de 30 ans, on peut utiliser la fonction

$$f(t) = 1000(0{,}5)^{t/30}$$

pour modéliser la quantité de césium-137 encore présente à Tchernobyl, t années après l'accident de 1986. Si 100 kg de césium-137 dans l'atmosphère rend la région inhabitable, déterminez si Tchernobyl sera habitable en 2050.

7.2 Les fonctions logarithmiques

On sait résoudre des équations exponentielles simples comme $32^x = 64$ en ramenant ses deux membres à une base commune pour ensuite appliquer la propriété 6 des fonctions exponentielles (tableau 7.1, p. 83).

$$32^x = 64 \Longleftrightarrow (2^5)^x = 2^6 \Longleftrightarrow 2^{5x} = 2^6 \Longleftrightarrow 5x = 6 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{5}$$

On trouve ainsi que l'exposant qu'il faut donner à 32 pour obtenir 64 est $\frac{6}{5}$.

Qu'en est-il pour une équation comme $13{,}57 = 0{,}938^x$, où une base commune ne saute pas aux yeux ?

La fonction exponentielle $f(x) = 0{,}938^x$ calcule à partir d'une valeur x, la valeur $y = 0{,}938^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 0{,}938^x$	1,2116...	1,1365...	1,0661...	1	0,938	0,8798...	0,8252...

Si on veut l'exposant lorsqu'on connaît la valeur de l'exponentielle y, on doit utiliser la réciproque de $f(x)$.

x	1,2116...	1,1365...	1,0661...	1	0,938	0,8798...	0,8252...
$f^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

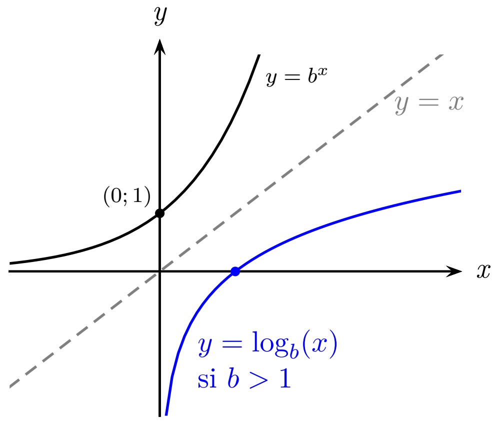
Définition 7.2 La **fonction logarithmique** de base b, notée $f(x) = \log_b(x)$, est définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base b. C'est-à-dire, pour $b > 0$, $b \neq 1$,

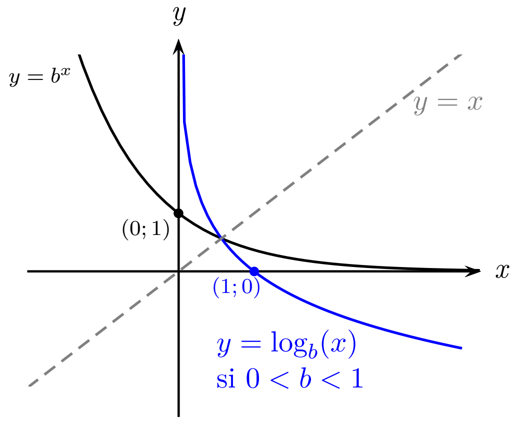
$$\log_b(x) = y \Longleftrightarrow b^y = x.$$

Ainsi, $\log_b(x)$ **est l'exposant qu'il faut donner à la base b pour obtenir x.**

À l'aide d'une calculatrice on peut calculer le logarithme $\log_{0{,}938}(13{,}57) = -40{,}744442...$ et vérifier qu'il s'agit bien de l'exposant qu'on doit donner à 0,938 pour obtenir 13,57. En effet, $0{,}938^{-40{,}744442...} = 13{,}57$.

L'ordre des coordonnées des couples étant inversé, le graphe d'une fonction logarithmique est obtenu par la réflexion, par rapport à l'axe $y = x$, du graphe de la fonction exponentielle dont elle est la réciproque.





Ses principales caractéristiques sont les suivantes :

— Peu importe la base b (en autant qu'elle satisfait les contraintes $b > 0$ et $b \neq 1$), le **domaine** de $f(x) = \log_b(x)$ est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls $]0,\infty[$ et son **image** est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

— La courbe passe par le point $(1;0)$, car $\log_b(1) = 0 \Longleftrightarrow b^0 = 1$.

— Lorsque $b > 1$,

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b(x) = -\infty$$

et lorsque $0 < b < 1$,

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b(x) = \infty.$$

L'axe des y, c'est-à-dire la droite $x = 0$, est une asymptote verticale au graphe de $f(x) = \log_b(x)$.

— Si $b > 1$, la fonction est croissante.

— Si $0 < b < 1$, la fonction est décroissante.

Exemple 7.7

Trouvez le domaine de chacune des fonctions logarithmiques suivantes.

(a) $f(x) = \dfrac{5 - \log(2x-1)}{3}$

(b) $g(x) = \ln(2+x) - 3\ln(5-2x)$

Solution :

(a) On s'assure que l'argument du logarithme $\log(2x-1)$ est strictement positif pour que la fonction soit définie.

$$2x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Le domaine est donc $]\frac{1}{2};\infty[$.

(b) Tous les arguments des fonctions logarithmiques doivent être strictement positifs simultanément, afin que la fonction soit bien définie.

$$\begin{aligned} 2 + x > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad x > -2 \\ 5 - 2x > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad x < \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Le domaine est donc $]-2;\frac{5}{2}[$.

Les logarithmes en base 10 sont appelés **logarithmes décimaux** et sont notés $\log(x)$,

$$\log_{10}(x) = \log(x).$$

Les logarithmes en base $e = 2{,}71828...$ sont appelés **logarithmes naturels** et sont notés $\ln(x)$,

$$\log_e(x) = \ln(x).$$

Attention ! On peut mieux comprendre les logarithmes si on se rappelle qu'il s'agit d'exposants. En effet, $\log_b(x)$ **est l'exposant qu'il faut donner à la base b pour obtenir x.** L'expression $\log_3(81)$ représente donc l'exposant qu'il faut donner à 3 pour obtenir 81 ; $\log_3(81)$ est une autre façon de dire 4, car $3^4 = 81$.

Exemple 7.8

Évaluez chacune des expressions suivantes sans calculatrice.

(a) $\log(1000)$
(b) $\log_2(8)$
(c) $\log(1)$
(d) $\log\left(\frac{1}{100}\right)$
(e) $\ln(e^3)$
(f) $e^{\ln(125)}$

Solution :

(a) $\log(1000) = \log_{10}(1000)$ est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir 1000. Puisque $10^3 = 1000$, $\log(1000) = 3$.

(b) $\log_2(8)$ est l'exposant qu'il faut donner à 2 pour obtenir 8. Puisque $2^3 = 8$, $\log_2(8) = 3$.

(c) $\log(1) = \log_{10}(1)$ est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir 1. Puisque $10^0 = 1$, $\log(1) = 0$.

(d) $\log\left(\frac{1}{100}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right)$ est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir $\frac{1}{100}$. Puisque $\frac{1}{100} = 10^{-2}$, $\log\left(\frac{1}{100}\right) = -2$.

(e) $\ln(e^3) = \log_e(e^3)$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir e^3, ainsi $\ln(e^3) = 3$.

(f) $\ln(125) = 4{,}8283...$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir 125. Ainsi, si on donne cet exposant à e on aura 125, $e^{4{,}8283...} = 125$. On en conclut que $e^{\ln(125)} = 125$.

Les exemples (e) et (f) illustrent le fait que les fonctions exponentielle et logarithmique de même base sont réciproques l'une de l'autre.

Les propriétés des logarithmes sont résumées au tableau 7.2 à la page 93.

Les propriétés 1 et 2 du tableau 7.2 se déduisent facilement de l'équivalence entre les fonctions exponentielle et logarithmique

$$\log_b(x) = y \Longleftrightarrow b^y = x.$$

Lorsque $b > 0$ et $b \neq 1$, 0 est bien l'exposant qu'il faut donner à la base b pour obtenir 1

$$b^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_b(1) = 0 \quad \text{(prop. 1)}$$

et l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir b est bien 1.

$$b^1 = b \Longleftrightarrow \log_b(b) = 1 \quad \text{(prop. 2)}$$

Les propriétés 3 et 4 découlent de la définition de $\log_b(x)$ comme réciproque de la fonction exponentielle en base b.

Les propriétés 5, 6 et 7 des logarithmes découlent du fait que tous les nombres réels positifs M et N peuvent s'écrire sous forme d'exponentielles en base b, en autant que b est positif et différent de 1.

Tableau 7.2 – Propriétés des fonctions logarithmiques

	Propriétés :	Exemples :
1.	$\log_b(1) = 0$	$\log_2(1) = 0$, $\ln(1) = 0$, $\log(1) = 0$
2.	$\log_b(b) = 1$	$\log_3(3) = 1$, $\ln(e) = 1$, $\log(10) = 1$
Les fonctions exponentielle et logarithmique sont réciproques l'une de l'autre :		
3.	$\log_b(b^x) = x$	$\ln\left(e^x\right) = x,\ \log_3\left(3^{2x+1}\right) = 2x + 1$
4.	$b^{\log_b(x)} = x,\ x > 0$	$3^{\log_3(7)} = 7,\ e^{\ln(7)} = 7,\ 10^{\log(7)} = 7$
Le logarithme d'un produit, d'un quotient et d'une puissance :		
5.	$\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N)$	$\log_2(3x) = \log_2(3) + \log_2(x)$
6.	$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b(M) - \log_b(N)$	$\ln\left(\frac{x}{5}\right) = \ln(x) - \ln(5)$
7.	$\log_b\left(M^p\right) = p \cdot \log_b(M)$	$\ln\left(x^7\right) = 7 \cdot \ln(x)$

On suppose que a et b sont des nombres réels, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, que M et N sont des expressions à valeurs réelles positives, que p est un nombre réel et que x est une variable réelle.

Exemple 7.9

Écrivez le nombre 1234,5 comme une exponentielle en base 6,78.

Solution :

On doit déterminer la valeur x qui fait en sorte que $1234{,}5 = 6{,}78^x$. Puisqu'il s'agit de l'exposant qu'il faut donner à 6,78 pour obtenir 1234,5,

$$x = \log_{6{,}78}(1234{,}5) = 3{,}719177...$$

Ainsi, $1234{,}5 = 6{,}78^{3{,}719177...}$.

Validation. On évalue $6{,}78^{3{,}719177...}$ à l'aide d'une calculatrice pour s'assurer que le résultat est bien 1234,5. *Faites-le.*

En général, pour $b > 0$ et $b \neq 1$, si on suppose que

$$M = b^m \text{ et } N = b^n,$$

on fait l'hypothèse que m est l'exposant qu'on doit donner à b pour obtenir M et n est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir N. Autrement dit,

$$m = \log_b(M) \text{ et } n = \log_b(N).$$

On peut maintenant démontrer les propriétés 5, 6 et 7.

Propriété 5.

$$\begin{array}{rcll}
\log_b(M \cdot N) & = & \log_b(b^m \cdot b^n) & \text{en remplaçant } M \text{ par } b^m \text{ et } N \text{ par } b^n \\
& = & \log_b(b^{m+n}) & \text{on additionne les exposants} \\
& = & m + n & \text{par la propriété 3 des logarithmes} \\
& = & \log_b(M) + \log_b(N) & \text{puisque } m = \log_b(M) \text{ et } n = \log_b(N)
\end{array}$$

Propriété 6.

$$\begin{array}{rcll}
\log_b\left(\frac{M}{N}\right) & = & \log_b\left(\frac{b^m}{b^n}\right) & \text{en remplaçant } M \text{ par } b^m \text{ et } N \text{ par } b^n \\
& = & \log_b(b^{m-n}) & \text{on soustrait les exposants} \\
& = & m - n & \text{par la propriété 3 des logarithmes} \\
& = & \log_b(M) - \log_b(N) & \text{puisque } m = \log_b(M) \text{ et } n = \log_b(N)
\end{array}$$

Propriété 7.

$$\begin{array}{rcll}
\log_b(M^p) & = & \log_b((b^m)^p) & \text{en remplaçant } M \text{ par } b^m \\
& = & \log_b(b^{mp}) & \text{on multiplie les exposants} \\
& = & mp & \text{par la propriété 3 des logarithmes} \\
& = & pm & \text{par commutativité de la multiplication} \\
& = & p\log_b(M) & \text{puisque } m = \log_b(M)
\end{array}$$

Exemple 7.10

Utilisez le fait que les fonctions exponentielle et logarithmique de même base sont réciproques l'une de l'autre (propriétés 3 et 4 du tableau 7.2) pour simplifier les expressions suivantes.

(a) $10^{\log(3x^2)}$, où $x \neq 0$ (b) $\ln(e^{4x+3})$ (c) $5^{3\log_5(1-2x)}$, où $x < \frac{1}{2}$

Attention ! Les restrictions sont nécessaires afin que les fonctions logarithmiques soient définies. L'argument d'un logarithme doit toujours être strictement positif.
Il n'y a pas de telles restrictions sur les fonctions exponentielles, car elles sont définies quelle que soit la valeur de sa variable.

Solution :

(a) On utilise la propriété 4 avec $b = 10$, $10^{\log(x)} = x$, et on y remplace x par l'argument du logarithme qui est $3x^2$. Ainsi,
$$10^{\log(3x^2)} = 3x^2.$$
Validation. $\log(3x^2)$ est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir $3x^2$. Si on donne cet exposant à 10, soit $10^{\log(3x^2)}$, on aura bien $3x^2$.

(b) On utilise la propriété 3 avec $b = e$, soit $\log_e(e^x) = \ln(e^x) = x$, et on remplace l'argument de l'exponentielle par $4x + 3$ pour trouver
$$\ln(e^{4x+3}) = 4x + 3.$$
Validation. $\ln(e^{4x+3})$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir e^{4x+3}. Cet exposant est bien $4x + 3$.

(c) On doit d'abord utiliser la propriété 7.
$$\begin{aligned} 5^{3\log_5(1-2x)} &= 5^{\log_5(1-2x)^3} && \text{prop. 7 avec } b=5,\ p=3 \text{ et } M=1-2x \\ &= (1-2x)^3 && \text{on utilise la prop. 4, } 5^{\log_5(x)} = x \end{aligned}$$
Validation. $\log_5(1-2x)^3$ est l'exposant qu'il faut donner à 5 pour obtenir $(1-2x)^3$. Si on donne cet exposant à 5, on aura bien $(1-2x)^3$.

Exemple 7.11

Utilisez les propriétés des logarithmes pour développer le plus possible l'expression
$$\ln\left(\frac{2x}{3(x-1)^2}\right), \text{ où } x > 1$$

Solution :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2x}{3(x-1)^2}\right) &= \ln(2x) - \ln(3(x-1)^2) && \text{logarithme d'un quotient} \\ &= \ln 2 + \ln x - \left[\ln 3 + \ln(x-1)^2\right] && \text{il faut mettre des parenthèses puisque le logarithme d'un produit se décompose en 2 termes, } \ln MN = \ln M + \ln N \\ &= \ln 2 + \ln x - \ln 3 - \ln(x-1)^2 && \text{on distribue } -1 \text{ sur la somme} \\ &= \ln 2 + \ln x - \ln 3 - 2\ln(x-1) && \text{on utilise } \ln(M^p) = p\ln(M) \end{aligned}$$

Attention ! Lorsque l'argument d'un logarithme n'a qu'un seul terme, on peut se permettre de ne pas l'encadrer de parenthèses. Par exemple,
$$\ln\left(3(x-1)^2\right) = \ln 3(x-1)^2.$$
On doit néanmoins mettre l'argument entre parenthèses lorsqu'il contient plus d'un terme. Par exemple,
$$\ln(x-1) \neq \ln x - 1 = \ln(x) - 1.$$
Dans le doute, ou par souci de clarté, on met des parenthèses.

Exemple 7.12

Utilisez les propriétés des logarithmes pour écrire l'expression suivante en un seul logarithme qui soit de coefficient 1. Simplifiez lorsque possible.

$$1 + 4\log\sqrt{2x+1} - \log\left(\frac{2x+1}{x}\right),\ \text{ où } x > 0$$

Solution :

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{1 + 4\log\sqrt{2x+1} - \log\left(\frac{2x+1}{x}\right)} & \\
= & \log(10) + 4\log\sqrt{2x+1} - \log\left(\frac{2x+1}{x}\right) & \text{on réécrit le terme constant, } 1 = \log(10) \\
= & \log(10) + \log(\sqrt{2x+1})^4 + \log\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-1} & \text{on rentre les coefficients, } p\log(M) = \log(M^p) \\
= & \log(10) + \log(2x+1)^2 + \log\left(\frac{x}{2x+1}\right) & \text{on simplifie les exposants du deuxième terme} \\
& & \text{et on inverse la fraction du troisième terme} \\
= & \log\left(10 \cdot (2x+1)^2 \cdot \dfrac{x}{2x+1}\right) & \text{on regroupe, } \log(M) + \log(N) = \log(MN) \\
= & \log\left(10x(2x+1)\right) & \text{on simplifie les facteurs communs}
\end{array}$$

Tableau 7.3 – **Attention !** Erreurs typiques à éviter…

Erreur typique	Identité correcte
$\log_b(M+N) \cancel{=} \log_b(M)+\log_b(N)$	$\log_b(M\cdot N)=\log_b(M)+\log_b(N)$
$\log_b(M-N) \cancel{=} \log_b(M)-\log_b(N)$	$\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_b(M)-\log_b(N)$
$\log_b(M\cdot N) \cancel{=} \log_b(M)\cdot\log_b(N)$	$\log_b(M\cdot N)=\log_b(M)+\log_b(N)$
$\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) \cancel{=} \dfrac{\log_b(M)}{\log_b(N)}$	$\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_b(M)-\log_b(N)$
$\dfrac{\log_b(M)}{\log_b(N)} \cancel{=} \log_b(M)-\log_b(N)$	$\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_b(M)-\log_b(N)$

On suppose que M et N sont des expressions à valeurs réelles positives et qu'il n'y a aucune division par 0.

Exercices

7.11 En utilisant le sens du logarithme (dites-le !), exprimez chacune des égalités logarithmiques ci-dessous sous la forme exponentielle.

(a) $\log_5(25) = 2$
(b) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$
(c) $\log_3 1 = 0$
(d) $\log(1000) = 3$
(e) $\ln(1) = 0$

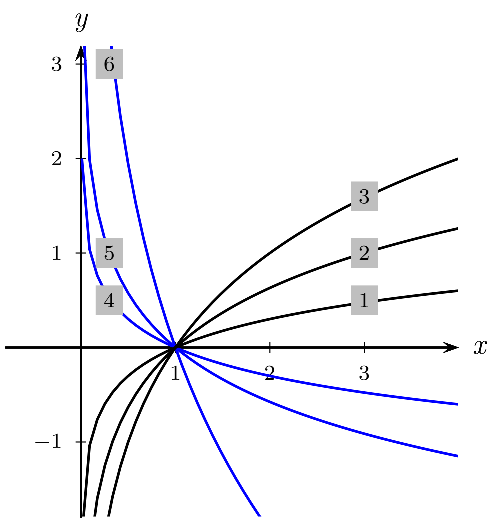
7.12 En utilisant le sens du logarithme (dites-le !), exprimez chacune des égalités exponentielles ci-dessous sous la forme logarithmique.

(a) $4^3 = 64$
(b) $3^{-2} = \frac{1}{9}$
(c) $10^0 = 1$
(d) $e^x = y$
(e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{8}$

7.13 Esquissez les graphes de chacune des paires de fonctions suivantes dans le même plan cartésien pour confirmer qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

(a) $f(x) = 10^x$ et $g(x) = \log(x)$
(b) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$
(c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ et $g(x) = \log_{1/2}(x)$
(d) $f(x) = 3^{-x}$ et $g(x) = \log_{1/3}(x)$

7.14 Identifiez le graphe qui représente le mieux chacune des fonctions suivantes.



(a) $f(x) = \log_{0,7}(x)$
(b) $f(x) = \log_{0,3}(x)$
(c) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$
(d) $f(x) = \log_2(x)$
(e) $f(x) = \log_3(x)$
(f) $f(x) = \log(x)$

7.15 Trouvez le domaine de chacune des fonctions logarithmiques suivantes.

(a) $\log(x+3)$
(b) $\dfrac{\ln(1-x)+1}{3}$
(c) $\ln(x-5)^2$
(d) $2\ln(x)+\ln(x-3)$

7.16 Évaluez chacune des expressions suivantes sans calculatrice.

(a) $\log_3(\sqrt{3})$
(b) $\log_{0,5}(16)$
(c) $\ln(1)$
(d) $\log_9\left(\frac{1}{81}\right)$
(e) $\ln(e^7)$
(f) $\log_{30}\left(\frac{1}{900}\right)$
(g) $\log_2 32$
(h) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)$
(i) $\log_{10}(0,1)$
(j) $\log_{\frac{1}{6}}(36)$

7.17 Utilisez le fait que les fonctions exponentielle et logarithmique de même base sont réciproques l'une de l'autre (propriétés 3 et 4 du tableau 7.2) pour simplifier les expressions suivantes.

(a) $\ln(e^{3x})$

(b) $2\log(10^{2t+1})$

(c) $e^{5\ln(3x^2-1)}$, où $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

(d) $10^{\log\sqrt{x+1}}$, où $x > -1$

(e) $\log_5\left(5^{(x-1)^2}\right)$

(f) $\log_{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{(4x+1)}\right)$

(g) $0{,}4^{\log_{0,4}(x^2-2)}$, où $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$

(h) $3^{2\log_3(2+\sqrt{x+5})}$, où $x \geq -5$

Pourquoi indique-t-on des restrictions sur x à certains endroits, mais pas à d'autres ?

7.18 Pour chacune des égalités suivantes, dites laquelle des propriétés de 1 à 7 du tableau 7.2 est utilisée.

(a) $\log_2(3x) = \log_2(3) + \log_2(x)$, où $x > 0$

(b) $5\ln(e^8) = 40$

(c) $\log(x^5) = 5\log(x)$, où $x > 0$

(d) $\log(10) = 1$

(e) $2\ln(1) = 0$

(f) $5^{\log_5(3x)} = 3x$, où $x > 0$

(g) $\log\left(\frac{\sqrt{x}}{25}\right) = \log(\sqrt{x}) - \log(25)$, où $x > 0$

(h) $e^{\ln(x^2)} = e^{2\ln(x)}$, où $x > 0$

7.19 En utilisant uniquement les opérations arithmétiques (+, -, · et ÷) et les propriétés des logarithmes, complétez le tableau suivant. Par exemple,

$$\ln 5 = \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln(10) - \ln(2) = 2{,}3025... - 0{,}6931... = 1{,}6094...$$

x	0	1	2	3	4	5	6
$\ln x$			0,6931. . .	1,0986. . .			

x	7	8	9	10	16	500	$\sqrt{27}$
$\ln x$	1,9459. . .			2,3025. . .			

7.20 Utilisez les propriétés des logarithmes pour développer le plus possible chacune des expressions suivantes. Lorsque possible, simplifiez les expressions logarithmiques sans calculatrice.

(a) $\log\left(\frac{x}{100}\right)$, où $x > 0$

(b) $\log_2\left(\frac{32}{y^5}\right)$, où $y > 0$

(c) $\ln\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x^3}\right)$, où $x > \frac{1}{2}$

(d) $\log_3\left(\frac{x^2}{9y^3}\right)$, où $x > 0$ et $y > 0$

(e) $\log_b\left(\frac{x^3y^2}{z^2}\right)$, où $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$

(f) $\ln\sqrt{ex^2}$ où $x \neq 0$

(g) $\ln\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, où $x > 0$ et $y > 0$

(h) $\log\frac{(x+10)^2}{(10x+1)^3}$, où $x > -\frac{1}{10}$

7.21 Utilisez les propriétés des logarithmes pour écrire chacune des expressions suivantes en utilisant un seul logarithme de coefficient 1. Simplifiez lorsque possible.

(a) $\log_6 2 + \log_6 3$

(b) $3\log_6 2 - \log_6 3 + 2\log_6 \frac{3}{2}$

(c) $3\ln x + 2\ln y - \frac{1}{4}\ln z$, où $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$

(d) $5\left(\frac{1}{2}\log u - 2\log v\right)$, où $u > 0$ et $v > 0$

(e) $4\log_3(x^{1/4}y) - 6\log_3(xy^{1/3})$, où $x > 0$ et $y > 0$
(f) $\log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2(4)$
(g) $\log 27 + \log(5x) - \log(5x^4)$, où $x > 0$
(h) $\ln(e^2) - \ln(2e) + \ln(\frac{e}{4})$

7.22 En faisant son devoir 2 de MAT145 le trimestre dernier, Stéphanie a calculé une intégrale à la main et a trouvé l'expression

$$\frac{4}{5}\ln\left(\frac{x-2}{x+8}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x-16\right).$$

Elle a ensuite fait le calcul à la calculatrice et a obtenu

$$-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{(x+8)^{13}}{(x-2)^3}\right).$$

En utilisant les propriétés des fonctions logarithmiques, montrez que les deux expressions sont équivalentes, c'est-à-dire que

$$\frac{4}{5}\ln\left(\frac{x-2}{x+8}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+6x-16\right) = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{(x+8)^{13}}{(x-2)^3}\right).$$

7.23 Considérez la fonction $f(x) = 5\ln(2x-1) + 3$.

(a) Quel est son domaine ?
(b) Trouvez le ou les zéros de la fonction $f(x)$. Interprétez cette ou ces valeurs sur le graphique de la fonction.
(c) Si on substitue à la variable indépendante des valeurs qui sont de plus en plus près de la borne inférieure du domaine, que se produit-il ? Ceci correspond à quelle caractéristique de la fonction logarithmique ? Illustrez à l'aide d'un graphique.

7.3 Les équations exponentielles et logarithmiques

Exemple 7.13

On peut résoudre l'équation $8^x = 12$ des trois façons suivantes.

(a) À l'aide de l'équivalence entre la forme exponentielle et la forme logarithmique.

$$8^x = 12 \iff x = \log_8(12) \approx 1{,}195$$

où x est l'exposant qu'il faut donner à 8 pour obtenir 12.

(b) À l'aide de la réciproque de l'exponentielle en base 8, le logarithme en base 8.

$$\begin{aligned} 8^x = 12 &\iff \log_8(8^x) = \log_8(12) && \text{on applique } \log_8() \text{ aux deux membres} \\ &\iff x = \log_8(12) \approx 1{,}195 && \log_8(x) \text{ et } 8^x \text{ sont réciproques (prop. 3)} \end{aligned}$$

(c) À l'aide d'une autre base. Ici, on choisit e.

$$\begin{aligned} 8^x = 12 &\iff \ln(8^x) = \ln(12) && \text{on applique } \ln() \text{ aux deux membres} \\ &\iff x\ln(8) = \ln(12) && \text{on utilise } \log_b M^p = p\log_b(M) \text{ (prop. 7)} \\ &\iff x = \tfrac{\ln(12)}{\ln(8)} \approx 1{,}195 && \text{on résout pour } x \end{aligned}$$

La règle de changement de base dont il est question à la propriété 8 du tableau 7.4 de la page 104,

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$$

permet de faire le lien entre les formes obtenues en (b) et en (c) de l'exemple précédent et explique pourquoi on peut rencontrer plusieurs formes équivalentes comme solution d'une équation exponentielle. Pour démontrer cette propriété, on utilise la définition 7.2 et on applique $\log_b()$ aux deux membres de l'équation.

$$\begin{aligned} y = \log_a(x) &\iff a^y = x \\ &\iff \log_b(a^y) = \log_b(x) && \text{on applique } \log_b() \text{ aux deux membres} \\ &\iff y\log_b(a) = \log_b(x) && \text{on utilise la prop. 7 : } \log_b M^p = p\log_b(M) \\ &\iff y = \tfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} && \text{on résout pour } y \end{aligned}$$

Ainsi, posant en $a = 8$, $x = 12$ et $b = e$, on retrouve les formes équivalentes $\log_8(12) = \frac{\ln(12)}{\ln(8)}$.

Exemple 7.14

Dans cet exemple, on illustre comment réconcilier deux réponses à l'aide de la règle de changement de base.

(a) Résolvez l'équation exponentielle $5^{x-1} = 7$ en utilisant le logarithme en base 5.

(b) Résolvez à nouveau l'équation, mais cette fois, à l'aide du solveur de votre calculatrice.

(c) Réconciliez vos deux réponses, c'est-à-dire précisez quelles sont les propriétés qui permettent de passer d'une expression logarithmique à l'autre.

Solution :

(a) En utilisant la base 5,

$$\begin{aligned} 5^{x-1} = 7 &\iff \log_5(5^{x-1}) = \log_5(7) && \text{on applique } \log_5() \text{ aux deux membres} \\ &\iff x - 1 = \log_5(7) && \text{on utilise la prop. 3 : } \log_5(5^x) = x \\ &\iff x = \log_5(7) + 1 && \text{on isole } x \end{aligned}$$

(b) À l'aide du solveur de la calculatrice on trouve $\frac{\ln(35)}{\ln(5)}$.

$\text{solve}\left(5^{x-1}=7,x\right)$	$x=\dfrac{\ln(35)}{\ln(5)}$

Attention ! Comme la calculatrice, en ingénierie, on privilégie habituellement la base e.

(c) On doit montrer que $\log_5(7)+1=\frac{\ln(35)}{\ln(5)}$.

$$\begin{array}{rcll}
\log_5(7)+1 & = & \dfrac{\ln(7)}{\ln(5)}+1 & \text{on utilise la règle de changement de base} \\
 & = & \dfrac{\ln(7)+\ln(5)}{\ln(5)} & \text{on met au dénominateur commun} \\
 & = & \dfrac{\ln(7\cdot 5)}{\ln(5)} & \text{on utilise la prop. 5 : } \ln(M)+\ln(N)=\ln(M\cdot N) \\
 & = & \dfrac{\ln(35)}{\ln(5)} & \text{on effectue le produit}
\end{array}$$

Bien que certaines équations exponentielles peuvent être résolues en traduisant les deux membres de l'équation à une base commune, comme à la section 7.1, elle sont généralement résolues en utilisant un logarithme.

Exemple 7.15

À température constante, la pression atmosphérique p (en Pa) à h mètres d'altitude est donnée par la formule générale

$$p=p_0e^{kh}$$

où p_0 est la pression atmosphérique lorsque $h=0$, habituellement au niveau de la mer. Sachant que $p_0=101{,}3$ kPa et $p=57{,}7$ kPa lorsque $h=4500$ m, trouvez la valeur k.

Solution :

Puisque la base de l'exponentielle est la base e, il convient d'utiliser le logarithme en base e aussi.

$$\begin{array}{rcll}
p=p_0e^{kh} & \Longleftrightarrow & \ln(p)=\ln(p_0e^{kh}) & \text{on applique } \ln() \text{ aux deux membres} \\
 & \Longleftrightarrow & \ln(p)=\ln(p_0)+\ln(e^{kh}) & \text{on utilise } \ln(MN)=\ln(M)+\ln(N) \text{ où } M=p_0 \text{ et } N=e^{kh} \\
 & \Longleftrightarrow & \ln(p)=\ln(p_0)+kh & \text{on utilise } \ln(e^x)=x \\
 & \Longleftrightarrow & \ln(p)-\ln(p_0)=kh & \text{on soustrait } \ln(p_0) \text{ aux deux membres} \\
 & \Longleftrightarrow & k=\frac{\ln(p)-\ln(p_0)}{h} & \text{on isole } k
\end{array}$$

En substituant les valeurs $p=57{,}7\text{ kPa}=57{,}7\times10^3$ Pa, $p_0=101{,}3\text{ kPa}=101{,}3\times10^3$ Pa et $h=4500$ m, on trouve

$$k=\frac{\ln(57{,}7\times10^3)-\ln(101{,}3\times10^3)}{4500}\approx-0{,}000125.$$

Exemple 7.16

Résolvez l'équation $\ln(2x+1) - \ln(x-1) = \ln(x)$ après avoir déterminé son domaine.

Solution :

Peu importe la base, l'argument d'un logarithme doit toujours être positif. Pour qu'une valeur soit dans le domaine de l'équation, elle doit satisfaire toutes les contraintes suivantes simultanément.

$$\begin{aligned} 2x+1>0 &\iff x>-\tfrac{1}{2} \\ x-1>0 &\iff x>1 \\ x>0 &\iff x>0 \end{aligned}$$

Le domaine est donc $]1;\infty[$.

$$\begin{array}{lll} \ln(2x+1)-\ln(x-1)=\ln(x) & & \\ \iff & \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\ln(x) & \text{on regroupe les termes du membre de gauche} \\ \iff & e^{\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)}=e^{\ln(x)} & \text{on applique } e^{()} \text{ aux deux membres} \\ \iff & \dfrac{2x+1}{x-1}=x & \ln(x) \text{ et } e^x \text{ sont des fonctions réciproques} \\ \iff & 2x+1=x(x-1) & \text{on obtient une équation quadratique} \\ \iff & 0=x^2-3x-1 & \text{on développe et on regroupe tous les termes dans le membre de droite} \\ \iff & x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} & \text{on utilise la formule quadratique} \end{array}$$

Puisque $\sqrt{13}$ est plus grand que 3, $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<1$ et on doit rejeter cette valeur. La seule solution est donc $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx 3{,}3$ qui, elle, est dans le domaine de l'équation.

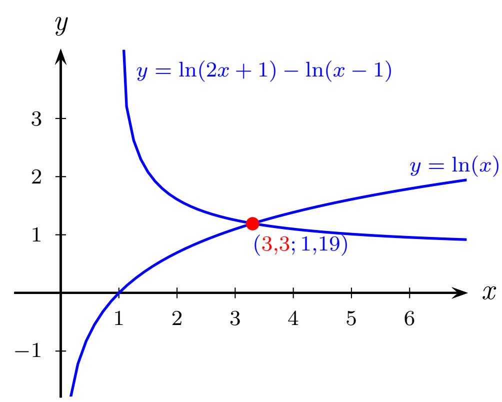


TABLEAU 7.4 – Propriétés des fonctions logarithmiques, suite

Propriétés :	Exemples :
La formule de changement de base :	
8 . $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$	$\log_4(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(4)} = \frac{3}{2}$
	$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} = \frac{\log(x)}{0{,}434...} \approx 2{,}3\log(x)$
Équivalence utile pour résoudre des équations :	
9. $\log_b(M) = \log_b(N) \Leftrightarrow M = N$	$5^{4x-7}+3=10 \Leftrightarrow 5^{4x-7}=7$
	$\Leftrightarrow \ln(5^{4x-7}) = \ln(7)$
	$\Leftrightarrow (4x-7)\ln(5) = \ln(7)$
	$\Leftrightarrow 4x-7 = \frac{\ln(7)}{\ln(5)}$
	$\Leftrightarrow 4x = \frac{\ln(7)}{\ln(5)} + 7$
	$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{\ln(7)}{\ln(5)}+7}{4} \approx 2{,}052265$

On suppose que a et b sont des nombres réels, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, que M et N sont des expressions à valeurs réelles positives et que x est une variable réelle.

Exercices

7.24 Évaluez les logarithmes suivants à l'aide de la règle de changement de base en faisant intervenir les bases e et 10 seulement. Vérifiez ensuite votre réponse à l'aide de votre calculatrice.

(a) $\log_2(18)$ (b) $\log_{0,5}(10)$ (c) $\log_{16}(32)$

7.25 On s'intéresse à l'équation exponentielle $\dfrac{2^{3-2x}}{3} = 25$.

(a) Résolvez l'équation l'aide du logarithme en base 2.
(b) Résolvez l'équation à l'aide du logarithme en base e.
(c) Réconciliez vos deux réponses, c'est-à-dire précisez quelle propriété permet de passer d'une expression logarithmique à l'autre.

7.26 Selon The World Factbook de la CIA [i] sur l'Inde, la population de l'Inde comptait en juillet 2015 environ 1,25 milliard d'habitants et sa croissance démographique se situait autour de 1,22 %. La fonction exponentielle $P(t) = 1250e^{0,012126t}$ fournit un modèle simple pour décrire la population de l'Inde, en millions de personnes, t années après 2015.

(a) Vérifiez que le modèle reflète bien les données de la CIA en 2015, c'est-à-dire que la population donnée par le modèle est bien de 1,25 milliard et que la croissance d'une année à l'autre est bien de 1,22 %.
(b) En juillet 2015, la Chine [ii] comptait environ 1,367 milliard d'habitants et avait une croissance démographique d'environ 0,45 %. Déterminez un modèle, semblable à celui de l'Inde, qui donne une estimation de la population, t années après 2015.
(c) Selon ces modèles de population, en quelle année la population de l'Inde dépassera-t-elle celle de la Chine ?

7.27 Résolvez les équations suivantes graphiquement, c'est-à-dire tracez les graphes des deux membres d'une équation dans une même fenêtre graphique et trouvez leurs intersections. Vérifiez ensuite vos réponses en substituant les valeurs des abscisses trouvées directement dans l'équation.

Consigne. Donnez une approximation décimale arrondie à la 5e décimale.

(a) $1.5^{x+1} = 5$ (c) $e^{1/x} = 12 - x$
(b) $\ln(5x-2) = 3$ (d) $\ln(x) + \ln(x+1) = 10 - 0{,}1x$

7.28 Résolvez les équations exponentielles suivantes algébriquement. Utilisez ensuite votre calculatrice pour en obtenir une approximation décimale arrondie à la 4e décimale.

(a) $e^x = 8{,}2$ (c) $e^{1-2x} = 651$ (e) $5^{\sqrt{x+1}} = 415$ (g) $0{,}2^{5-3x} = 4e^{x+2}$
(b) $3e^{4x} = 17$ (d) $7^{3x+2} = 215$ (f) $3^{3x+2} = \dfrac{1}{10^{3x-2}}$ (h) $9^{x-16} = e^{10}$

i. https ://www.cia.gov/library/publications/resources/the-world-factbook/geos/in.html
ii. https ://www.cia.gov/library/publications/resources/the-world-factbook/geos/ch.html

7.29 Soit la fonction exponentielle $f(x) = 2e^{3x+1} - 5$.

(a) Trouvez $f^{-1}(x)$. Résolvez d'abord à la main et ensuite en utilisant le solveur de la calculatrice. Réconciliez les deux réponses en montrant qu'elles sont équivalentes. À quoi correspond la contrainte indiquée dans la solution obtenue à l'aide de la calculatrice ?

(b) Quel est le domaine et quelle est l'image de la fonction $f(x) = 2e^{3x+1} - 5$? *Aide : trouvez son image à l'aide de l'information pouvant être obtenue de sa réciproque.*

(c) À l'aide d'une table de valeurs, émettez une conjecture sur la valeur de la limite $\lim_{x \to -\infty} (2e^{3x+1} - 5)$.
Comment peut-on interpréter cette quantité sur le graphique de $f(x)$? sur celui de $f^{-1}(x)$?

7.30 Le courant électrique i (en ampères, A) dans un circuit ayant une résistance R (en ohm, Ω) une inductance L (en henry, H) et une source de E (en volts, V) est donné par

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

où t est le temps, mesuré en secondes. Trouvez t lorsque $i = 0{,}75$ A, $E = 6$ V, $R = 4{,}5\ \Omega$ et $L = 2{,}5$ H. *Suggestion : résolvez d'abord l'équation pour t. Évaluez l'expression obtenue ensuite.*

7.31 Un modèle théorique simple pour décrire la température T (en °C) du corps d'une personne retrouvée morte est

$$T(t) = 21 + 10{,}9(0{,}9485)^t$$

où t est mesuré en heures depuis midi, l'heure à laquelle on a découvert le corps.

(a) Sachant que la température du corps d'une personne en santé est environ 37°C, vers quelle heure la personne est-elle décédée ? *On suppose, quand elle est décédée, que la personne était en santé.*

(b) Quelle est la variation moyenne de la température du corps entre le moment de son décès et celui où on l'a découvert ?

(c) Quelle est la température ambiante de l'endroit où le corps a été découvert ?

(d) Déterminez la réciproque de la fonction $T(t)$, calculez ensuite $T^{-1}(30)$. Quelles sont les unités de $T^{-1}(30)$?

7.32 Résolvez chacune des équations logarithmiques suivantes après avoir déterminé son domaine.

(a) $3\ln(x) = -2$

(b) $\log_2(x) + \log_2(7) = \log_2(21)$

(c) $2\ln(5 - x) = 1$

(d) $\log(x) + \log(x + 15) = 2$

(e) $\log_4(5x - 6) = \frac{1}{2}\log_4(16)$

(f) $\log_3(36) + 3\log_3(x) = 2\log_3(3x)$

(g) $9\log_8(2x - 5) - 3 = 0$

(h) $\log(6x + 4) - \log(2x - 1) = 1$

(i) $\log(x - 2) + \log(x + 1) = 1$

(j) $2\log_2(x + 1) = 2 + \log_2(2 - x)$

(k) $\ln(x - 1) - \ln(x + 2) = \ln(x)$

7.33 L'échelle de Richter sert à quantifier la puissance d'un tremblement de terre. Elle fut instaurée en 1935 par Charles Francis Richter et Beno Gutenberg de Caltech. L'échelle de Richter fournit la magnitude M d'un séisme en fonction de l'énergie libérée à l'épicentre. C'est une échelle logarithmique et elle est donnée par

$$M(E) = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right)$$

où E est l'énergie libérée (en joules).

(a) Quelle est la magnitude d'un séisme qui libère 10^9 joules d'énergie ?

(b) Complétez le tableau suivant en calculant l'énergie qui a été libérée lors des différents tremblements de Terre.

Pays et lieu	Année	Magnitude	énergie libérée (J)
Japon, Sendai	2011	8,9	
Haïti, port au Prince	2010	7,2	
Indonésie, Sumatra	2004	9	
Chili, Vladivia	1960	9,5	
Japon, Tokyo	1923	8,3	

(c) Déterminez $M^{-1}(8{,}9)$. Que représente cette valeur ?

(d) Le 26 décembre 2004, l'île de Sumatra en Indonésie a connu un des plus grands séismes jamais enregistrés avec une magnitude $M = 9$. Montrez que ce séisme a libéré environ 250 000 fois plus d'énergie que celui de Rivière-du-Loup du 6 mars 2005 dont la magnitude a été évaluée à 5,4.

(e) Selon certains, la magnitude du tremblement de Terre en Indonésie était plutôt de l'ordre de 9,3 sur l'échelle de Richter. Selon notre modèle, il aurait alors libéré combien de fois plus d'énergie que s'il avait été de magnitude 9 ?

7.34 La relation d'Ehrenberg

$$\ln m = 1{,}84h + \ln 2{,}5$$

est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

(a) Évaluez la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1,3 m.

(b) Exprimez m comme une fonction de h qui ne fait pas intervenir de logarithme. *Assurez-vous que votre réponse est cohérente avec ce que vous avez obtenu en* (a).

(c) En moyenne, de combien change la masse des enfants lorsque leur taille passe de 1,3 à 1,4 mètre ? Comment peut-on interpréter cette valeur sur le graphe de $m(h)$?

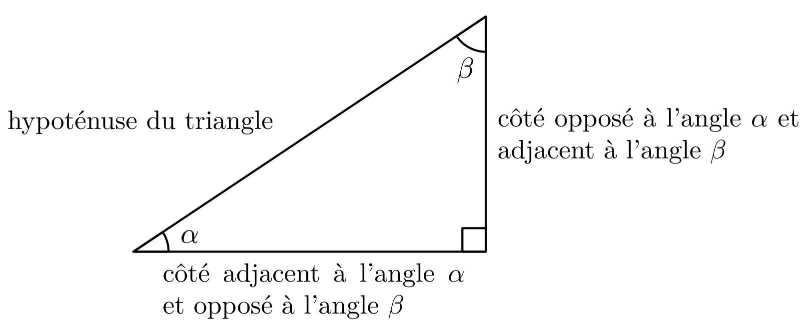
Chapitre 8

Les fonctions trigonométriques

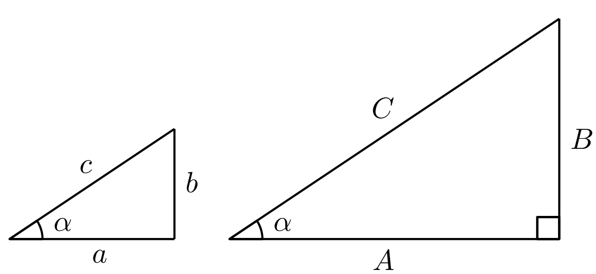
La trigonométrie (du grec trígonos, triangulaire, et métron, mesure) est une branche des mathématiques qui traite des relations entre les longueurs et les angles dans un triangle.

8.1 Les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle

On désigne les côtés d'un triangle rectangle en fonction de leur position par rapport aux angles. L'**hypoténuse** est le côté qui fait face à l'angle droit. Le **côté opposé** à un angle aigu est le côté qui lui fait face alors que le **côté adjacent** à cet angle est celui qui forme l'angle avec l'hypothénuse.



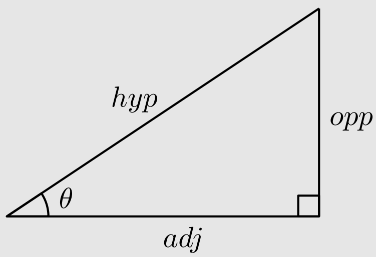
Depuis plus de 2000 ans, on sait que dans le plan, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et que deux triangles semblables ont des côtés correspondants proportionnels.



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

Ces propriétés des triangles semblables font en sorte que les rapports trigonométriques suivants ne dépendent que de l'angle et non du triangle rectangle dans lequel il est plongé.

Définition 8.1 Les rapports trigonométriques
Si on désigne par *hyp* la longueur de l'hypoténuse, par *opp* la longueur du coté opposé à l'angle θ et par *adj* la longueur du côté adjacent à l'angle θ, alors les six rapports trigonométriques sont donnés par les rapports suivants.



$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp} \qquad \cot(\theta) = \frac{adj}{opp} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

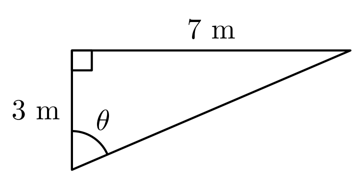
$$\cos(\theta) = \frac{adj}{hyp} \qquad \sec(\theta) = \frac{hyp}{adj} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{opp}{adj} \qquad \csc(\theta) = \frac{hyp}{opp} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Attention ! Les abréviations utilisées pour désigner les rapports trigonométriques de la tangente, de la cotangente et de la cosécante ne sont pas les mêmes en français qu'en anglais. En français, on note ces rapports par tg, cotg et cosec alors qu'en anglais on utilise tan, cot et csc. À des fins pratiques, l'auteure a priorisé la notation anglaise, que l'on retrouve dans la plupart des logiciels de calcul symbolique.

Exemple 8.1

Évaluez les six rapports trigonométriques de l'angle θ ci-dessous.



Solution :

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit et, par Pythagore, on trouve que sa longueur est

$$\sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}62 \text{ m}.$$

Le côté opposé à l'angle θ est de 7 m et son côté adjacent est de 3 m. Ainsi,

$$\sin(\theta) = \frac{7\ \cancel{\text{m}}}{\sqrt{58}\ \cancel{\text{m}}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \approx 0{,}919 \qquad \cos(\theta) = \frac{3\ \cancel{\text{m}}}{\sqrt{58}\ \cancel{\text{m}}} = \frac{3\sqrt{58}}{58} \approx 0{,}394$$

$$\tan(\theta) = \frac{7\ \cancel{\text{m}}}{3\ \cancel{\text{m}}} \approx 2{,}333 \qquad \cot(\theta) = \frac{3\ \cancel{\text{m}}}{7\ \cancel{\text{m}}} \approx 0{,}429$$

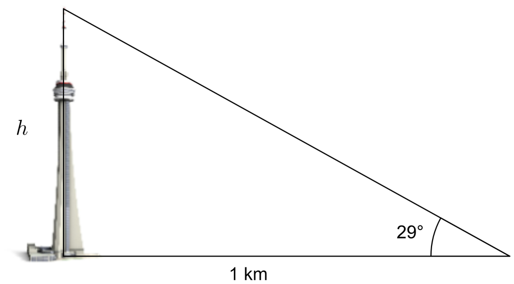
$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{58}\ \cancel{\text{m}}}{3\ \cancel{\text{m}}} \approx 2{,}539 \qquad \csc(\theta) = \frac{\sqrt{58}\ \cancel{\text{m}}}{7\ \cancel{\text{m}}} \approx 1{,}088$$

Attention ! Comme les unités se simplifient, on remarque que les rapports trigonométriques donnent des nombres réels sans unités.

On s'intéressera plus particulièrement au sinus, cosinus et à la tangente puisque les trois derniers rapports trigonométriques peuvent être obtenus facilement comme les inverses (sous la multiplication) des trois premiers.

Exemple 8.2

Lorsqu'on observe la tour du CN d'une distance de un kilomètre, l'angle d'élévation mesuré à partir du sol est de 29°. Déterminez, au mètre près, la hauteur de la tour.



Solution :

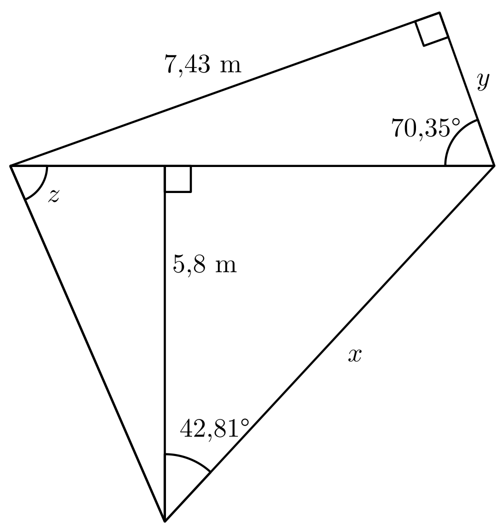
Puisqu'on cherche la longueur du côté opposé à l'angle de 29°, tout en connaissant la longueur de son côté adjacent, on utilise la tangente.

$$\tan(29°) = \frac{h\text{ km}}{1\text{ km}}$$

Ainsi, la hauteur cherchée est de h km $= \tan(29°) \cdot 1$ km $\approx 0{,}554$ km. La hauteur de la tour est donc d'environ 554 m.

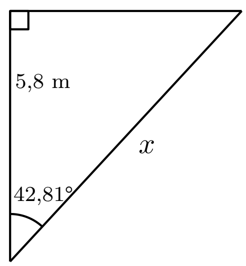
Exemple 8.3

Déterminez les valeurs des inconnues x, y et z.



Solution :

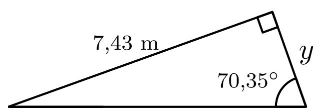
On a toute l'information nécessaire pour déterminer la valeur x.



On cherche la longueur de l'hypoténuse, connaissant la longueur du côté adjacent à l'angle 42,81°. On utilise donc le cosinus.

$$\cos(42{,}81°) = \frac{5{,}8}{x} \iff x = \frac{5{,}8}{\cos(42{,}81°)} \approx 7{,}91 \text{ m}$$

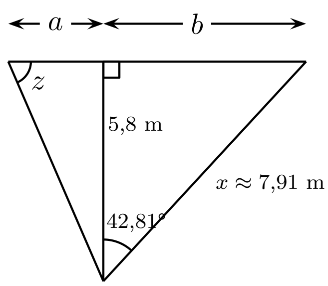
On peut aussi trouver y.



Avec un angle aigu et les deux côtés de l'angle droit, on utilise la tangente.

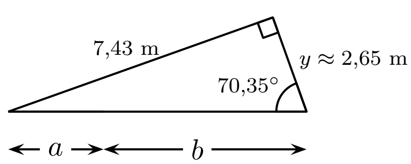
$$\tan(70{,}35°) = \frac{7{,}43}{y} \iff y = \frac{7{,}43}{\tan(70{,}35°)} \approx 2{,}65 \text{ m}$$

Pour trouver z, on utilise d'abord les deux triangles inférieurs et ensuite le triangle supérieur.



Posons a, la longueur du côté adjacent à l'angle z et b, la longueur du côté opposé à l'angle 42,81°. On utilise la tangente pour trouver b.

$$\tan(42{,}81°) = \frac{b}{5{,}8} \iff b = 5{,}8\tan(42{,}81°) \approx 5{,}37 \text{ m}$$

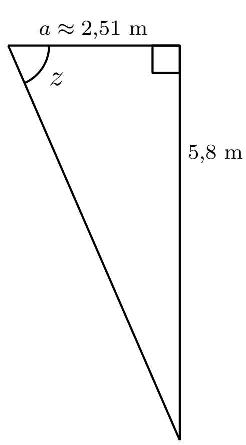


Pour trouver a, on doit déterminer la longueur totale de l'hypoténuse $a+b$ et lui soustraire la valeur $b \approx 5{,}37$ m.

$$\cos(70{,}35°) = \frac{y}{a+b} \iff a+b = \frac{y}{\cos(70{,}35°)} \approx \frac{2{,}65}{0{,}336} \approx 7{,}88 \text{ m}$$

Ainsi, $a \approx 7{,}88 - 5{,}37 \approx 2{,}51$ m.

On peut maintenant trouver la valeur z.



Puisqu'on connaît les longueurs des côtés adjacent et opposé à z,

$$\tan(z) \approx \frac{5{,}8}{2{,}51} \approx 2{,}31.$$

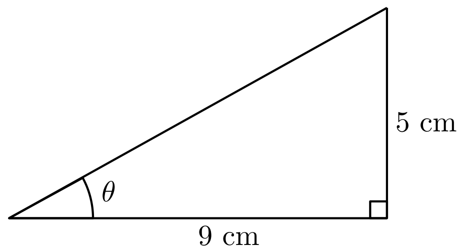
Pour trouver l'angle z dont la tangente est environ 2,31, on utilise la réciproque de la fonction tangente.

$$z = \tan^{-1}(2{,}31) \approx 66{,}5°$$

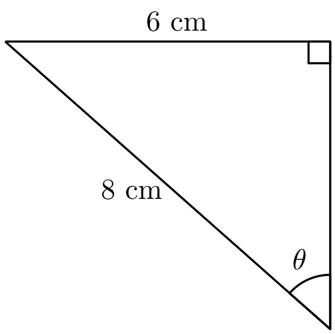
Les fonctions réciproques seront vues en détail à la section 8.5.

Exercices

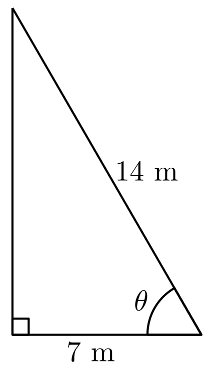
8.1 Déterminez la longueur de l'hypoténuse du triangle ci-dessous et évaluez les six rapports trigonométriques de l'angle θ illustré. *Vous n'avez pas à déterminer cet angle,seulement à trouver les rapports trigonométriques qui s'y rapportent.*



8.2 Évaluez les trois rapports trigonométriques $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$ de l'angle θ illustré.



(a)

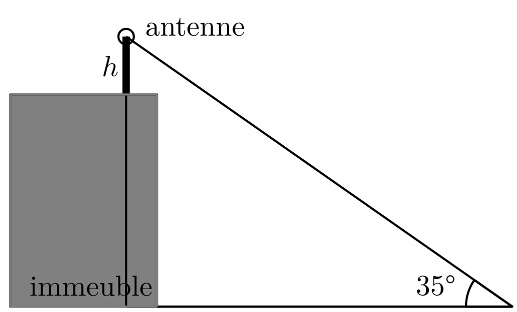


(b)

8.3 Montrez que les égalités suivantes sont bien fausses en calculant les valeurs impliquées à l'aide d'une calculatrice.

(a) $\sin(60°) \neq 2 \cdot \sin(30°)$ (b) $\dfrac{\tan(60°)}{\tan(30°)} \neq \tan(2°)$ (c) $\sin^2(5°) \neq \sin(25°)$

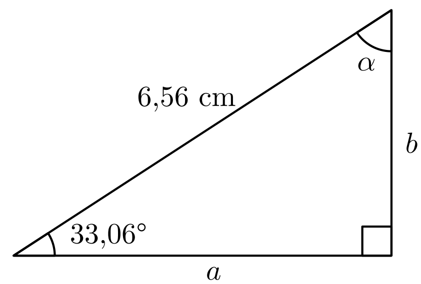
8.4 Une antenne est située sur le toit d'un immeuble de 55 m de hauteur. Un observateur situé à 92 m du pied de l'immeuble mesure un angle de 35° entre la base de l'immeuble et le haut de l'antenne. Sachant que l'antenne est située à 8 m du bord de l'immeuble, déterminez la hauteur h de l'antenne.



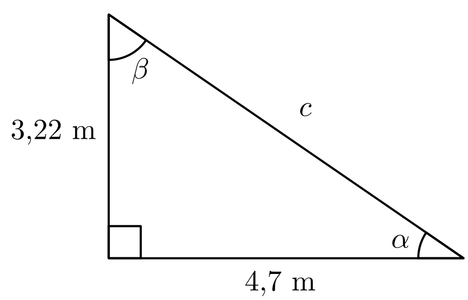
8.5 Le plus haut pylône d'Hydro Québec, qui s'élève de 175 m, traverse le fleuve Saint-Laurent près de la centrale Tracy. À quelle distance doit-on l'observer afin que l'angle d'élévation mesuré à partir du sol soit de 30° ?

8.6 Résolvez le triangle suivant pour a, b et α.

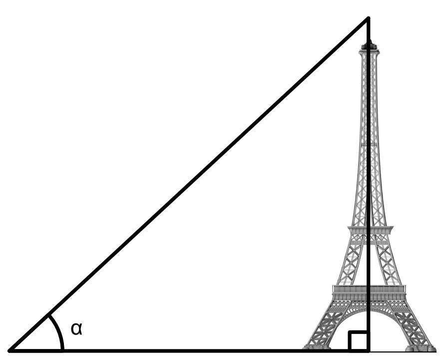
> **Attention !** Résoudre un triangle consiste à déterminer toutes les longueurs des côtés et mesures d'angles à partir des longueurs et des mesures connues.



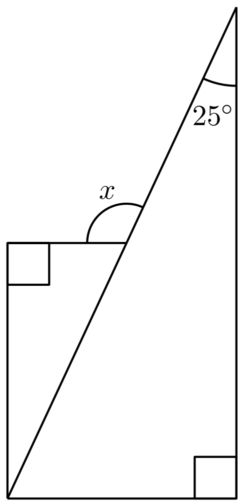
8.7 Résolvez le triangle suivant pour c, α et β.



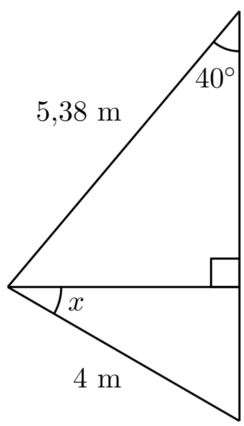
8.8 En voyage à Paris, vous observez la tour Eiffel à une distance de 350 m. La tour Eiffel a une hauteur de 324 m. Quel est l'angle d'élévation α de la tour si on le mesure à partir du sol ?



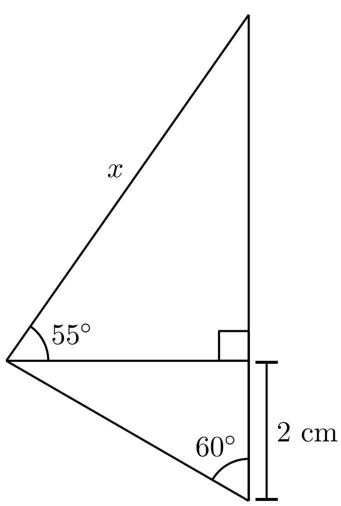
8.9 Déterminez la valeur inconnue x.



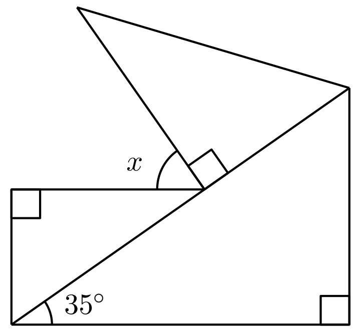
(a)



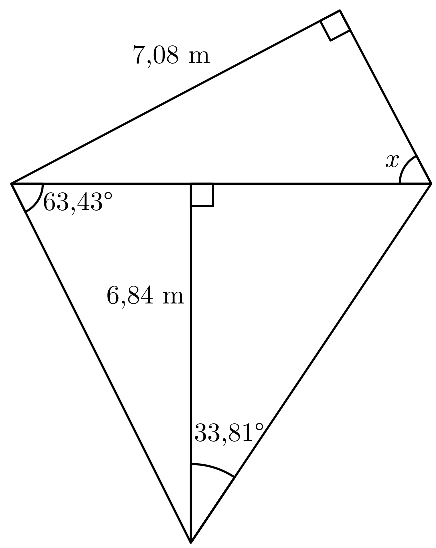
(b)



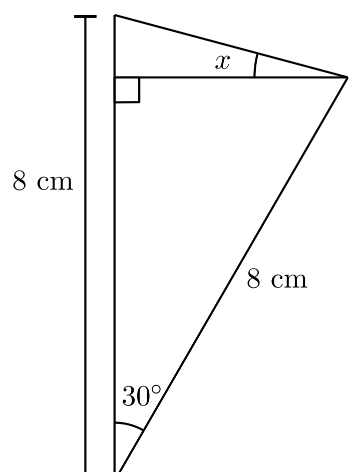
(c)



(d)

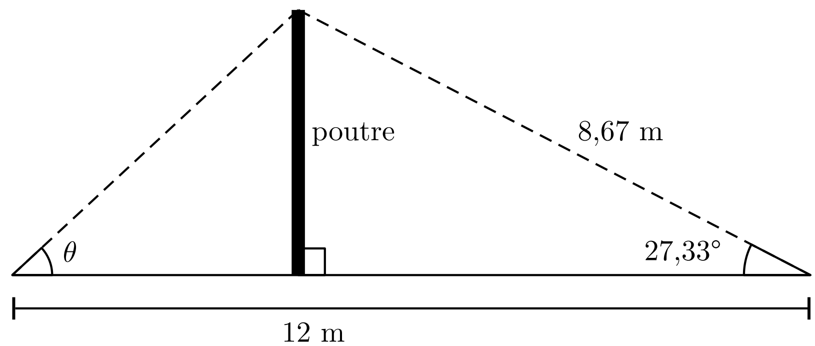


(e)

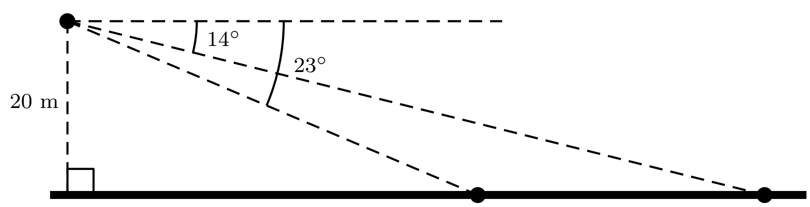


(f)

8.10 On attache des câbles qui serviront de haubans selon le croquis suivant. Déterminez la valeur de l'angle θ.

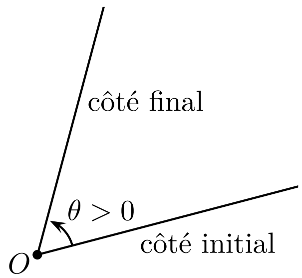


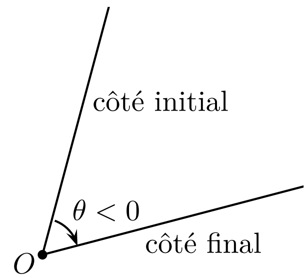
8.11 Un arpenteur géomètre aperçoit deux points directement devant lui. Ces deux points sont à une distance de 20 m en dessous du point d'observation. Quelle est la distance qui sépare les deux points si les angles de dépression sont respectivement 14° et 23° ?



8.2 Les unités de mesure d'angles

Un angle est caractérisé par deux demi-droites de même sommet O. Afin de déterminer la mesure de cet angle, il est pratique de considérer qu'une des demi-droites est engendrée par la rotation de l'autre autour du sommet O. La mesure de l'angle est représenté par un nombre positif si la rotation s'effectue dans le sens antihoraire et par un nombre négatif si la rotation s'effectue dans le sens horaire.





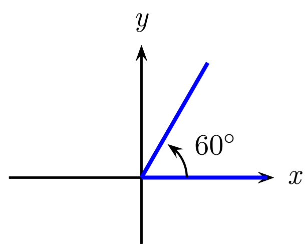
Dans un système de coordonnées rectangulaires, un angle est dit en **position standard** si son sommet est situé à l'origine et son côté initial est placé le long de l'axe horizontal.

Exemple 8.4

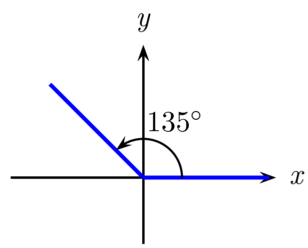
Représentez chacun des angles suivants en position standard dans le plan cartésien.

(a) $60°$ (b) $135°$ (c) $-240°$

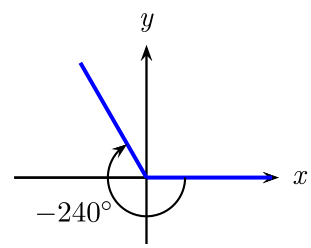
Solution :



(a)



(b)

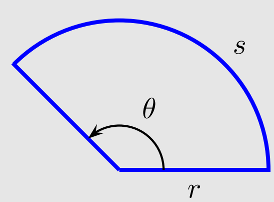


(c)

Les unités de mesure d'angles les plus couramment utilisées sont les degrés et les radians.

Définition 8.2 La mesure d'un angle en **radians** est définie comme le rapport entre la longueur de l'arc du cercle (notée s) et la longueur du rayon de ce cercle (notée r), où chacune de ces longueurs est exprimée dans la même unité. Par conséquent, lorsqu'on divise s par r pour obtenir la mesure en radians de l'angle, les unités des deux longueurs se simplifient et on se retrouve avec une mesure qui n'a pas d'unités.

$$\theta = \frac{s}{r}$$



Exemple 8.5

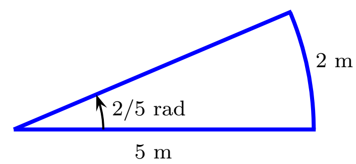
Déterminez la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon r qui intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur s donnée. Illustrez.

(a) $r = 5$ m et $s = 2$ m (b) $r = 12$ m et $s = 12$ m (c) $r = 5$ cm et $s = 22$ cm

Solution :

(a) Selon la définition, la mesure de l'angle en radians est

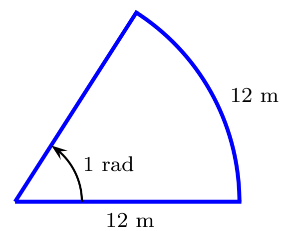
$$\frac{s}{r} = \frac{2\ \cancel{\text{m}}}{5\ \cancel{\text{m}}} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \text{ rad.}$$



Puisque les mètres se simplifient, rad nous rappelle simplement qu'il s'agit d'un angle.

(b) La mesure de l'angle en radians est

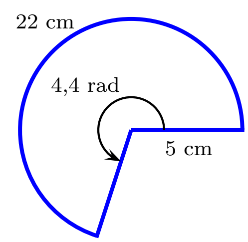
$$\frac{s}{r} = \frac{12\ \cancel{\text{m}}}{12\ \cancel{\text{m}}} = 1 \text{ rad.}$$



Lorsque la longueur de l'arc est égale à celle du rayon, l'angle au centre est

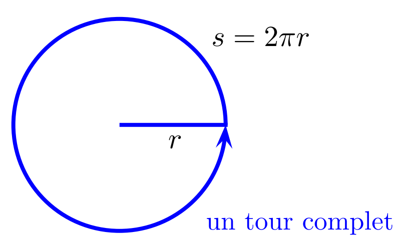
$$\theta = \frac{s}{r} \text{ rad} = \frac{r}{r} \text{ rad} = 1 \text{ rad.}$$

(c) $\dfrac{s}{r} = \dfrac{22\ \cancel{\text{cm}}}{5\ \cancel{\text{cm}}} = 4{,}4$ rad



Lorsque la longueur de l'arc s correspond à la circonférence d'un cercle de rayon r, $s = 2\pi r$ et l'angle correspondant est de 360° ou 2π rad.

$$360° = \frac{2\pi r}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi \text{ rad}$$



On en déduit qu'il y a $\frac{180}{\pi}°$ ≈ 57° dans un radian.

$$2\pi \text{ rad} = 360° \iff 1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \iff 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°$$

Et, qu'il y a $\frac{\pi}{180}$ rad ≈ 0,1745 rad dans 1°.

$$360° = 2\pi \text{ rad} \iff 1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \iff 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}1745 \text{ rad}$$

Exemple 8.6

Exprimez en radians chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la quatrième décimale.

(a) $45°$ (b) $270°$ (c) $-60°$ (d) $52°$

Solution :

On utilise l'égalité $\boxed{1° = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad}}$ pour traduire les mesures d'angles de degrés à radians.

(a) $45° = 45 \cdot 1° = 45 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{45\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{4}$ rad $\approx 0{,}7854$ rad
(b) $270° = 270 \cdot 1° = 270 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{270\pi}{180}$ rad $= \frac{3\pi}{2}$ rad $\approx 4{,}7124$ rad
(c) $-60° = -60 \cdot 1° = -60 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= -\frac{60\pi}{180}$ rad $= -\frac{\pi}{3}$ rad $\approx -1{,}0472$ rad
(d) $52° = 52 \cdot 1° = 52 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{52\pi}{180}$ rad $= \frac{13\pi}{45}$ rad $\approx 0{,}9076$ rad

Exemple 8.7

Exprimez en degrés chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront parfois en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la deuxième décimale.

(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{3\pi}{4}$ (c) -3π (d) 3

Solution :

On utilise l'égalité $\boxed{1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}}$ pour traduire les mesures d'angles de radians à degrés.

(a) $\frac{5\pi}{6}$ rad $= \frac{5\pi}{6} \cdot 1$ rad $= \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} = 150°$
(b) $-\frac{3\pi}{4}$ rad $= -\frac{3\pi}{4} \cdot 1$ rad $= -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -135°$
(c) -3π rad $= -3\pi \cdot 1$ rad $= -3\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = -540°$
(d) 3 rad $= 3 \cdot 1$ rad $= 3 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{540°}{\pi} \approx 171{,}89°$

La figure 8.1 de la page 121, montre des angles très utilisés en trigonométrie qu'on appelle les angles remarquables. Ils sont représentés en position standard et sont donnés à la fois en degrés et en radians.

Pourquoi utiliser les radians lorsqu'on connaît les degrés ?
Lorsqu'on connaît le rayon d'un mouvement circulaire, la définition du radian permet de traduire la mesure d'un angle en une longueur :

$$\theta = \frac{s}{r} \Longleftrightarrow s = r\theta$$

Exemple 8.8

Un satellite de communication est à 35 920 km en altitude et demeure au-dessus d'un point de l'équateur. Si le rayon de la Terre est environ 6 371 km, quelle est la vitesse du satellite ?

Solution :

Pour que le satellite demeure au-dessus du même point de l'équateur, il doit faire le tour de la Terre une fois par 24 heures (en plus de rester à la même altitude). Puisqu'il y a 2π rad dans un tour et que le rayon du cercle décrivant le mouvement du satellite est $6\,371 + 35\,920 = 42\,291$ km, le satellite parcourt

$$2\pi \text{ rad} \cdot (6\,371 + 35\,920) \text{ km} = 2\pi \text{ rad} \cdot 42\,291 \text{ km} \approx 265\,722 \text{ km}.$$

La vitesse du satellite est alors $\frac{265\,722 \text{ km}}{24 \text{ h}} \approx 11\,071{,}8$ km/h.

Une approche générale

La vitesse moyenne d'un objet est donnée par $v = s/t$ où s est la distance parcourue et t est le temps de parcours. Lorsqu'un objet a un mouvement circulaire, la distance parcourue correspond à la longueur de l'arc du cercle tracé par le déplacement. Ainsi, en divisant les deux membres de l'équation $s = r\theta$ par t on obtient

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = \frac{\theta}{t} \cdot r,$$

où $\frac{\theta}{t}$ est la *vitesse angulaire*. On la désigne habituellement par ω.

Puisque $\omega = \frac{\theta}{t}$,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = \frac{\theta}{t} \cdot r \iff v = \omega r.$$

La vitesse linéaire est donc obtenue en effectuant le produit de la vitesse angulaire avec le rayon du mouvement.

Dans cet exemple, puisqu'il y a 2π rad dans chacun des tours, la vitesse angulaire du satellite est

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}} \approx 0{,}2618 \text{ rad/h},$$

et sa vitesse linéaire est

$$0{,}2618 \text{ rad/h} \cdot 42\,291 \text{ km} \approx 11\,071{,}8 \text{ km/h}.$$

Exemple 8.9

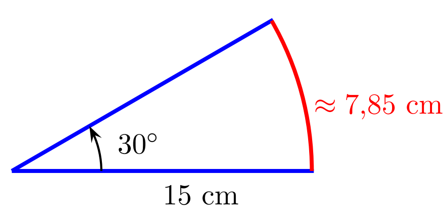
Déterminez la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle de rayon donné par chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes et ensuite, arrondies à la deuxième décimale. Illustrez en dessinant l'arc correspondant à la mesure de l'angle.

(a) Rayon = 15 cm et $\theta = 30°$

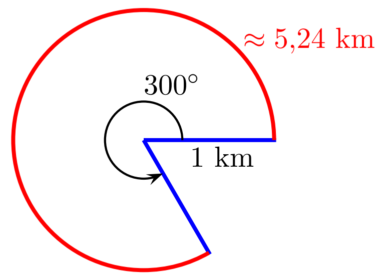
(b) Rayon = 1 km et $\theta = 300°$

Solution :

(a) $30° = \frac{\pi}{6}$ rad, la longueur de l'arc est donc $s = r \cdot \theta = (15 \text{ cm}) \cdot (\frac{\pi}{6} \text{ rad}) = \frac{5\pi}{2}$ cm $\approx 7{,}85$ cm.



(b) $300° = \frac{5\pi}{3}$ rad, la longueur de l'arc est donc $s = r \cdot \theta = (1 \text{ km}) \cdot (\frac{5\pi}{3} \text{ rad}) \approx 5{,}24$ km.



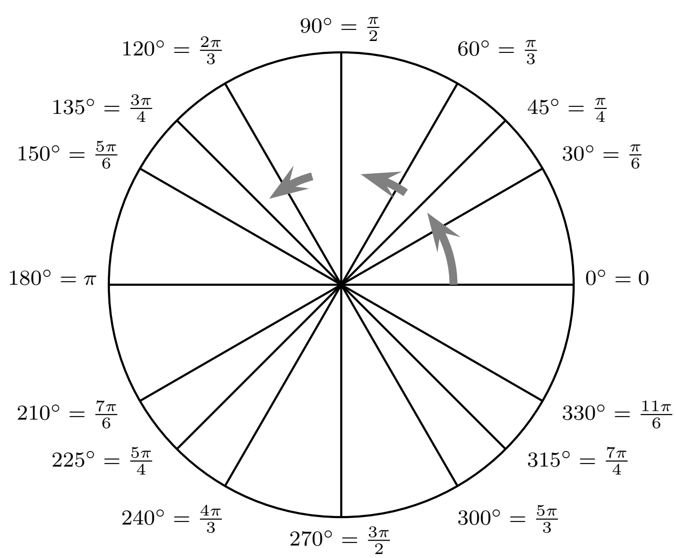


FIGURE 8.1 – Angles remarquables

Exercices

8.12 Représentez chacun des angles suivants en position standard dans le plan cartésien.

(a) 45° (b) 210° (c) 390° (d) −170°

8.13 Trouvez un angle entre 0° et 360° dont le côté final est identique à celui de l'angle donné. *On suppose que tous les angles sont en position standard.*

(a) 390° (b) −225° (c) 480° (d) −60°

8.14 Déterminez la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon r qui intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur s donnée. Illustrez.

(a) $r = 15$ cm et $s = 45$ cm
(b) $r = 5$ m et $s = 30$ m
(c) $r = 8$ mm et $s = 12$ mm
(d) $r = 1$ km et $s = 300$ m

8.15 Exprimez en radians chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la quatrième décimale.

(a) $30°$ (b) $120°$ (c) $180°$ (d) $-225°$ (e) $15°$ (f) $-98°$

8.16 Exprimez en degrés chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes (que vous trouvez sans calculatrice et qui seront parfois en termes de π) et ensuite, des valeurs arrondies (à l'aide d'une calculatrice) à la deuxième décimale.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{11\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{5}$ (e) 10 (f) $-5{,}2$

8.17 Déterminez la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle de rayon donné par chacun des angles suivants. Donnez des valeurs exactes et ensuite, arrondies à la deuxième décimale. Illustrez en dessinant l'arc correspondant à la mesure de l'angle.

(a) Rayon $= 5$ m et $\theta = 135°$
(b) Rayon $= 8$ mm et $\theta = 240°$

8.18 Lorsqu'un pneu de vélo de 650 mm de diamètre extérieur tourne de $120°$ autour de son centre, le vélo avance de quelle distance ?

8.19 Une section de voie ferrée circulaire doit tourner de $15°$ sur une distance de 10 km. Quel est le rayon de la voie ?

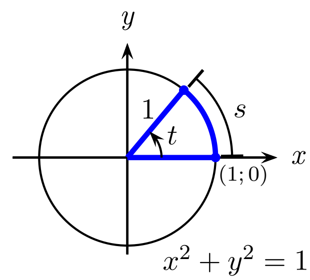
8.20 Les pales d'une éolienne mesurent 28 m et tournent à une vitesse de 2 tours/min.

(a) Quelle est la vitesse linéaire d'un point situé à l'extrémité d'une des pales ?
(b) Quelle est la vitesse linéaire d'un point situé à 10 m du centre du système de pales ?
(c) Calculez le rapport entre les vitesses trouvées en (a) et en (b). Pouvez-vous généraliser ce résultat ?

8.3 Le cercle trigonométrique

Afin de généraliser les rapports trigonométriques vus au début du chapitre, on utilise le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré à l'origine dans le plan cartésien. Ce cercle ainsi qu'un angle t en position standard sont illustrés ci-dessous.

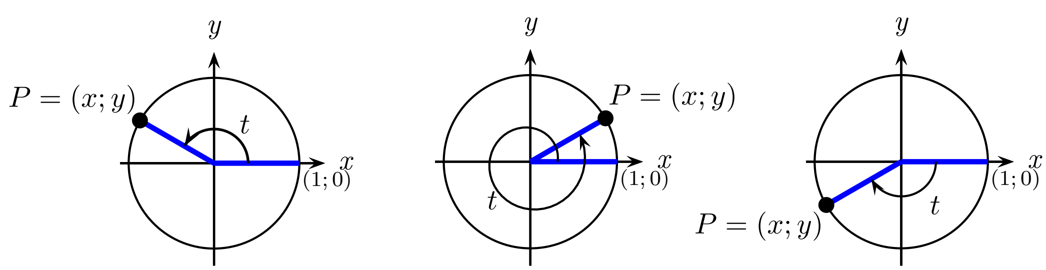


Dans le cercle trigonométrique, la mesure de l'angle en radians est égale à la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle. En effet, on peut utiliser la formule $s = r \cdot \theta$ vue à la section précédente pour s'en convaincre. En posant $\theta = t$, on trouve

$$s = r \cdot t = 1 \cdot t = t.$$

La longueur de l'arc sur le cercle trigonométrique et la mesure de l'angle en radians sont donc représentés par le même nombre réel.

À un angle t correspond un unique point $P(t) = (x; y)$ sur le cercle tel que $x^2 + y^2 = 1$.



En particulier, les points trigonométriques remarquables illustrés à la figure 8.2, sont les points associés aux angles remarquables de la figure 8.1.

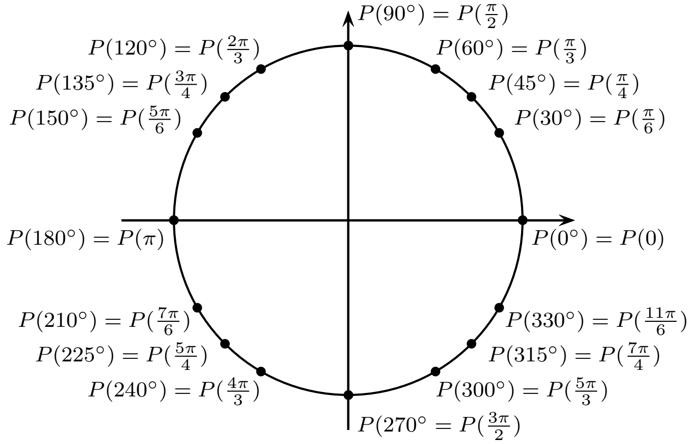


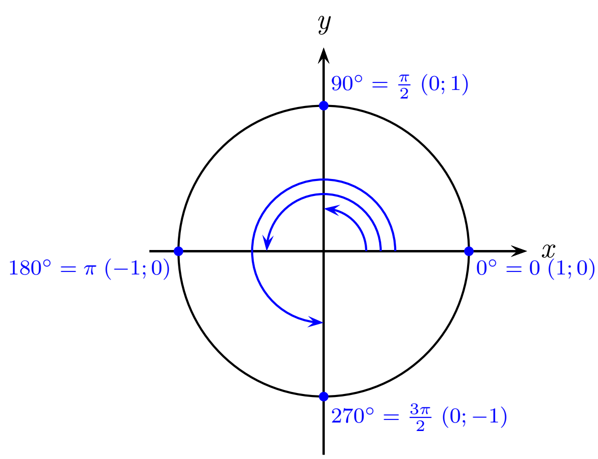
FIGURE 8.2 – Points remarquables sur le cercle trigonométrique

Exemple 8.10

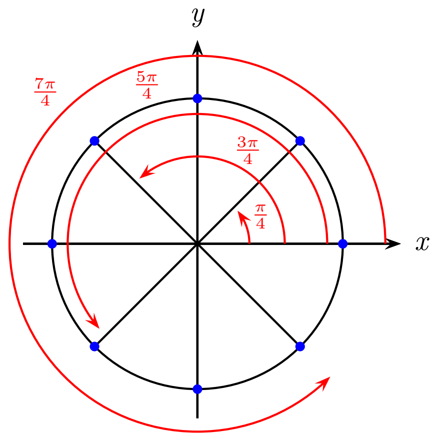
Déterminez les coordonnées de tous les points trigonométriques remarquables.

Solution :

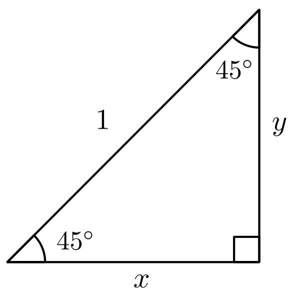
Le cercle trigonométrique est divisé en 8 arcs de même longueur qui correspondent aux angles remarquables $0° = 0$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $135° = \frac{3\pi}{4}$, $180° = \pi$, $225° = \frac{5\pi}{4}$, $270° = \frac{3\pi}{2}$ et $315° = \frac{7\pi}{4}$. Se rappelant que le cercle trigonométrique est centré en $(0; 0)$ et est de rayon 1, on trouve facilement les coordonnées des points aux intersections avec les axes.



Pour trouver les coordonnées des points correspondants aux autres multiples de $45° = \frac{\pi}{4}$,

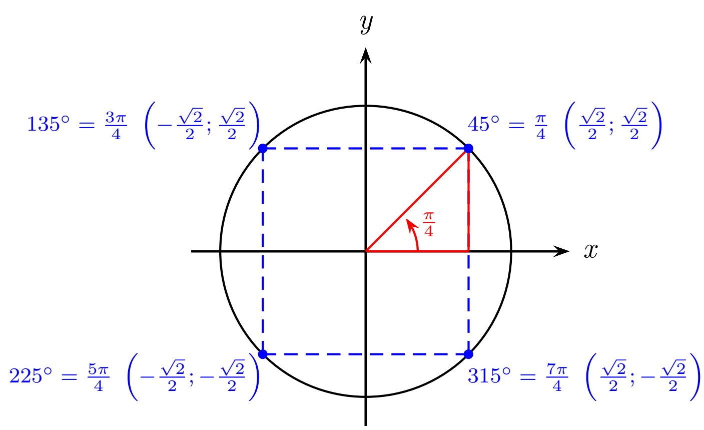


on considère le triangle isocèle dont l'hypoténuse est de longueur 1.



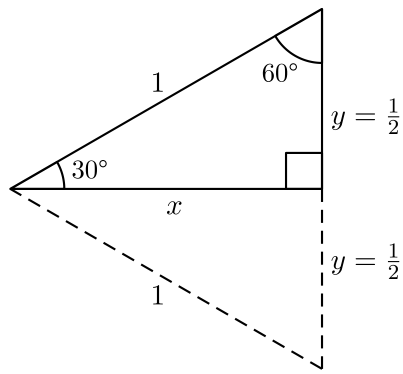
$$\begin{array}{rcll} x^2+y^2 & = & 1 & \text{par Pythagore} \\ x^2+x^2 & = & 1 & \text{on substitue } y=x \\ 2x^2 & = & 1 & \text{on réduit} \\ x & = & \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{on résout pour } x\text{, sachant que } x>0 \\ x & = & \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{on rationalise le dénominateur,} \\ & & & \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

Par symétries, on en déduit les coordonnées des points $P(45°) = P\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $P(135°) = P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $P(225°) = P\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ et $P(315°) = P\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ illustrés ci-dessous.



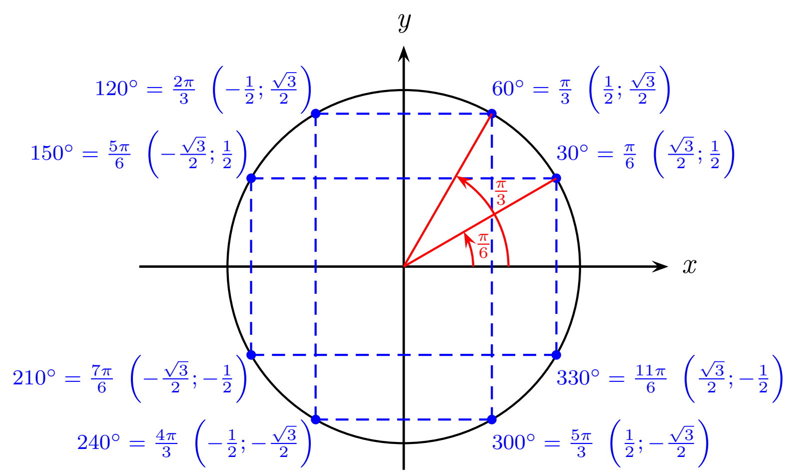
Le cercle trigonométrique est aussi divisé en 12 arcs de même longueur qui correspondent aux angles remarquables 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ et 2π. Les coordonnées manquantes se déduisent de $P(30°) = P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $P(60°) = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Pour déterminer les coordonnées des points $P(30°) = P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $P(60°) = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on considère le triangle équilatéral suivant.



$$
\begin{aligned}
x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 && \text{on utilise le théorème de Pythagore} \\
x^2 + \frac{1}{4} &= 1 && \text{on évalue le carré} \\
x^2 &= \frac{3}{4} && \text{on isole } x^2 \\
x &= \sqrt{\frac{3}{4}} && \text{on résout pour } x\text{, sachant que } x > 0 \\
x &= \frac{\sqrt{3}}{2} && \text{on applique le radical sur la fraction}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $P(30°) = P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $P(60°) = P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par symétries, on obtient les coordonnées des autres points.



Toutes les coordonnées correspondantes aux angles remarquables sont regroupées à la figure 8.3.

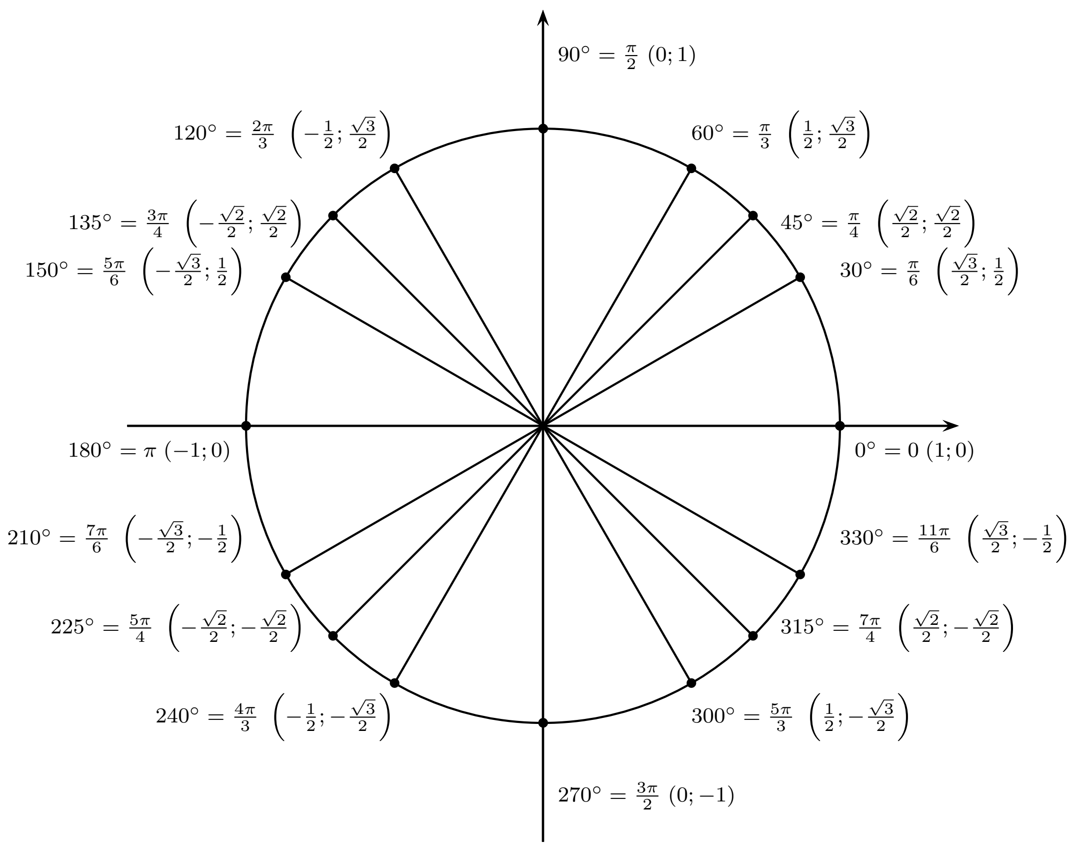


FIGURE 8.3 – Le cercle trigonométrique

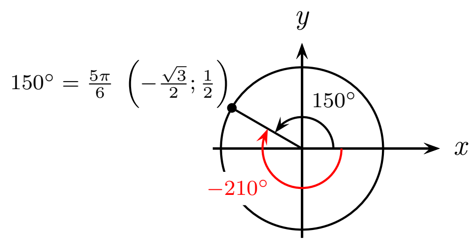
Exemple 8.11

Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les coordonnées du point P aux valeurs d'angles données.

(a) $t = -210°$ (b) $t = -\frac{\pi}{3}$ (c) $t = \frac{11\pi}{4}$

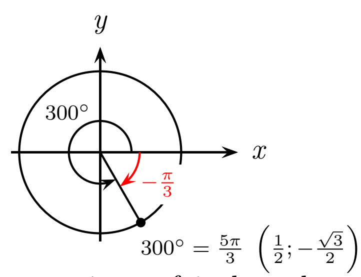
Solution :

(a) Étant négatif, $-210°$ signifie que la rotation s'effectue dans le sens horaire. Il s'agit d'un angle dont le côté final est identique à celui de l'angle remarquable $150°$. Les coordonnées du point sont donc $P(-210°) = P(150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

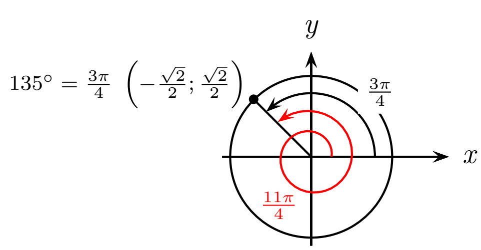


Attention ! Les coordonnées des points sont identiques $P(-210°) = P(150°)$, mais les angles ne le sont pas, $-210° \neq 150°$.

(b) L'angle étant négatif, $t = -\frac{\pi}{3} = -60°$, la rotation se fait dans le sens horaire. Il s'agit d'un angle dont le côté final est identique à celui de l'angle remarquable $\frac{5\pi}{3} = 300°$. Les coordonnées du point sont donc $P\left(-\frac{\pi}{3}\right) = P(-60°) = P(300°) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



(c) L'angle est positif, $t = \frac{11\pi}{4} = 495°$, la rotation se fait donc dans le sens antihoraire. Il s'agit d'un angle dont le côté final est identique à celui de l'angle remarquable $\frac{3\pi}{4} = 135°$. Les coordonnées du point sont donc $P(\frac{11\pi}{4}) = P(495°) = P(135°) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



À un angle t correspond un unique point $P(t) = (x; y)$ sur le cercle trigonométrique, mais un point du cercle trigonométrique peut correspondre à un nombre infini d'angles différents.

Exemple 8.12

Trouvez quatre valeurs d'angle $t \in \mathbb{R}$ dont le côté final passe par le point donné.

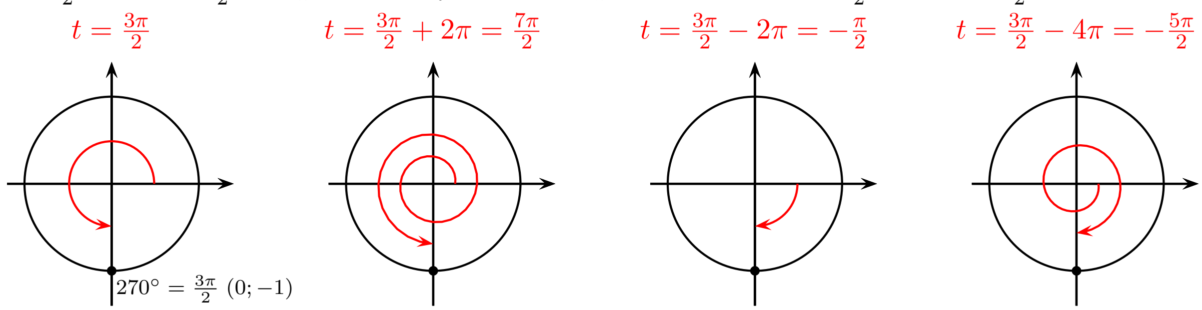
(a) $P(t) = (0; -1)$

(b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

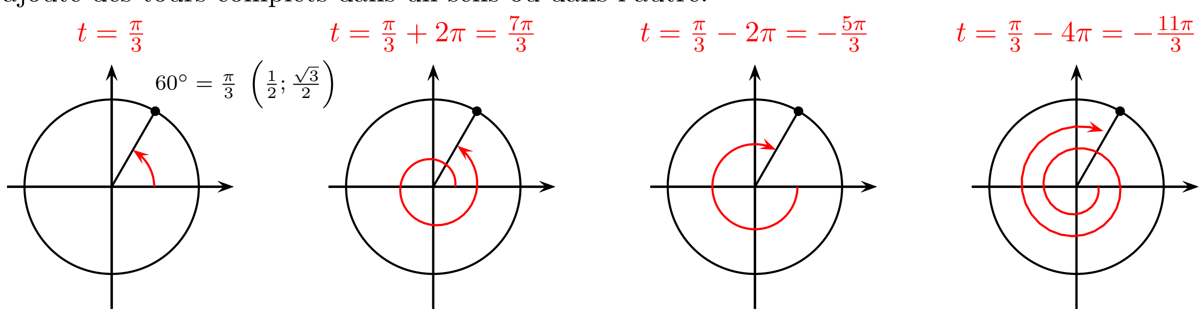
Solution :

Il y a nombre infini d'angles qui ont le même côté final.

(a) Directement du cercle trigonométrique, on trouve $t = \frac{3\pi}{2}$. Pour obtenir d'autres angles, on peut ajouter une rotation d'un tour complet dans un sens $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2}$, ou dans l'autre $t = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$. On peut aussi y soustraire plus d'un tour, $t = \frac{3\pi}{2} - 4\pi = -\frac{5\pi}{2}$.



(b) On trouve d'abord $t = \frac{\pi}{3}$ à partir du cercle trigonométrique. Pour obtenir d'autres angles, on ajoute des tours complets dans un sens ou dans l'autre.



Quatre des angles possibles sont donc $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{7\pi}{3}$, $t = -\frac{5\pi}{3}$ et $t = -\frac{11\pi}{3}$.

Comme on vient de le voir, à un angle t correspond un unique point $P(t) = (x; y)$ sur le cercle trigonométrique, mais à un point du cercle trigonométrique peut correspondre un nombre infini d'angles différents. Il suffit de parcourir le cercle en faisant un certain nombre de tours complets dans un sens ou dans l'autre à partir du point P. On utilise alors la notation

$$P(t) = P(t + k \cdot 2\pi) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Dans cette notation, $k \in \mathbb{Z}$ est un compteur de tours, c'est-à-dire que le côté final de l'angle fait un tour complet dans le sens antihoraire lorsque k est positif, et horaire lorsque k est négatif. C'est d'ailleurs pour cette raison que les fonctions trigonométriques, que l'on verra à la prochaine section, sont aussi appelées des *fonctions circulaires*.

Exercices

8.21 Déterminez la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence du cercle trigonométrique par chacun des angles suivants.

(a) $\theta = 30°$ (b) $\theta = 300°$ (c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (d) $\theta = 4$

8.22 Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle remarquable t, déterminez les coordonnées du point P aux valeurs d'angles données.

(a) $t = \frac{\pi}{3}$ (c) $t = \frac{7\pi}{4}$ (e) $t = -\frac{5\pi}{4}$
(b) $t = 270°$ (d) $t = \pi$ (f) $t = -510°$

8.23 Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle remarquable t, déterminez la valeur $t \in [0; 2\pi]$ satisfaisant l'énoncé.

Attention ! Lorsqu'on stipule $t \in [0; 2\pi]$, l'angle attendu est en radians.

(a) $P(t) = (1; 0)$ (c) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (e) $P(t) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (d) $P(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ (f) $P(t) = (0; 1)$

8.24 Sachant que $P(t)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle remarquable t, déterminez la valeur $t \in [-2\pi; 0]$ satisfaisant l'énoncé.

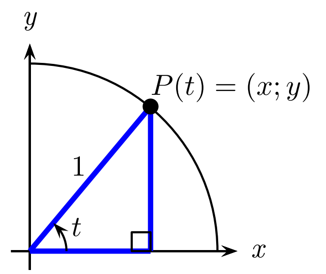
(a) $P(t) = (-1; 0)$ (c) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (e) $P(t) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $P(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (d) $P(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ (f) $P(t) = (0; -1)$

8.25 Trouvez quatre valeurs d'angle $t \in \mathbb{R}$ dont le côté final passe par le point donné.

(a) $P(t) = (0; -1)$ (b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $P(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$

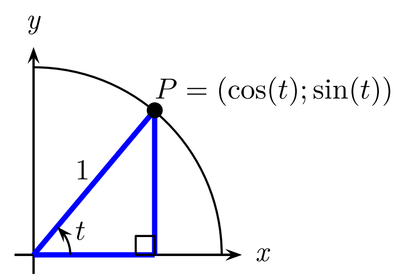
8.4 Les fonctions trigonométriques

Dans le cas où un angle t est aigu, on peut déterminer les coordonnées du point $P(t)$ sur le cercle trigonométrique à l'aide des rapports dans les triangles rectangles.



$$\cos(t) = \frac{adj}{hyp} = \frac{x}{1} = x$$
$$\sin(t) = \frac{opp}{hyp} = \frac{y}{1} = y$$

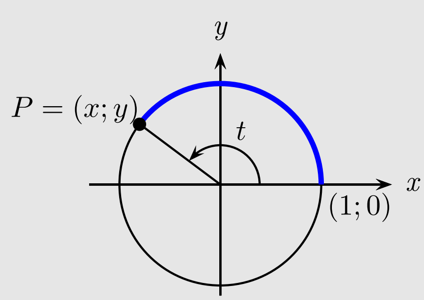
L'abscisse du point P est alors donnée par $\cos(t)$ et l'ordonnée par $\sin(t)$.



Les six rapports trigonométriques peuvent maintenant être interprétés en fonction des coordonnées du point correspondant sur le cercle trigonométrique, généralisant ainsi les rapports dans un triangle rectangle vus au début du chapitre.

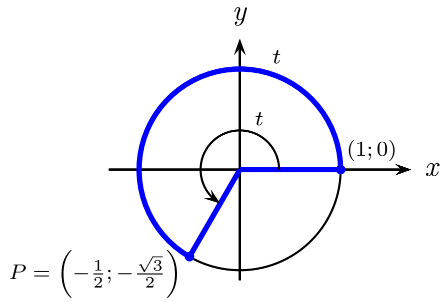
Définition 8.3 Si t est un nombre réel et $P(t) = (x; y)$ est un point sur le cercle trigonométrique correspondant à l'angle t, alors

$$\sin(t) = y \qquad \csc(t) = \frac{1}{y},\ \text{si } y \neq 0$$
$$\cos(t) = x \qquad \sec(t) = \frac{1}{x},\ \text{si } x \neq 0$$
$$\tan(t) = \frac{y}{x},\ \text{si } x \neq 0 \qquad \cot(t) = \frac{x}{y},\ \text{si } y \neq 0$$



Exemple 8.13

Sachant que $P = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t déterminez les valeurs des six fonctions trigonométriques sans trouver l'angle t.



Solution :
L'abscisse de P correspond à $\cos(t)$ et son ordonnée à $\sin(t)$. On détermine la valeur des autres fonctions à l'aide de ces coordonnées.

$$\sin(t)=y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc(t)=\frac{1}{y}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(t)=x=-\frac{1}{2} \qquad \sec(t)=\frac{1}{x}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

$$\tan(t)=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \qquad \cot(t)=\frac{x}{y}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exemple 8.14
À l'aide du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (c) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Solution :

(a) Le sinus d'un angle $t\in\mathbb{R}$ est l'ordonnée du point correspondant, $P(t)$, sur le cercle trigonométrique. Puisque $P\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Le cosinus d'un angle est l'abscisse du point correspondant, $P(t)$, sur le cercle trigonométrique. Puisque $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

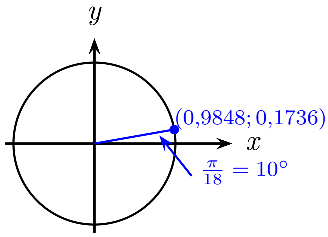
(c) Puisque $\tan(t)=\dfrac{y}{x}$ et $P\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alors

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}.$$

Exemple 8.15
Sachant que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\approx 0{,}1736$ et $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)\approx 0{,}9848$, à l'aide du cercle trigonométrique et des arguments de symétrie, déterminez les valeurs suivantes.

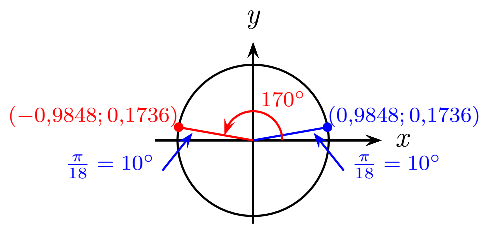
(a) $\sin(170°)$ (b) $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ (c) $\cos(-80°)$ (d) $\tan\left(\frac{5\pi}{9}\right)$

Solution :
Pour mieux s'y retrouver, on place l'information donnée dans le cercle trigonométrique et on convertit l'angle $\frac{\pi}{18}$ en degrés.

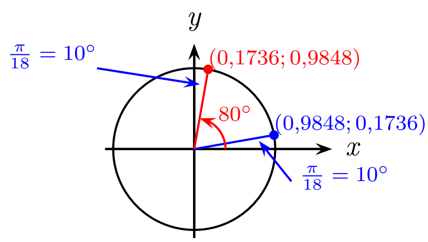


$$\frac{\pi}{18} \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 10°$$

(a) Puisque $170° = 180° - 10°$, $\sin(170°) \approx 0{,}1736$.

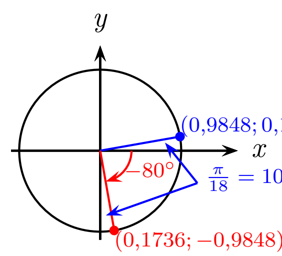


(b) On a $\frac{4\pi}{9}$ rad $= \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 80°$.

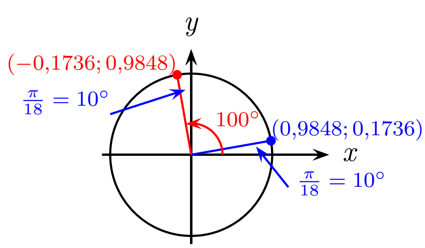


Puisque les coordonnées cherchées sont inversées par rapport à celles du point donné, $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \sin(80°) \approx 0{,}9848$.

(c) On a $\cos(-80°) \approx 0{,}1736$.



(d) On a $\frac{5\pi}{9}$ rad $= \frac{5\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 100°$ et donc $\tan\left(\frac{5\pi}{9}\right) = \tan(100°) \approx \frac{0{,}9848}{-0{,}1736} \approx -5{,}6728$.

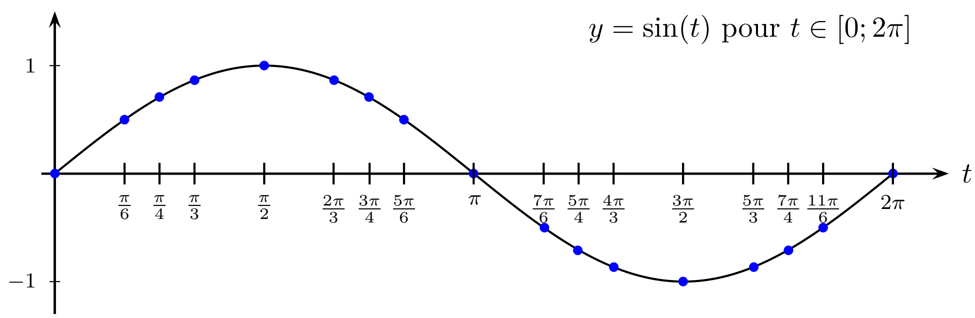


Le graphe de la fonction sinus

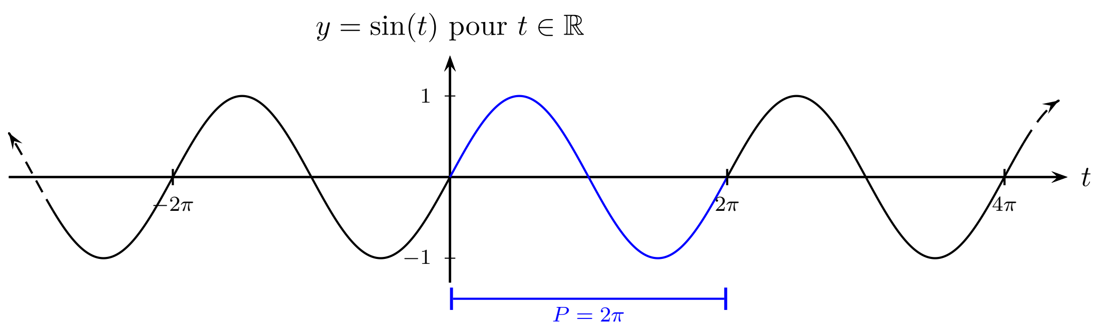
On trace le graphe de la fonction sinus, $y = \sin(t)$, à l'aide des couples $(t; y) = (t; \sin(t))$ évalués aux angles remarquables d'un tour complet du cercle trigonométrique pour $t \in [0; 2\pi]$. On place ensuite les couples obtenus dans le plan cartésien et on relie les points par une courbe lisse.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Attention ! L'ordonnée y du graphe de la fonction sinus est donnée par l'ordonnée du point correspondant à l'angle t du cercle trigonométrique.



Puisque les valeurs du sinus se répètent à chaque tour complet du cercle trigonométrique, que ce soit dans le sens horaire ou antihoraire, on complète le graphe de $\sin(t)$ en répétant la portion de la courbe obtenue pour $t \in [0; 2\pi]$ sur l'ensemble des réels.



Le graphe ci-dessus illustre les propriétés de la fonction sinus :

— $\mathrm{Dom}(\sin(t)) = \mathbb{R}$,
— $\mathrm{Im}(\sin(t)) = [-1; 1]$,
— sa période est $P = 2\pi$,
— la courbe $y = \sin(t)$ est lisse et continue,
— la valeur minimale de $\sin(t)$ est -1 et sa valeur maximale est 1,
— ses zéros sont les multiples entiers de π, c'est-à-dire $t = k \cdot \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

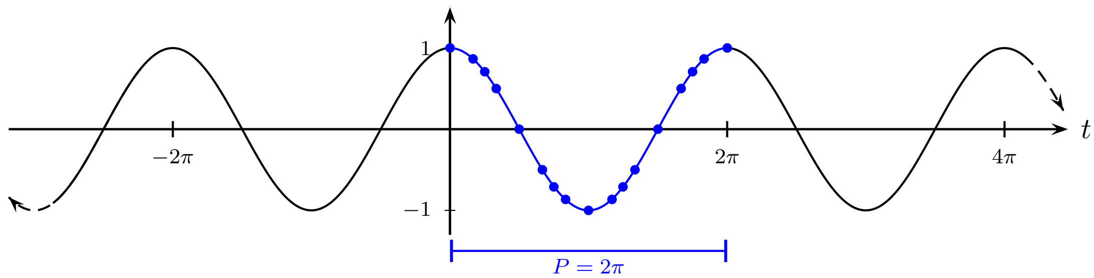
Le graphe de la fonction cosinus

Par une démarche similaire à celle utilisée pour le graphe de la fonction sinus, on trace la courbe $y = \cos(t)$ à l'aide des points $(t; y) = (t; \cos(t))$ pour $t \in [0; 2\pi]$. On complète ensuite le graphe en répétant cette portion de courbe sur l'ensemble des réels.

Attention ! L'ordonnée y du graphe de la fonction cosinus ci-dessous est donnée par l'abscisse, c'est-à-dire le x, du point correspondant à l'angle t sur le cercle trigonométrique.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$y = \cos(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$



Le graphe ci-dessus illustre les propriétés de la fonction cosinus :

— $\mathrm{Dom}(\cos(t)) = \mathbb{R}$,
— $\mathrm{Im}(\cos(t)) = [-1; 1]$,
— sa période est $P = 2\pi$,
— la courbe $y = \cos(t)$ est lisse et continue,
— comme la fonction sinus, la valeur minimale de $\cos(t)$ est -1 et sa valeur maximale est 1,
— ses zéros sont les abscisses des points obtenus en effectuant un certain nombre k de demi-tours qu'on ajoute à l'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Le graphe de la fonction tangente

À la différence des fonctions sinus et cosinus, le graphe de la fonction tangente possède des asymptotes verticales. En effet, puisque

$$\tan(t) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)},$$

la fonction $\tan(t)$ n'est pas définie aux valeurs t pour lesquelles $\cos(t) = 0$. Son domaine est donc

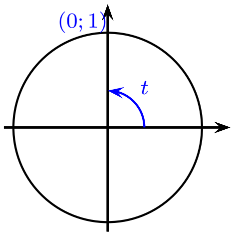
$$\mathrm{Dom}(\tan(t)) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'asymptotes verticales en $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on s'assure que la fonction croît ou décroît sans borne lorsque t tend vers une de ces valeurs.

Lorsque la valeur t est de plus en plus proche de $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079632\ldots$ la valeur de la tangente croît sans borne. On peut s'en convaincre à l'aide d'une table de valeurs,

t	1,57	1,5701	1,5705	1,5707	1,570795	$\to$	$\frac{\pi}{2}^-$
$\tan(t)$	1255,77	1436,11	3374,65	10381,33	753696,99	$\to$	∞

ou à l'aide d'un argument à partir du cercle trigonométrique.



Lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$ par la gauche (par des angles plus petits que $\frac{\pi}{2}$), son sinus tend vers 1 et son cosinus tend vers 0 par des valeurs plus grandes que 0. Ainsi,

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

De la même façon, on peut montrer que lorsque la valeur t est de plus en plus proche de $-\frac{\pi}{2} = -1{,}57079632\ldots$, la tangente décroît sans borne.

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty$$

On trace le graphe de la fonction $y = \tan(t)$ en plaçant d'abord les asymptotes verticales, qui donnent des repères, et les couples $(t; \tan(t))$ évalués aux angles remarquables d'un tour complet du cercle trigonométrique, $t \in [0; 2\pi]$.

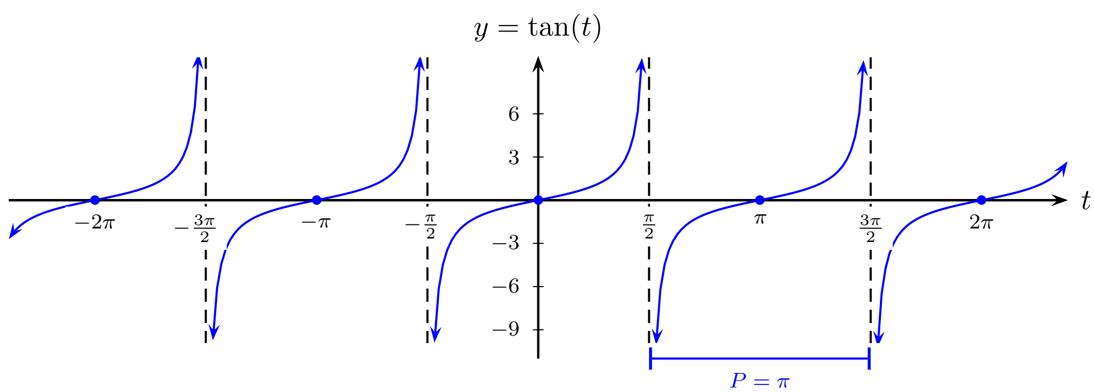
Attention ! Contrairement au sinus et au cosinus, la tangente n'est pas explicitement obtenue du cercle trigonométrique. On doit calculer les rapports entre les ordonnées et les abscisses, $\tan(t) = \frac{y}{x}$, sur le cercle trigonométrique.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

On remarque que les zéros de la fonction $\tan(t)$ sont identiques à ceux du sinus,

$$\tan(t) = 0 \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = 0 \iff \sin(t) = 0,$$

et que sa période est π, et non 2π comme pour les fonctions $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

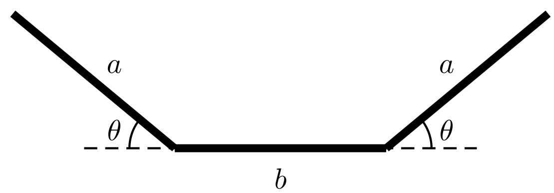


Le graphe ci-dessus illustre les propriétés de la fonction tangente.

- $\mathrm{Dom}(\tan(t)) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\mathrm{Im}(\tan(t)) = \mathbb{R}$,
- sa période est $P = \pi$,
- la courbe $y = \tan(t)$ est lisse,
- la fonction n'a pas de valeur minimale, ni maximale,
- ses zéros sont les multiples entiers de π, $t \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 8.16

En repliant d'un angle θ chaque côté d'une longue feuille de métal, on obtient une gouttière. Une coupe transversale est illustrée ci-dessous.



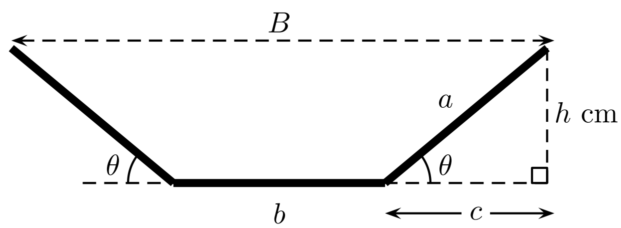
(a) Si la feuille mesure 21 cm en largeur et qu'on la replie au tiers, trouvez une expression qui calcule l'aire A de la section transversale comme une fonction de l'angle θ.

(b) Quel angle maximise l'aire de la section transversale ?

Solution :

(a) On veut calculer l'aire d'un trapèze où B est la longueur de sa plus grande parallèle, b sa plus petite et h est sa hauteur.

> **Attention !** Afin de bien suivre les étapes de construction de l'expression cherchée, on travaille avec les noms associés aux longueurs. On remplacera les valeurs par la suite.



À l'aide du triangle de référence dont l'hypoténuse est de longueur a et dont les côtés sont de longueur c et h, on a

$$\sin(\theta) = \frac{h}{a} \Longleftrightarrow h = a\sin(\theta) \text{ et } \cos(\theta) = \frac{c}{a} \Longleftrightarrow c = a\cos(\theta).$$

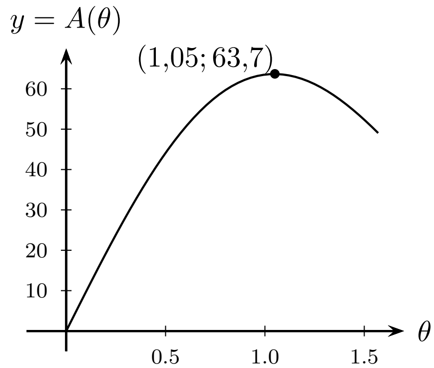
Ainsi, $B = b + 2c = b + 2 \cdot a\cos(\theta)$. L'aire du trapèze est donc

$$\begin{aligned}
\frac{(B+b)\cdot h}{2} &= \frac{(b + 2\cdot a\cos(\theta) + b)\cdot a\sin(\theta)}{2} && \text{on remplace les expressions pour } B \text{ et } h \\
&= \frac{(2b + 2a\cos(\theta))\cdot a\sin(\theta)}{2} && \text{on regroupe les termes semblables} \\
&= \frac{2(b + a\cos(\theta))\cdot a\sin(\theta)}{2} && \text{on met en évidence 2} \\
&= a(b + a\cos(\theta))\sin(\theta) && \text{on simplifie le facteur 2}
\end{aligned}$$

Puisque la feuille est repliée au tiers, $a = b = 7$ cm et

$$A(\theta) = 7(7 + 7\cos(\theta))\sin(\theta) = 49(1 + \cos(\theta))\sin(\theta).$$

(b) Le graphe de la fonction $A(\theta)$ tracée pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, dont l'ordonnée est ajustée à cet intervalle, révèle que l'aire maximale est d'environ 63,7 cm^2 lorsque l'angle est d'environ 1,05 rad $\approx$ 60,16°.



Attention ! À l'aide du calcul différentiel on peut montrer que l'angle qui maximise l'aire est exactement $\frac{\pi}{3} = 1{,}047... = 60°$.

Exercices

8.26 Sachant que $P = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les valeurs des fonctions trigonométriques sans trouver l'angle.

(a) $\sin(t)$ (b) $\cos(t)$ (c) $\tan(t)$ (d) $\cot(t)$ (e) $\sec(t)$ (f) $\csc(t)$

8.27 Sachant que $P(t) \approx (-0{,}7533; -0{,}6374)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les valeurs des fonctions trigonométriques sans trouver l'angle.

(a) $\sin(t)$ (b) $\cos(t)$ (c) $\tan(t)$ (d) $\cot(t)$ (e) $\sec(t)$ (f) $\csc(t)$

8.28 À l'aide du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ (c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ (e) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ (f) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (g) $\cos(0)$ (h) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (i) $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)$ (j) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

8.29 À l'aide du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ (c) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (e) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (f) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (g) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ (h) $\sin(2\pi)$ (i) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (j) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ (k) $\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ (l) $\cos(-10\pi)$

8.30 Sachant que $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx -0{,}3090$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx 0{,}9511$, à l'aide du cercle trigonométrique et des arguments de symétrie, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos(18°)$ (b) $\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)$ (c) $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (d) $\sin(72°)$ (e) $\tan(-108°)$ (f) $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$

8.31 Sans calculatrice, déterminez lequel est le plus grand des deux nombres.

(a) $\sin(2°)$ ou $\cos(2°)$
(b) $\sin(1°)$ ou $\sin(2°)$
(c) $\sin(2°)$ ou $\sin(2)$
(d) $\cos(1°)$ ou $\cos(2°)$
(e) $\cos(1)$ ou $\cos(2)$
(f) $\sin(1)$ ou $\sin(3)$

8.32 À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ (b) $\csc\left(-\frac{35\pi}{2}\right)$ (c) $\sec(585°)$

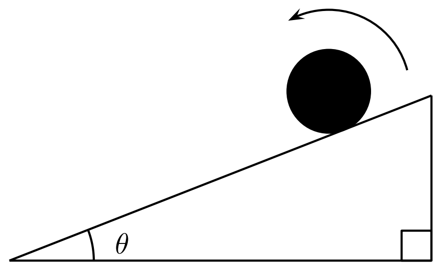
8.33 À l'aide de votre calculatrice, déterminez les valeurs suivantes. Donnez des réponses arrondies à la quatrième décimale et représentez ce à quoi correspondent ces valeurs sur une reproduction du cercle trigonométrique.

(a) $\cos(2{,}1)$ (b) $\sin(-0{,}9)$

8.34 En physique, lorsqu'on néglige la résistance de l'air, on modélise la vitesse v d'une balle qui roule le long d'un plan incliné par

$$v = \frac{5}{7}\, gt \sin(\theta),$$

où g est l'accélération gravitationnelle, t est le temps et θ est l'angle d'inclinaison de ce plan.



Pour estimer la valeur de g à partir de valeurs expérimentales on peut utiliser l'équation équivalente

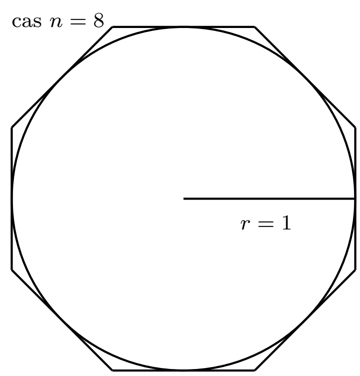
$$g = \frac{7v}{5t\sin(\theta)},$$

et utiliser un plan incliné pour de réduire la vitesse de la balle et ainsi, pouvoir plus facilement la mesurer.

(a) Une balle en acier roule sur un plan incliné de 7°. Après 2 secondes, la balle roule à une vitesse de 1,71 m/s. Déterminez une approximation pour la valeur de g à une décimale.

(b) Si le plan est incliné de 12°, estimez quelle sera la vitesse de la balle après 5 secondes.

8.35 Un polygone régulier à n côtés est circonscrit à un cercle de rayon 1. Le cas où $n = 8$ est illustré ci-dessous.



(a) Montrez que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est donnée par la fonction

$$A(n) = n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(b) Calculez $A(n)$ pour $n = 8$, $n = 100$, $n = 1\,000$ et $n = 10\,000$. *Gardez 6 décimales.*

(c) Émettez une conjecture quant à la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)$.

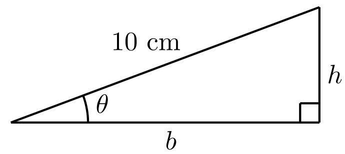
8.36 À midi Jérôme met une pompe en marche qui fait varier le volume d'eau (mesuré en litres) que contient un réservoir. Le volume d'eau contenu dans le réservoir, t heures après la mise en marche de la pompe, est donné par la fonction $V(t) = 6e^{-0,5t}\sin(1{,}7t) + 5$. Dans ce qui suit, répondez au mL près, c'est-à-dire arrondissez à la troisième décimale.

(a) Selon ce modèle, quel est le volume d'eau contenu dans le réservoir à 16 h ?

(b) Calculez $TVM_{[3;6]}$ et donnez ses unités. Que nous dit cette valeur dans le contexte ?

(c) À long terme, le volume d'eau contenu dans le réservoir se stabilise-t-il ? Si oui, vers quel volume ? Expliquez comment ceci se reflète sur le graphe de la fonction volume. Illustrez.

8.37 On considère un triangle droit de hauteur h, de base b et dont l'hypoténuse est de 10 cm. On s'intéresse à l'aire du triangle lorsque l'angle θ varie tout en conservant la même longueur d'hypoténuse.



(a) Déterminez l'aire du triangle comme une fonction de θ.

(b) Déterminez l'angle pour lequel l'aire du triangle est maximale. Que valent alors b et h ?

8.5 Les fonctions trigonométriques réciproques

Pour déterminer la valeur d'un angle lorsqu'on connaît la valeur de son sinus, de son cosinus ou de sa tangente, on fait appel à la réciproque de la fonction, c'est-à-dire à son inverse sous l'opération de composition $\circ$.

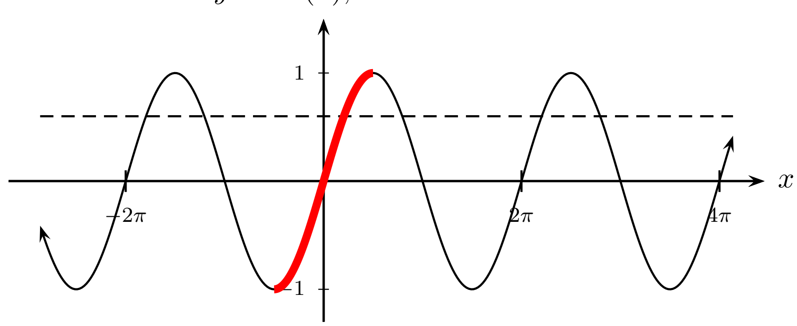
Rappel. Les caractéristiques d'une fonction réciproque

- Si toute droite horizontale intersecte le graphe d'une fonction en au plus un endroit, la fonction est inversible, autrement dit, elle possède une réciproque.
- Si $(a; b)$ est un point du graphe de la fonction f, alors $(b; a)$ est un point du graphe de sa réciproque f^{-1}. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1} est donc obtenu par la réflexion du graphe de la fonction f selon l'axe $y = x$.

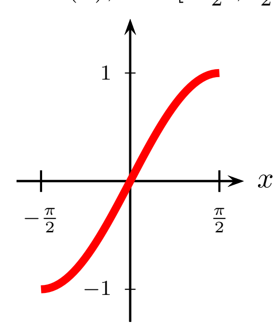
La réciproque de la fonction sinus

On constate que toute droite horizontale entre $y = -1$ et $y = 1$ intersecte le graphe du sinus une infinité de fois. Prise dans son ensemble, la fonction ne possède pas de réciproque. Toutefois, si on restreint le domaine de $\sin(x)$ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, toute droite horizontale entre $y = -1$ et $y = 1$ intersecte le graphe une seule fois.

$y = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$



$y = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$



Cette partie du graphe satisfait le test de l'horizontale et le sinus, restreint à ce domaine, possède alors une fonction réciproque.

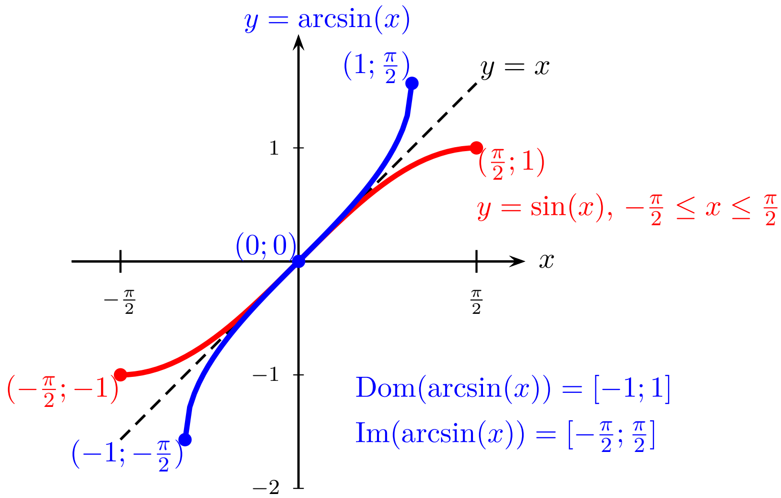
Définition 8.4 La réciproque de la fonction sinus, désignée par $\arcsin(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$, est l'inverse de la fonction $y = \sin(x)$ restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, l'équivalence

$$y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \sin(y) = x,$$

où $y \in [-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ et $x \in [-1; 1]$ signifie que $\arcsin(x)$ est **l'angle de l'intervalle** $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ **dont le sinus est** x.

La fonction arcsin retourne donc toujours une valeur d'angle dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$. On appelle cet intervalle **la branche principale du sinus**.

On obtient le graphe de la fonction $\arcsin(x)$ en reflétant, selon l'axe $y = x$, celui de $\sin(x)$ restreint à sa branche principale.



Exemple 8.17

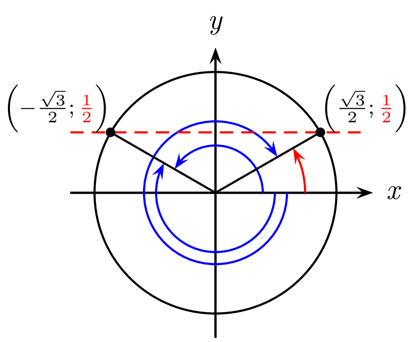
À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

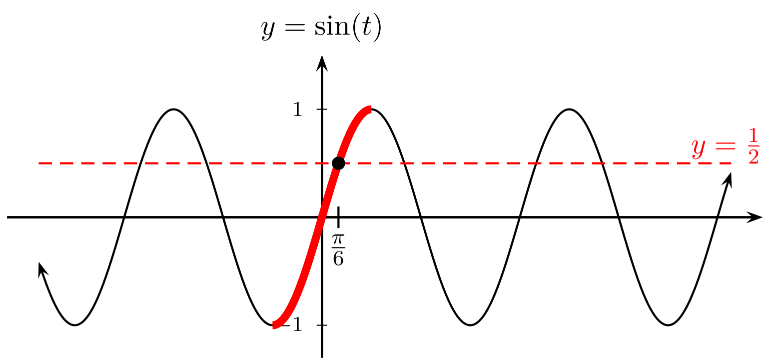
(a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solution :

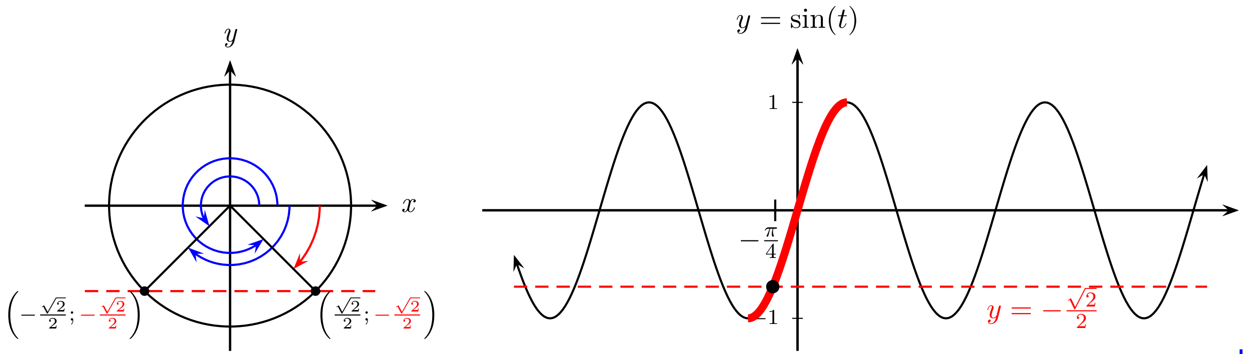
(a) On traduit d'abord $t = \arcsin(\frac{1}{2})$ sous la forme équivalente $\sin(t) = \frac{1}{2}$ où t doit être sur la branche principale du sinus, $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Parmi tous les angles dont le sinus est $\frac{1}{2}$, seul $t = \frac{\pi}{6}$ est sur la branche principale $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

> **Attention !** On utilisera t comme variable indépendante, afin d'éviter la confusion avec l'utilisation des variables x et y pour le cercle trigonométrique.



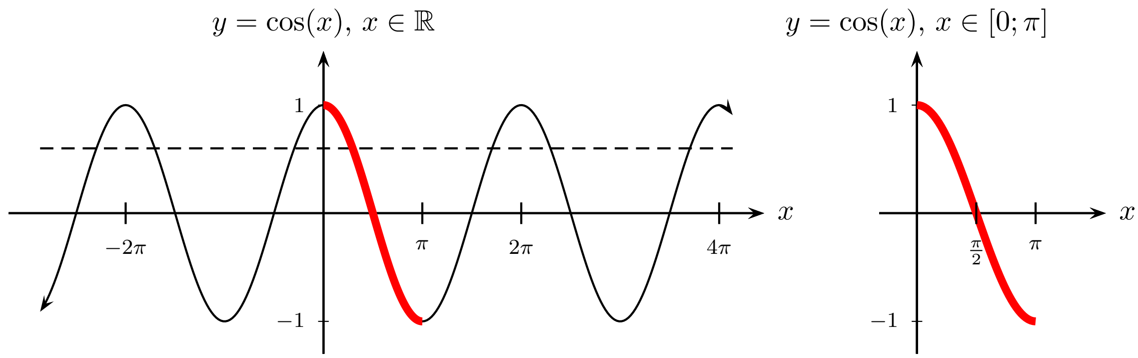


(b) On traduit, $t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff \sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche les angles dont le sinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Parmi tous les angles possibles, seul $t = -\frac{\pi}{4}$ est sur la branche principale. Ainsi, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.



La réciproque de la fonction cosinus

Si on restreint le domaine de la fonction $\cos(x)$ à l'intervalle $[0; \pi]$, sa réciproque est alors aussi une fonction.

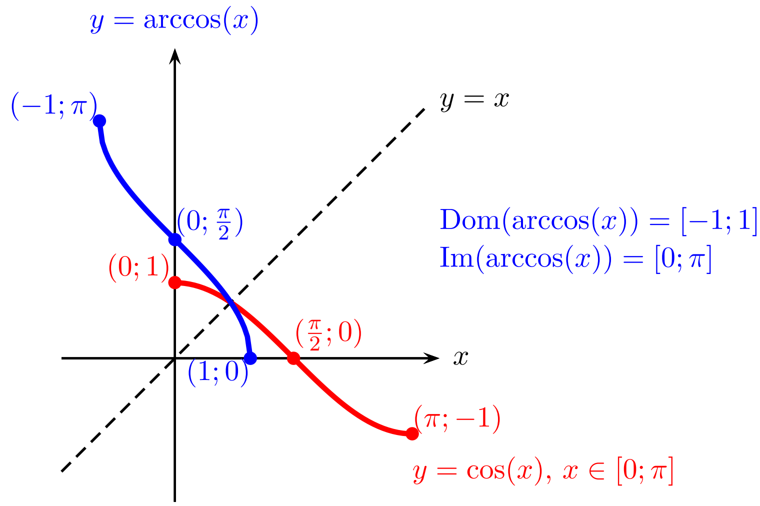


Définition 8.5 La réciproque de la fonction cosinus, désignée par $\arccos(x)$ ou $\cos^{-1}(x)$, est l'inverse de la fonction $y = \cos(x)$ restreinte à l'intervalle $[0; \pi]$. Ainsi, l'équivalence

$$y = \arccos(x) \Longleftrightarrow \cos(y) = x,$$

où $y \in [0; \pi]$ et $x \in [-1; 1]$ signifie que $\arccos(x)$ est **l'angle dont le cosinus est** x sur la branche principale du cosinus.

On obtient le graphe de la fonction $\arccos(x)$ en reflétant, selon l'axe $y = x$, celui de $\cos(x)$ restreint à sa branche principale $[0; \pi]$.



Exemple 8.18

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

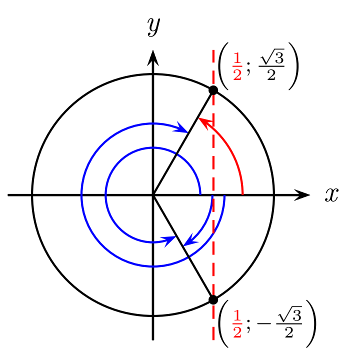
(a) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

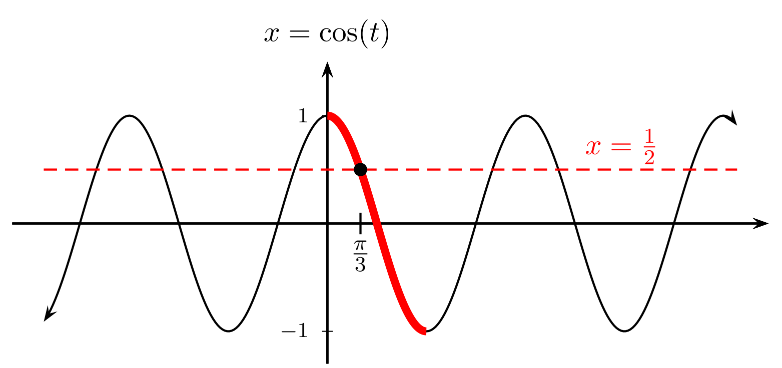
(b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solution :

(a) On traduit d'abord $t = \arccos(\frac{1}{2})$ sous la forme équivalente $\cos(t) = \frac{1}{2}$ où t doit être sur la branche principale du cosinus, $t \in [0;\pi]$. Parmi tous les angles dont le cosinus est $\frac{1}{2}$, seul $t = \frac{\pi}{3}$ est sur la branche principale. Ainsi, $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

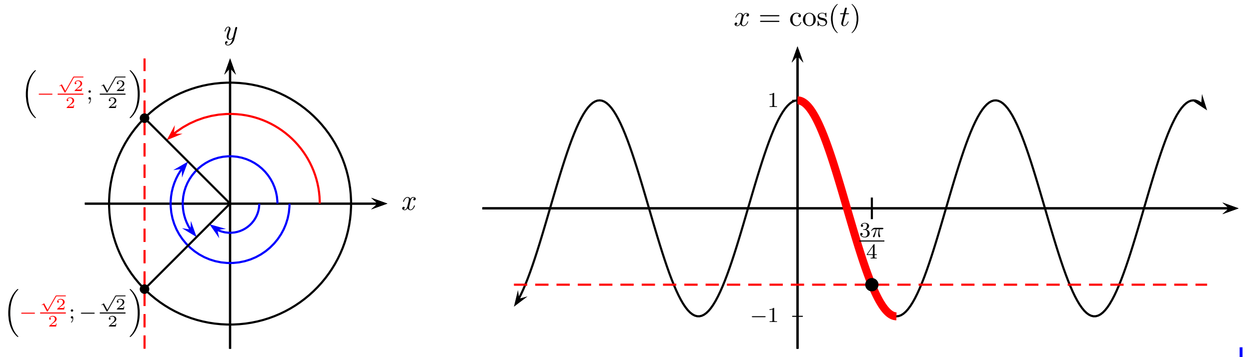
> **Attention !** Encore une fois, on utilisera t comme variable indépendante, afin d'éviter la confusion avec l'utilisation des variables x et y pour le cercle trigonométrique.





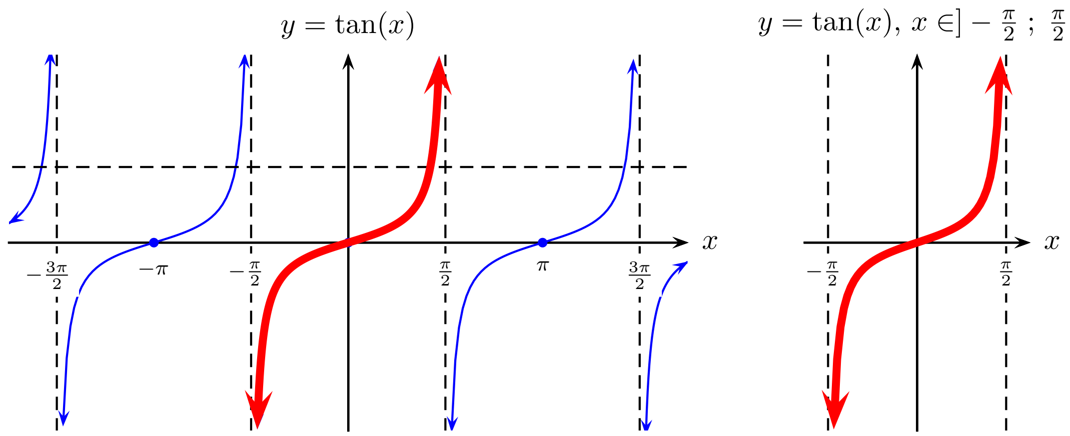
> **Attention !** L'ordonnée y d'un point sur le cercle trigonométrique correspond au sinus de l'angle, tandis que son abscisse x correspond à son cosinus.

(b) On traduit, $t = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff \cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On cherche les angles dont le cosinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Parmi tous les angles possibles, seul $t = \frac{3\pi}{4}$ est dans l'intervalle $[0;\pi]$. Ainsi, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.



La réciproque de la fonction tangente

Si on restreint le domaine de $\tan(x)$ à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, toute droite horizontale intersecte le graphe une seule fois.

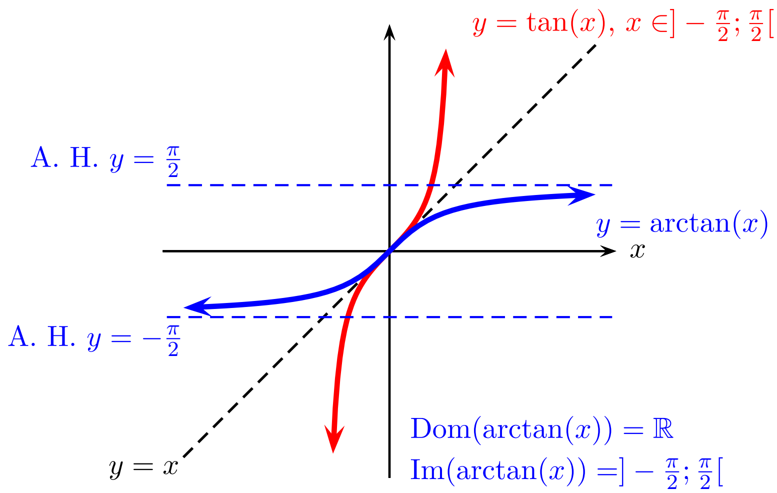


Définition 8.6 La réciproque de la fonction tangente, désignée par $\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$, est l'inverse de la fonction $y=\tan(x)$ restreinte à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, l'équivalence

$$y=\arctan(x)\Longleftrightarrow\tan(y)=x$$

où $y\in]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ et $x\in[-1;1]$ signifie que $\arctan(x)$ est **l'angle dont la tangente est x** sur la branche principale de la tangente.

On obtient le graphe de la fonction $\arctan(x)$ en reflétant, selon l'axe $y=x$, celui de $\tan(x)$ restreint à sa branche principale.



Exemple 8.19

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\arctan(-1)$

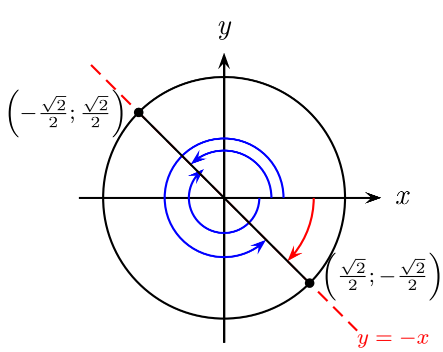
(b) $\arctan(\sqrt{3})$

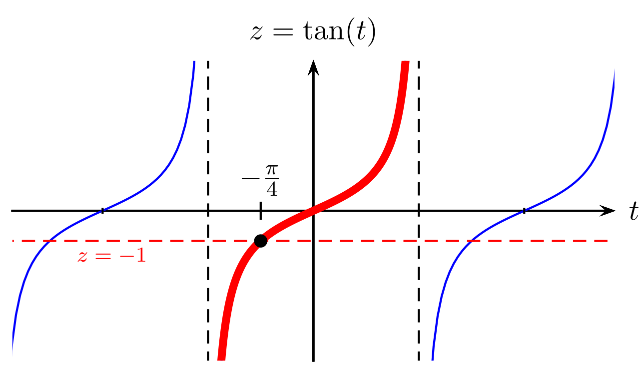
Solution :

(a) On traduit d'abord $t = \arctan(-1)$ sous la forme équivalente $\tan(t) = -1$ où t doit être sur la branche principale de la fonction tangente, $t \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
On écrit ensuite $\tan(t)$ comme un rapport où $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$ sur le cercle trigonométrique.

$$\tan(t) = -1 \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -1 \iff \sin(t) = -\cos(t) \iff y = -x.$$

On cherche donc les angles t dont le côté final repose sur la droite $y = -x$. Autrement dit, on cherche les angles dont le sinus et le cosinus sont de même valeur, mais de signes contraires. Parmi tous ces angles, seul $-\frac{\pi}{4}$ est sur la branche principale de la tangente. On conclut donc que $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.



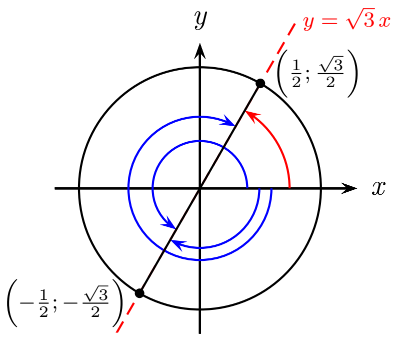


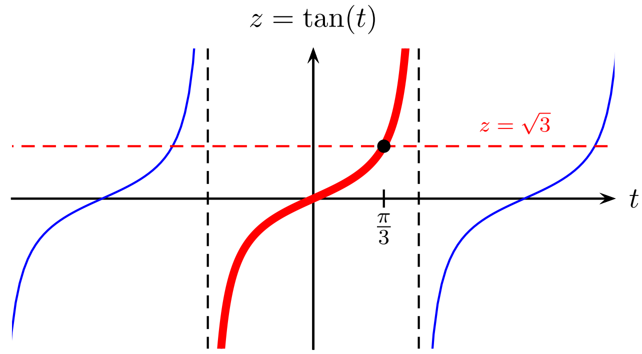
(b) On traduit, $t = \arctan\left(\sqrt{3}\right) \iff \tan(t) = \sqrt{3}$. Alors,

$$\tan(t) = \sqrt{3} \iff \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \sqrt{3} \iff \sin(t) = \sqrt{3}\cos(t).$$

On cherche donc les angles t dont le sinus est $\sqrt{3}$ fois son cosinus. Autrement dit, on cherche les angles dont le côté final repose sur la droite $y = \sqrt{3}\,x$.

Parmi tous ces angles, seul $\frac{\pi}{3}$ est sur la branche principale de la tangente. On conclut donc que $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.





Exemple 8.20

À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\cos\left(\arctan(\sqrt{3})\right)$

(b) $\arcsin\left(\cos(-\frac{2\pi}{3})\right)$

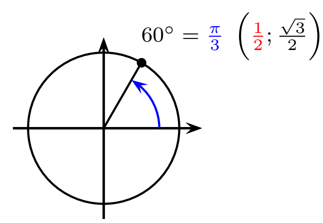
(c) $\arccos\left(\cos(\frac{\pi}{2})\right)$

(d) $\arcsin(\sin(\pi))$

Solution :

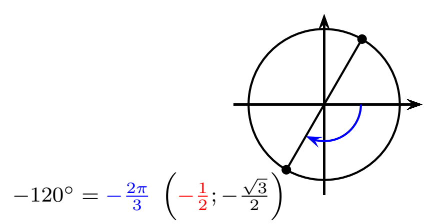
(a) Pour composer les fonctions, on commence par évaluer $\arctan(\sqrt{3})$. À l'exemple 8.19 (b) on a trouvé $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, ainsi

$$\cos\left(\arctan(\sqrt{3})\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$



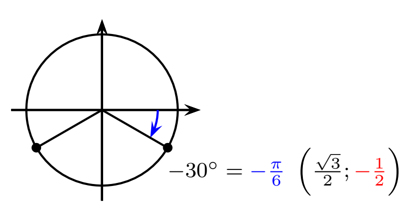
(b) On commence par évaluer le cosinus à l'aide du cercle trigonométrique. On trouve,

$$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right).$$



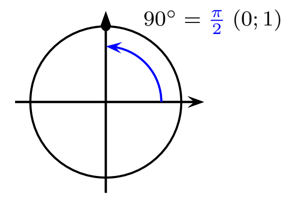
On traduit ensuite $t = \arcsin(-1/2)$ sous la forme équivalente $\sin(t) = -1/2$. Parmi tous les angles dont le sinus est $-\frac{1}{2}$, seul $t = -\frac{\pi}{6}$ est sur la branche principale du sinus. Ainsi,

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}.$$

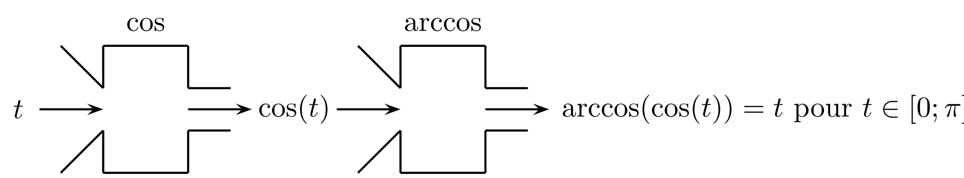


(c) On commence par évaluer $\cos(\frac{\pi}{2})$ à l'aide du cercle trigonométrique,

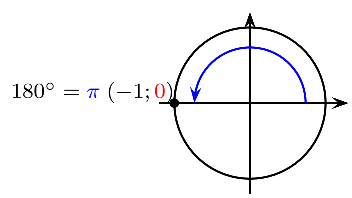
$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0)$.



Puisque $\arccos(0)$ est l'angle dont le cosinus est 0 sur la branche principale du cosinus, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.
On ne devrait pas être étonné de retrouver $\frac{\pi}{2}$ puisque, sur la branche principale du cosinus, les fonctions $\cos(x)$ et $\arccos(x)$ sont réciproques l'une de l'autre.



(d) À l'aide du cercle trigonométrique, on trouve $\sin(\pi) = 0$.



Pour déterminer $\arcsin(0)$, on doit trouver l'angle dont le sinus est 0 sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi,

$$\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0.$$

Attention ! Ce n'est que pour $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ que les fonctions sinus et arcsinus sont réciproques l'une de l'autre et que $\arcsin(\sin(t)) = t$.

Exercices

8.38 À l'aide des points remarquables du cercle trigonométrique, déterminez les valeurs suivantes.

(a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

(c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\arcsin(-1)$

(e) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(f) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(g) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(h) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

(i) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

(j) $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

(k) $\arctan(1)$

(l) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

(m) $\arctan(-\sqrt{3})$

(n) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

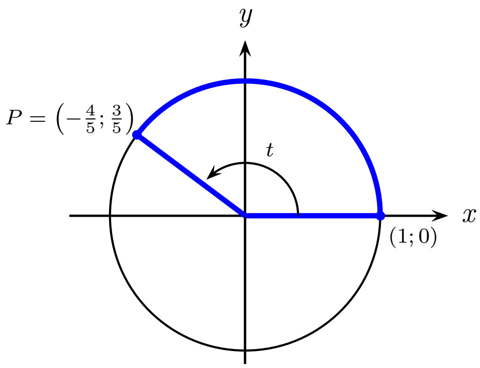
(o) $\cos(\arctan(1))$

(p) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

(q) $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

(r) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

8.39 Sachant que $P = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ est un point du cercle trigonométrique correspondant à un angle t, déterminez les valeurs suivantes.



(a) $\cos(t)$

(b) $\sin(t)$

(c) $\tan(t)$

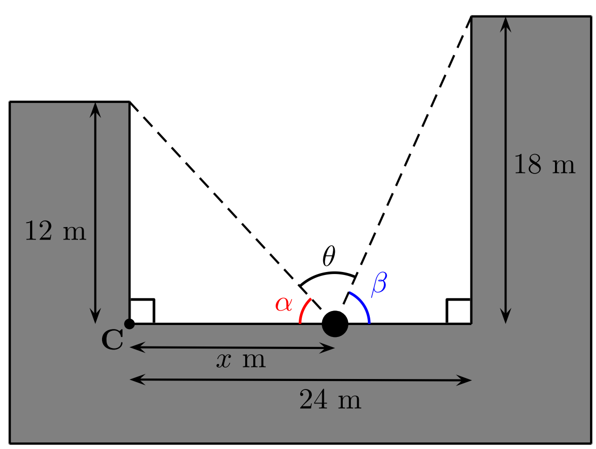
(d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$

(e) $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

(f) Pourquoi les valeurs $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ sont-elles différentes ?

8.40 On sait que $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$, est-ce que $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$? Si non, pourquoi ?

8.41 La figure ci-dessous représente la vue à vol d'oiseau d'un immeuble du centre-ville. On installe une caméra fixe (désignée par le gros point noir) sur un mur de la cour intérieure de l'édifice.



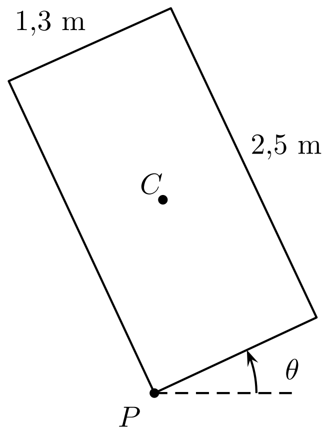
(a) Déterminez la valeur des angles α, β et θ (en radians d'abord et en degrés ensuite) lorsque $x = 15$ m.

(b) Déterminez la valeur de l'angle d'observation θ comme une fonction de x, c'est-à-dire déterminez $\theta(x)$. Ici, θ devra être en radian.

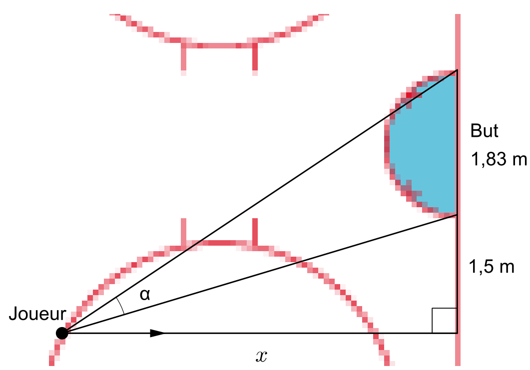
(c) Quel est le domaine de la fonction $\theta(x)$ dans le contexte ?

(d) Déterminez, à l'aide du graphique de la fonction $\theta(x)$, à quelle distance du coin (celui désigné par **C**) on doit positionner la caméra afin de maximiser l'angle d'observation θ.

8.42 De quel angle θ doit-on tourner la boîte illustrée pour faire en sorte que son centre C soit directement au-dessus du pivot P.



8.43 Un joueur de hockey s'avance avec la rondelle vers le but de l'équipe adverse. Le but mesure 1,83 m de largeur et le joueur est situé à x m de la ligne du but.



(a) Quel est l'angle de visée α lorsque $x = 5$ m ?

(b) Déterminez une expression qui calcule l'angle de visée en fonction de la distance x de la ligne de fond.

(c) À l'aide du graphe de la fonction obtenue, déterminez quelle distance x maximise l'angle de visée. Quel est alors cet angle maximal ?

8.6 Les équations trigonométriques

Comme pour les équations rencontrées au chapitre 3, il y a trois types d'équations trigonométriques : des identités, des équations conditionnelles et des équations contradictoires.

Rappel. Une équation est une **identité** si son ensemble solution est égal à son ensemble de référence. Elle est **conditionnelle** si son ensemble solution est un sous-ensemble strict (sans être égal à) de son ensemble de référence et elle est **contradictoire** si elle n'a aucune solution.

Les identités

Les relations qui existent entre les six fonctions trigonométriques de base sont des exemples d'identités trigonométriques. Elles découlent de la définition 8.3, où $P(t) = (x; y) = (\cos(t); \sin(t))$ est le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle t, en remplaçant x par $\cos(t)$ et y par $\sin(t)$.

$$\tan(t) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{x}{y} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$
$$\sec(t) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \csc(t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin(t)}$$

Ces relations sont vraies quelle que soit la valeur pour laquelle les fonctions sont définies. Lorsque les valeurs de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont connues, ces relations permettent de trouver la valeur des quatre autres fonctions trigonométriques de base.

Exemple 8.21

Sachant que $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin(t) = -\frac{1}{2}$, trouvez la valeur des quatre autres fonctions trigonométriques de base.

Solution :
On remplace $\cos(t)$ par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(t)$ par $-\frac{1}{2}$.

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$
$$\csc(t) = \frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Plusieurs identités découlent de l'équation du cercle trigonométrique $x^2+y^2 = 1$. Puisque $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$, on trouve d'abord l'identité, dite *fondamentale*,

$$(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1.$$

Attention ! Pour réduire le nombre de parenthèse, on élimine celles de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en écrivant plutôt $\cos t$ et $\sin t$. On dira tout de même « cos de t » et « sin de t ». On en élimine encore en écrivant $\cos^2 t$ et $\sin^2 t$ pour $(\cos t)^2$ et $(\sin t)^2$. L'identité fondamentale s'écrit alors

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Deux autres identités peuvent être déduite de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en divisant les deux membres par $x^2 = \cos^2 t$ et $y^2 = \sin^2 t$ respectivement. Avec l'identité fondamentale, ces identités sont dites *pythagoriciennes*,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad 1 + \tan^2(t) = \sec^2(t), \qquad 1 + \cot^2(t) = \csc^2(t).$$

Exemple 8.22

Sachant que $\cos x = -\frac{2}{5}$ pour $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$, trouvez $\sin x$.

Solution :

On utilise l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, remplaçant $\cos x$ par $-\frac{2}{5}$,

$$\begin{aligned}
\left(-\tfrac{2}{5}\right)^2 + \sin^2 x = 1 &\iff \tfrac{4}{25} + \sin^2 x = 1 && \text{on évalue le carré}\\
&\iff \sin^2 x = 1 - \tfrac{4}{25} && \text{on soustrait}\\
&\iff \sin^2 x = \tfrac{21}{25} && \text{on met au dénominateur commun}\\
&\iff \sin x = \pm\tfrac{\sqrt{21}}{5} && \text{on extrait la racine carrée}
\end{aligned}$$

Puisqu'on stipule que $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$, le côté final de l'angle x se situe dans le troisième quadrant, le sinus doit donc être négatif. Ainsi, $\sin(x) = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Exemple 8.23

Utilisez les identités trigonométriques de base pour démontrer les égalités suivantes.

(a) $\cos x \sec x = 1$

(b) $\dfrac{1}{1-\sin\theta} + \dfrac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(c) $\csc t - \dfrac{\cot t}{\sec t} = \sin t$

Solution :

(a) On utilise l'identité de base $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ et on simplifie.

$$\cos x \sec x = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 1$$

(b) On simplifie le membre de gauche afin d'obtenir le membre de droite.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} &= \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} && \text{on met au dénominateur commun}\\
&= \frac{2}{1-\sin^2\theta} && \text{on simplifie le numérateur et on multiplie les facteurs du dénominateur}\\
&= \frac{2}{\cos^2\theta} && \text{on utilise l'identité } \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta\\
&= 2\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = 2\sec^2\theta && \text{on utilise l'identité } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

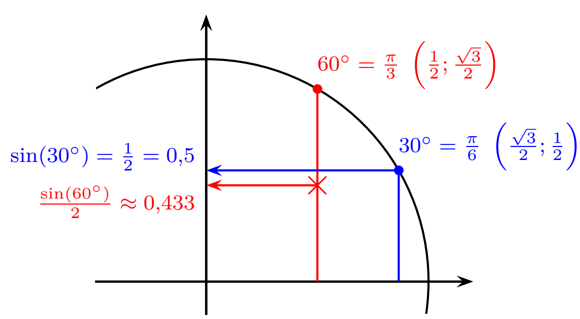
(c) On traduit d'abord les termes du membre de gauche en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

$$\begin{aligned}
\csc t - \frac{\cot t}{\sec t} &= \frac{1}{\sin t} - \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{\cos t}} && \text{on développe en termes de } \cos t \text{ et } \sin t \\
&= \frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{1} && \text{on transforme le quotient en produit} \\
&= \frac{1}{\sin t} - \frac{\cos^2 t}{\sin t} && \text{on multiplie les fractions} \\
&= \frac{1-\cos^2 t}{\sin t} && \text{le dénominateur est commun} \\
&= \frac{\sin^2 t}{\sin t} && \text{on utilise l'identité } \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Leftrightarrow \sin^2 t = 1 - \cos^2 t \\
&= \sin t && \text{on simplifie}
\end{aligned}$$

Dans tous les exemples précédents, pour vérifier qu'une équation est bien une identité, on simplifie un membre de l'équation pour montrer qu'il est identique à l'autre membre. Selon les identités, on peut avoir à utiliser d'autres techniques ou d'autres identités. On se limitera ici aux identités de base, aux identités pythagoriciennes et aux identités de sommes et de différences suivantes.

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

Sans mémoriser ces identités, il est important de se rappeler, par exemple, que le sinus d'une somme n'est pas égal à la somme des sinus. En effet, à l'exercice 8.3 (a), on a montré à l'aide de calculs que $\sin(60°) \neq 2 \cdot \sin(30°)$, même si $60° = 2 \cdot 30°$. On peut aussi le vérifier en examinant le cercle trigonométrique. On remarque que le point milieu du segment vertical de longueur $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, désigné par $\times$, est moins haut que $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.



Exemple 8.24

Tracez le graphe de chacun des côtés de l'équation dans une même fenêtre graphique. Si les graphes semblent coïncider, vérifiez que l'équation est une identité. Si les graphes ne coïncident pas, donnez une valeur de x pour laquelle les deux côtés sont définis, mais non égaux.

(a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (b) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ (c) $3\cos(x) = \cos(3x)$

Solution :

(a) En tracant les graphes (*faites-le*) de $y = \sin(2x)$ et $y = 2\sin x \cos x$, on voit qu'ils semblent coïncider. Il s'agit bien d'une identité, car en posant $y = x$ dans l'équation

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

on trouve

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Le sinus du double d'un angle est $2\cos(x)$ fois le sinus de l'angle qui a été doublé.

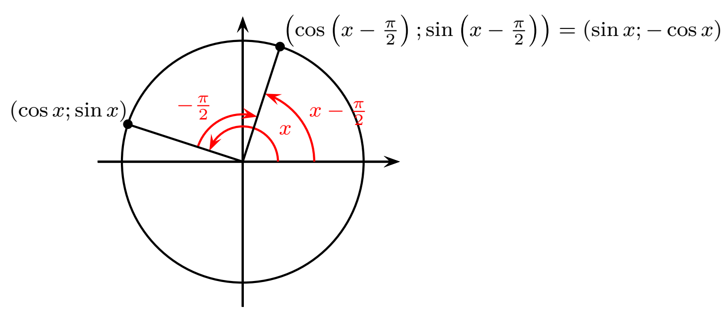
(b) En tracant les graphes (*faites-le*) de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ et $y = \sin x$, on voit qu'ils semblent coïncider. Pour démontrer qu'il s'agit bien d'une identité, on utilise l'identité

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

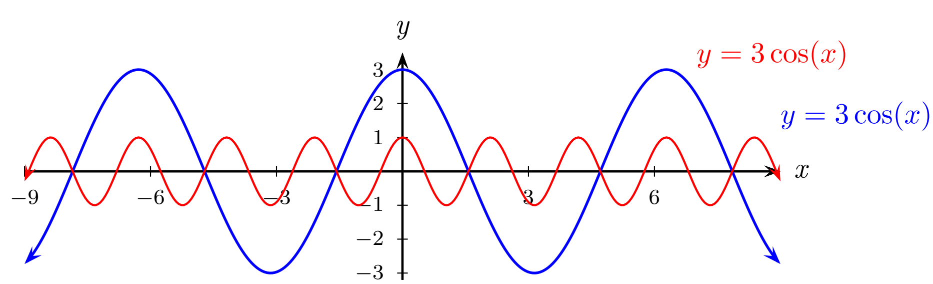
On pose $y = \frac{\pi}{2}$, on évalue et on simplifie.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x$$

L'identité $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ se vérifie aussi par symétrie, à l'aide du cercle trigonométrique.



(c) En tracant les graphes de $y = 3\cos(x)$ et $y = \cos(3x)$, on remarque qu'ils ne coïncident que pour certaines valeurs de x. On peut constater qu'en $x = 0$, $y = 3\cos(0) = 3 \cdot 1 = 3$, tandis que $y = \cos(3 \cdot 0) = \cos(0) = 1$.



Il ne s'agit donc pas d'une identité, mais plutôt d'une équation conditionnelle.

Les équations conditionnelles

Une équation est **conditionnelle** si son ensemble solution est un sous-ensemble strict (sans être égal à) de son ensemble de référence (domaine).

Exemple 8.25

À l'aide du cercle trigonométrique, résolvez $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'ensemble donné.

(a) pour $x \in [0; 2\pi]$

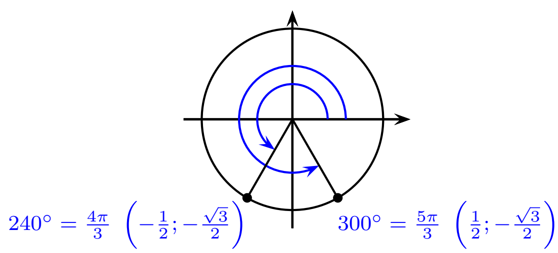
(b) pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

(c) pour $x \in [0; 4\pi]$

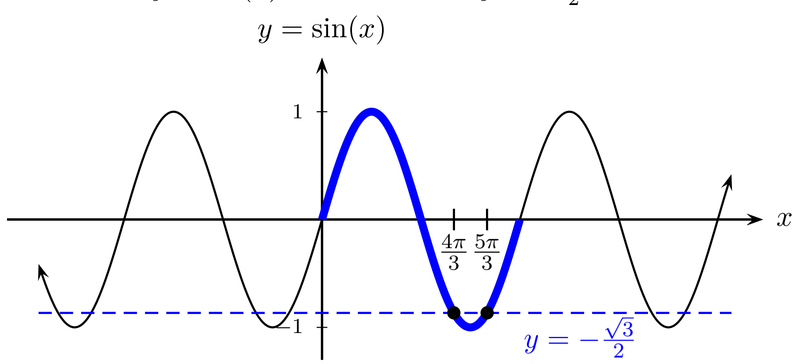
(d) pour $x \in \mathbb{R}$

Solution :

(a) Les angles $x \in [0; 2\pi]$ dont le sinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

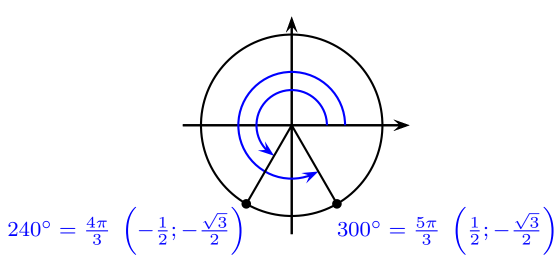


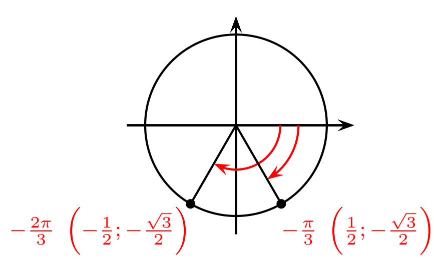
D'un point de vue graphique, les solutions trouvées correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y = \sin(x)$ et de la droite $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.



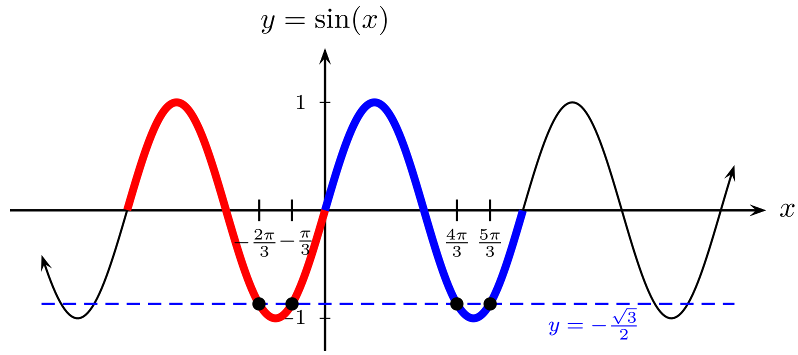
(b) Les angles $x \in [-2\pi; 2\pi]$ dont le sinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$ trouvés en (a) ainsi que les angles

$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}.$$



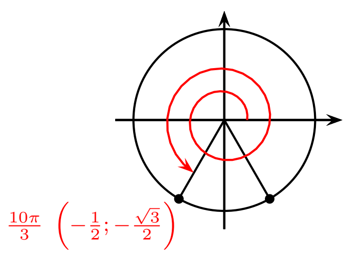


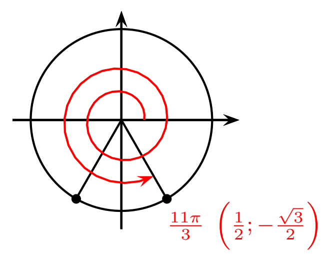
Encore une fois, les solutions trouvées correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y = \sin(x)$ et de la droite $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais, cette fois, sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

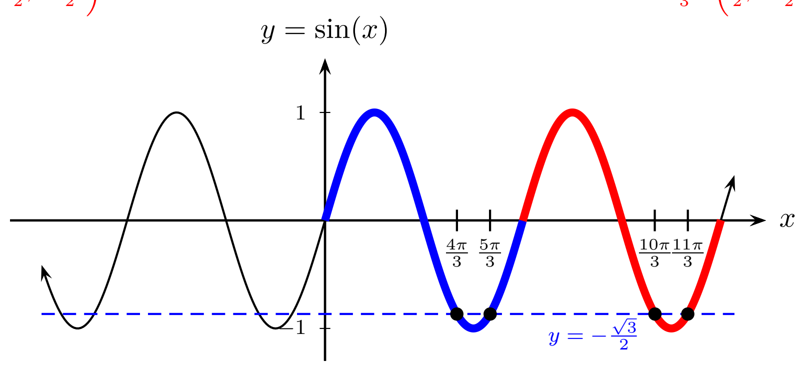


(c) Les angles $x \in [0; 4\pi]$ dont le sinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont $x = \frac{4\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$ trouvés en (a) ainsi que les angles

$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \text{ et } \frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{11\pi}{3}.$$





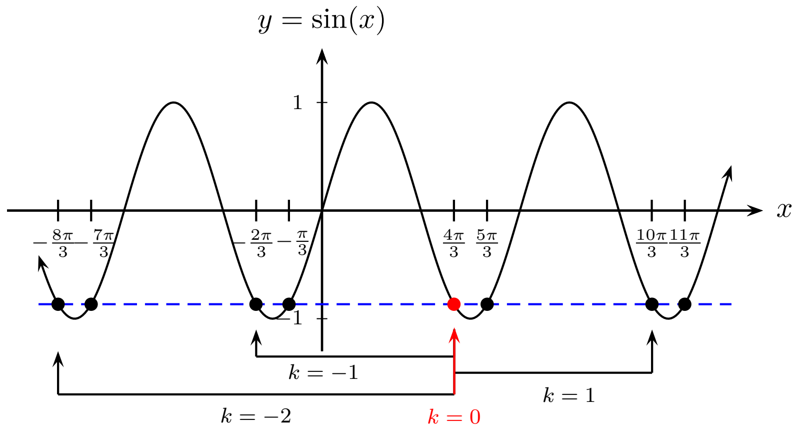


(d) Pour trouver toutes les solutions réelles, il suffit de parcourir le cercle en faisant un certain nombre de tours complets dans un sens ou dans l'autre à partir des points trouvés en (a).

$$x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Rappel. Avec cette notation, $k \in \mathbb{Z}$ est un compteur de tours, c'est-à-dire que le côté final de l'angle fait un tour complet dans le sens antihoraire lorsque k est positif, et horaire lorsque k est négatif.

Le graphique ci-dessous illustre les solutions obtenues à partir de $x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ pour $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.



Les équations contradictoires

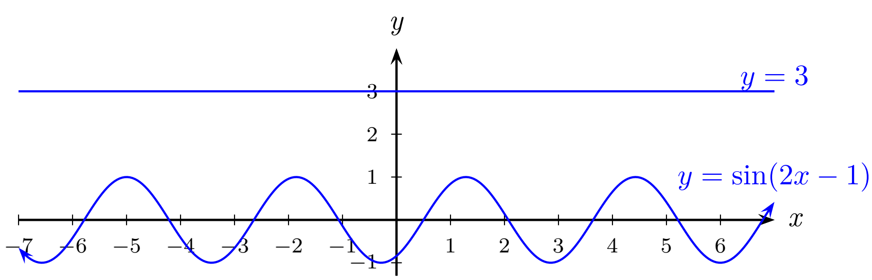
Une équation est **contradictoire** si elle n'a aucune solution.

Exemple 8.26

Résolvez l'équation $\sin(2x - 1) = 3$ à l'aide du solveur de votre calculatrice. Donnez une interprétation graphique de l'ensemble solution.

Solution :

La calculatrice répond `false`. En effet, puisque la valeur maximale du sinus est 1, il n'existe aucune valeur $x \in \mathbb{R}$ qui fait en sorte que $\sin(2x - 1) = 3$. Il s'agit donc d'une équation contradictoire, c'est-à-dire qu'elle n'a aucune solution. Les courbes $y = 3$ et $y = \sin(2x - 1)$ ne s'intersectent pas.



Exercices

8.44 Sachant que $\sin(x) = \frac{1}{3}$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, trouvez les valeurs suivantes sans calculatrice.

(a) $\cos x$ (b) $\tan x$ (c) $\cot x$ (d) $\sec x$ (e) $\csc x$

8.45 Utilisez les identités trigonométriques pour démontrer les égalités suivantes.

(a) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

(b) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

(c) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{1+\sin x}{\cos x} = 2\sec x$

(d) $\dfrac{\tan x + \sin x}{1+\cos x} = \tan x$

8.46 Tracez le graphe de chacun des membres de l'équation dans une même fenêtre graphique. Si les graphes semblent coïncider, vérifiez que l'équation est une identité. Si les graphes ne coïncident pas, donnez une valeur de x pour laquelle les deux membres sont définis, mais pas égaux.

(a) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$

(b) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

(c) $\cos 2x = 2\cos x$

(d) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$

8.47 À l'aide du cercle trigonométrique et des fonctions trigonométriques réciproques, résolvez les équations suivantes sur l'ensemble donné. Dans chacun des cas, donnez une interprétation graphique de l'ensemble solution.

(a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi]$

(b) $\cos x = 0{,}35$ pour $x \in [0; 2\pi]$

(c) $\tan x = \sqrt{3}$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

(d) $\tan x = -4{,}2$ pour $x \in \mathbb{R}$

8.48 Sans calculatrice, résolvez les équations suivantes sur l'ensemble donné.

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi]$

(b) $2\cos x = 1$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

(c) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

(d) $\tan 2x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

8.49 Résolvez les équations suivantes à l'aide du solveur de votre calculatrice. Dans chacun des cas, donnez une interprétation graphique de l'ensemble solution.

(a) $\cos x = \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$

(b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$ pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

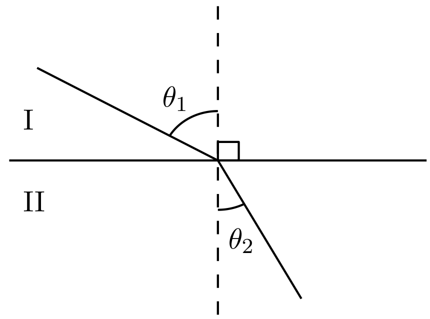
(c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ pour $x \in \mathbb{R}$

(d) $\tan x^2 = x \sin x$ pour $x \in [-\pi; \pi]$

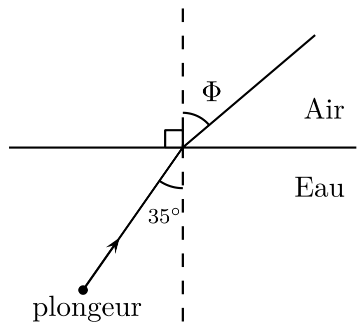
8.50 Lorsqu'un faisceau lumineux oblique traverse une surface pour passer d'un milieu à un autre, il change de direction. Ce changement de direction est donné par la loi de Snell-Descartes,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

où n_1 est l'indice de réfraction du premier milieu (I) et n_2 est celui du deuxième milieu (II).



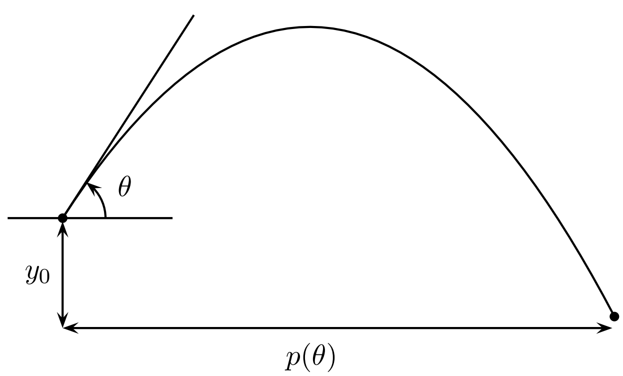
Si un plongeur pointe un faisceau lumineux vers la surface de l'eau, à quel angle Φ émergera le faisceau ? *L'indice de réfraction de l'air est environ* 1 *et celui de l'eau est d'environ* 1,33.



8.51 La portée $p(\theta)$ d'un projectile, lorsqu'on néglige la résistance de l'air, peut être modélisée par la fonction

$$p(\theta) = \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right),$$

où g est l'accélération gravitationnelle (environ 9,81 m/s^2 à la surface de la Terre),
θ est l'angle de projection par rapport à l'horizontale,
v est la vitesse de déplacement initiale du projectile,
et y_0 est la hauteur initiale du projectile par rapport à l'horizontale de référence.



Si le projectile est lancé à partir d'une hauteur de référence tel que $y_0 = 0$, le modèle se simplifie en

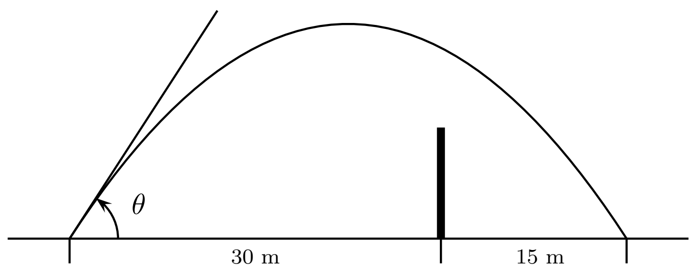
$$p(\theta) = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta.$$

De plus, en supposant que le projectile est à l'origine du plan cartésien au moment du tir et qu'il se déplace dans le premier quadrant, sa position $(x; y)$, t secondes après le tir, est donnée par $x = v_0 t\cos(\theta)$ et $y = v_0 t\sin\theta - 4.905t^2$.

(a) À l'aide de l'identité $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, montrez que

$$\frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right)\Bigg|_{y_0=0} = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta.$$

(b) Une catapulte est placée à 30 m du mur d'une forteresse. Un soldat doit tirer un obus afin qu'il atterrisse à 15 m du mur, à l'intérieur de la forteresse. Si le mur mesure 9 m de haut et que la vitesse initiale est de 22 m/s, quel doit être l'angle de projection θ pour que l'obus ait une portée de 45 m et atterrisse dans la forteresse, sans frapper le mur ?



(c) À cette même vitesse initiale, quelle est la portée maximale de la catapulte ?

8.7 Les lois des sinus et des cosinus

Il existe plusieurs façons de résoudre un triangle quelconque[i]. On s'attarde ici à deux des méthodes les plus utilisées, qu'on appelle la loi des sinus et la loi des cosinus.

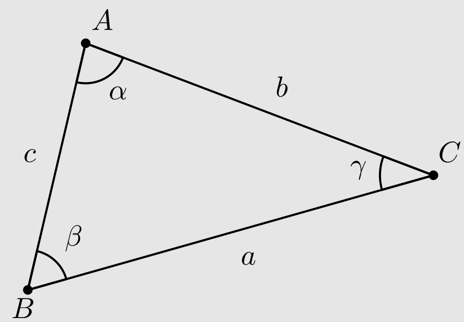
Théorème 8.1
Soit une triangle quelconque de sommets A, B et C.

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Loi des cosinus

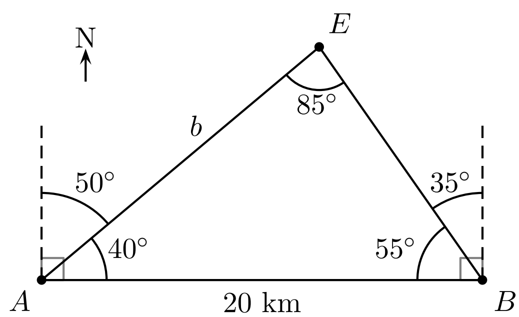
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$



Exemple 8.27
Le poste de surveillance des incendies A est situé à 20 km à l'ouest du poste B. Dans leur tour respective, des agents détectent un incendie sur une montagne située au nord. L'agent du poste A signale que l'épicentre du feu est à 50° au nord-est alors que celui du poste B le signale à 35° au nord-ouest. À quelle distance du poste A se situe l'épicentre du feu ?

Solution :
La figure suivante résume les informations données. La distance entre la station A et l'épicentre du feu E est désignée par b. On remarque que les angles données ne sont pas des angles intérieurs au triangle. Ils sont mesurés à partir de la verticale (le nord). On trouve les angles intérieurs par soustraction.

$$\angle A = 90° - 50° = 40° \text{ et } \angle B = 90° - 35° = 55° \text{ et } \angle E = 180° - 40° - 55° = 85°$$



Par la loi des sinus,

$$\frac{b}{\sin(55°)} = \frac{20 \text{ km}}{\sin(85°)} \Longleftrightarrow b = \frac{(20 \text{ km})\sin(55°)}{\sin(85°)} \approx 16{,}45 \text{ km}$$

La distance cherchée est d'environ 16,45 km.

i. L'adjectif *quelconque* est employé pour insister sur le fait qu'on ne sait rien de particulier à propos d'un triangle.

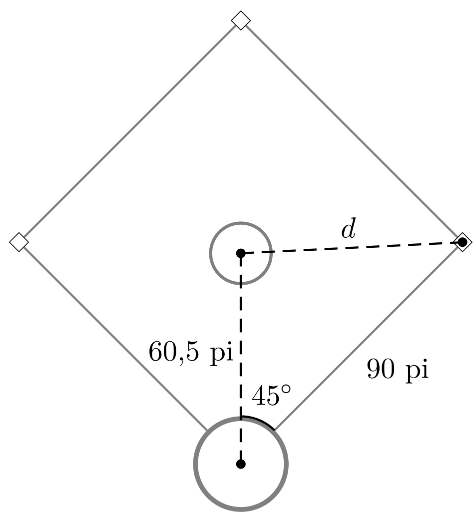
Il est parfois plus stratégique d'utiliser la loi des cosinus.

Exemple 8.28

Le diamant au baseball de la ligue majeure a quatre buts formant les sommets d'un carré dont les côtés mesurent 90 pieds. Le monticule du lanceur est situé à 60 pieds 6 pouces du marbre sur le segment reliant le marbre au deuxième but. À quelle distance se situe le monticule du premier but ?

Solution :

Étant donné qu'on connaît l'angle et la longueur de deux côtés du triangle illustré, il est préférable d'utiliser la loi des cosinus.



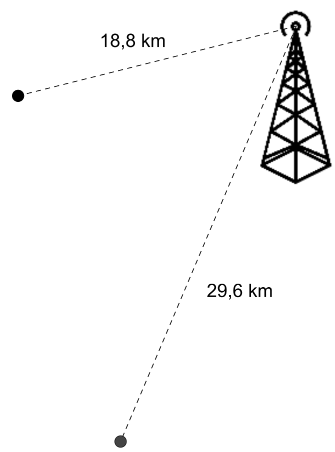
Puisque d est la longueur du côté opposé à l'angle de 45°,

$$d^2 = (60{,}5)^2 + 90^2 - 2 \cdot 60{,}5 \cdot 90 \cos(45°) \approx 4059{,}86 \Longrightarrow d \approx 63{,}72,$$

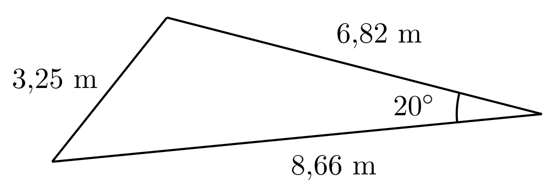
et comme 0,72 pi · 12 po/pi = 8,64 po, alors la distance est d'environ 63 pi 9 po.

Exercices

8.52 Deux personnes discutent au téléphone cellulaire. Si l'angle entre leurs signaux respectifs, par rapport au sommet de la tour, est de 60°, quelle est la distance qui les sépare ?



8.53 Considérez le triangle suivant.

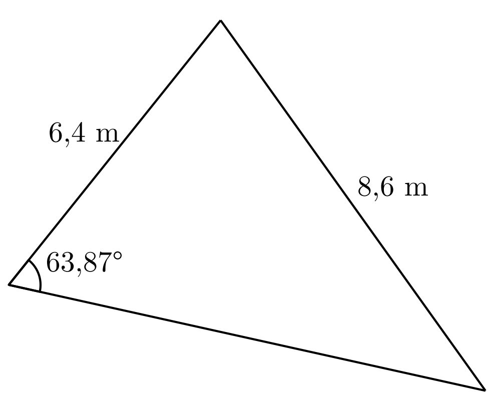


(a) Déterminez la mesure (inconnue) de l'angle aigu du triangle à l'aide de la loi des sinus.

(b) Déterminez la mesure de l'angle obtus.

(c) Que se passe-t-il lorsqu'on tente de trouver la mesure de l'angle obtus du triangle à l'aide de la loi des sinus ?

8.54 Considérez la figure suivante.



(a) Quelle est la mesure de l'angle opposé au côté de longueur 6,4 mètres ?

(b) Déterminez la longueur du troisième côté du triangle à l'aide de la loi des sinus.

(c) Calculez à nouveau la longueur du troisième côté mais, cette fois, à l'aide de la loi des cosinus.

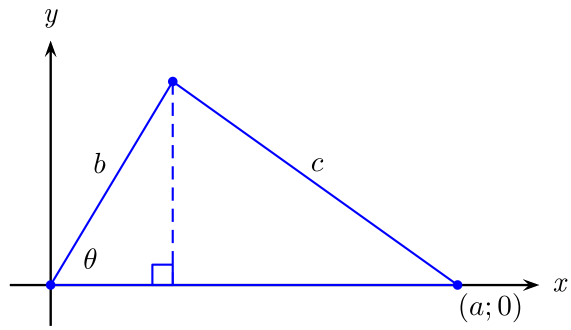
(d) Laquelle des lois s'applique le plus directement ?

(e) Déterminez l'aire du triangle.

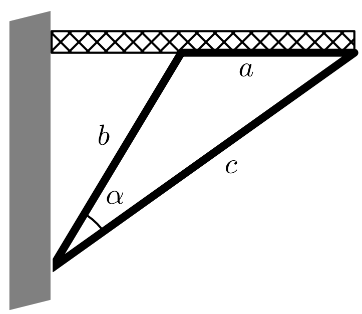
8.55 Démontrez la loi des cosinus dans le cas où le triangle a des côtés de longueur a, b et c et où θ est l'angle formé par les côtés de longueur a et b. Plus précisément, montrez que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Aide : Placez l'angle θ en position standard tel qu'illustré ci-dessous et exprimez les différentes longueurs comme des fonctions de θ.



8.56 Un support à tablette a des côtés de longueur a, b et c tel qu'illustré. Trouvez une expression pour l'angle α en termes de ces longueurs.



Chapitre 9

Une introduction à la dérivée

9.1 La dérivée d'une fonction

À la section 5.4, on a vu le taux de variation moyen d'une fonction sur un intervalle, son lien avec la pente d'une droite sécante à une courbe et comment l'interpréter dans différents contextes. En combinant les concepts de taux de variation moyen à celui de la limite, nous aborderons dans ce chapitre, le taux de variation instantanée qu'on appelle la dérivée.

Rappel. Le taux de variation moyen d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est défini comme le rapport

$$TVM_{[a;b]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sur le graphe de la fonction f, cette valeur correspond à la pente de la droite sécante passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.

Exemple 9.1

Une balle est lancée verticalement dans les airs. Sa position relative au sol (son altitude) est décrite par la fonction $p(t) = 2 + 30t - 4{,}9t^2$, où p est mesurée en mètres à partir du sol et t est mesuré en secondes depuis qu'elle a été lancée.

Attention ! On s'intéresse uniquement au mouvement vertical (rectiligne) de la balle.

(a) À quelle hauteur la balle est-elle lancée ?

(b) Combien de temps faut-il pour que la balle retombe au sol à partir du moment où elle a été lancée ?

(c) Calculez $TVM_{[1;4]}$ et interprétez cette valeur dans le contexte.

(d) Calculez $TVM_{[3;5]}$ et interprétez le signe de ce taux.

Solution :

(a) La balle est lancée d'une hauteur de $p(0) = 2$ m, puisque t est mesuré en secondes depuis qu'elle a été lancée.

(b) On cherche les zéros de la fonction p.

$$2 + 30t - 4{,}9t^2 = 0 \iff t = \frac{-2(\sqrt{5870} - 75)}{49} \approx -0{,}066 \text{ ou } t = \frac{2(\sqrt{5870} + 75)}{49} \approx 6{,}188$$

Puisque la balle frappe le sol après avoir été lancée ($t \geq 0$), $t \approx -0{,}066$ n'est pas une solution valide dans ce contexte. La balle frappe donc le sol environ 6,2 secondes après avoir été lancée.

(c) Dans le calcul du taux de variation

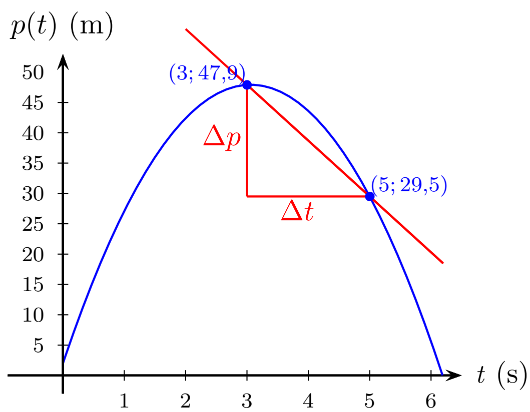
$$TVM_{[1;4]} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(4) - p(1)}{4 - 1} = \frac{43{,}6 - 27{,}1}{3} = \frac{16{,}5}{3} = 5{,}5$$

la quantité $\Delta p = p(4) - p(1) = 16{,}5$ m représente la variation de la position de la balle entre la première et la quatrième seconde. En divisant ce résultat par le temps écoulé $\Delta t = 3$ s, on obtient sa vitesse moyenne 5,5 m/s.

(d) La balle **perd** 18,4 m en altitude en 2 s. Dans ce contexte, une vitesse moyenne négative signifie que la balle perd en moyenne 9,2 m/s.

$$TVM_{[3;5]} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(5) - p(3)}{5 - 3} = \frac{29{,}5 - 47{,}9}{2} = \frac{-18{,}4}{2} = -9{,}2 \text{ m/s}$$

Graphiquement, ceci signifie que la droite sécante passant par $(3; 47{,}9)$ et $(5; 29{,}5)$ est de pente négative.

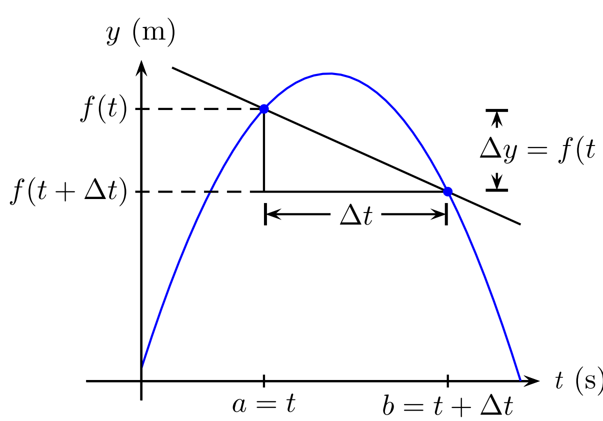


Exemple 9.2

Trouvez une expression qui calcule le taux de variation moyen $TVM_{[a;b]}$ de la fonction $p(t)$ de l'exemple 9.1 lorsque $a = t$ et $b = t + \Delta t$. Vérifiez ensuite que l'expression obtenue généralise bien les taux obtenus à l'exemple 9.1 (c) et (d).

Solution :

Le graphique suivant illustre le calcul du taux de variation moyen comme la pente d'une droite sécante à la courbe $y = p(t)$.



Attention ! Dans le cas illustré ci-dessus, on note que $\Delta y < 0$ puisque $f(t+\Delta t) < f(t)$.

On calcule $TVM_{[a;b]}$ avec $a = t$ et $b = t + \Delta t$.

$$\begin{aligned}
TVM_{[t;t+\Delta t]} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{(t+\Delta t) - t} && \text{on utilise la définition} \\
&= \frac{\left[2 + 30(t+\Delta t) - 4{,}9(t+\Delta t)^2\right] - (2 + 30t - 4{,}9t^2)}{\Delta t} && \text{on substitue} \\
&= \frac{30\Delta t - 9{,}8t\Delta t - 4{,}9(\Delta t)^2}{\Delta t} && \text{on réduit le numérateur} \\
&= \frac{\cancel{\Delta t}(30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t)}{\cancel{\Delta t}} && \text{on met } \Delta t \text{ en évidence} \\
&= 30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t && \text{on simplifie le facteur } \Delta t
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule générale pour le taux de variation moyen de la fonction $p(t)$ en termes de t et Δt,

$$TVM_{[t;t+\Delta t]} = 30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t.$$

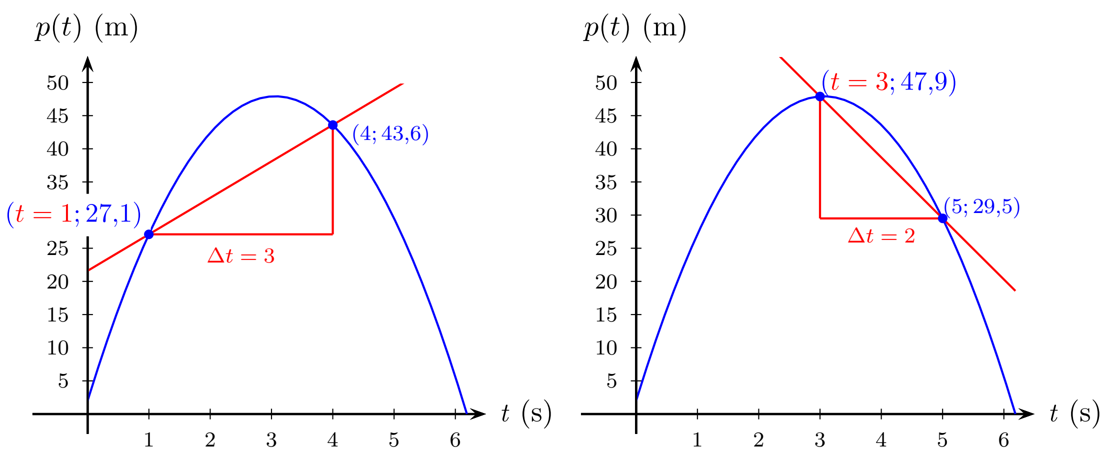
Validation. Pour vérifier que l'expression est cohérente avec $TVM_{[1;4]}$ calculé à l'exemple 9.1, on évalue $30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t$ en $t = 1$ et $\Delta t = 3$,

$$30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t\big|_{t=1,\Delta t=3} = 30 - 9{,}8(1) - 4{,}9(3) = 5{,}5$$

et dans le cas de $TVM_{[3;5]}$, en $t = 3$ et $\Delta t = 2$,

$$30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t\big|_{t=3,\Delta t=2} = 30 - 9{,}8(3) - 4{,}9(2) = -9{,}2.$$

On obtient bien les résultats attendus.



Comment calculer la vitesse instantanée de la balle à un moment précis ?

Exemple 9.3

À l'aide de la formule trouvée à l'exemple 9.2, calculez $TVM_{[1,1+\Delta t]}$ avec des valeurs Δt de plus en plus près de 0 et placez vos résultats dans une table de valeurs. Analysez ces valeurs pour donner une estimation de la vitesse de la balle exactement une seconde après avoir été lancée.

Solution :

La formule obtenue à l'exemple 9.2 est $TVM_{[t;t+\Delta t]} = 30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t$. En posant $t = 1$ et en choisissant des valeurs Δt de plus en plus proche de 0, on obtient la table de valeurs suivante.

t	Δt	$[t; t + \Delta t]$	$TVM_{[t;t+\Delta t]} = 30 - 9{,}8(t) - 4{,}9\Delta t$
1	3	$[1; 4]$	5,5
1	2	$[1; 3]$	10,4
1	1	$[1; 2]$	15,3
1	0,5	$[1; 1{,}5]$	17,75
1	0,1	$[1; 1{,}1]$	19,71
1	0,01	$[1; 1{,}01]$	20,151
1	0,001	$[1; 1{,}001]$	20,1951
1	0,0001	$[1; 1{,}0001]$	20,19951
1	0,00001	$[1; 1{,}00001]$	20,199951
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	0	$\{1\}$	20,2

En examinant cette table de valeurs, on peut estimer que la vitesse de la balle, une seconde après avoir été lancée, est d'environ 20,2 m/s.

Exemple 9.4

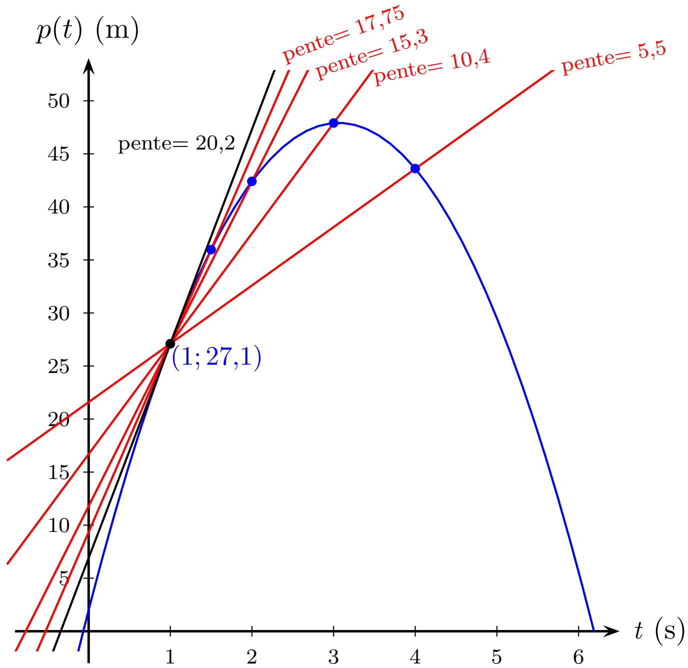
Utilisez le concept de limite présenté au chapitre 6 pour obtenir la vitesse de la balle, exactement une seconde après avoir été lancée.

Solution :

À l'exemple 9.2 on a obtenu la formule $TVM_{[t;t+\Delta t]} = 30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t$ pour la vitesse moyenne sur l'intervalle $[t; t + \Delta t]$. Ainsi, $TVM_{[1;1+\Delta t]} = 30 - 9{,}8(1) - 4{,}9\Delta t = 20{,}2 - 4{,}9\Delta t$ et en calculant la limite lorsque Δt tend vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} v_{inst} &= \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} TVM_{[1;1+\Delta t]} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (30 - 9{,}8(1) - 4{,}9\Delta t) \\ &= 20{,}2 - 4{,}9(0) = 20{,}2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Graphiquement, ceci signifie que la suite des pentes des droites sécantes tend vers 20,2. Cette pente correspond à la pente de la droite tangente à la courbe $y = p(t)$ en $t = 1$.



On soupçonne que la vitesse instantanée se calcule de la même façon, peu importe la valeur de t. Il suffit de calculer la limite lorsque Δt tend vers 0 du $TVM_{[t;t+\Delta t]}$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} TVM_{[t;t+\Delta t]} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (30 - 9{,}8t - 4{,}9\Delta t) \\ &= 30 - 9{,}8t - 4{,}9(0) \\ &= 30 - 9{,}8t \end{aligned}$$

En évaluant la fonction $v(t)$ en $t = 1$, on trouve 20,2 m/s, la vitesse instantanée en $t = 1$ calculée à l'exemple 9.4. On désigne cette nouvelle fonction par $v(t) = p'(t) = 30 - 9{,}8t$ et on l'appelle la dérivée de la fonction $p(t)$ par rapport à t.

On peut définir la dérivée de façon générale, en utilisant une notation dénudée de contexte.

Définition 9.1 La **dérivée d'une fonction** f en x est une **fonction** notée $f'(x)$ qui est définie par la limite suivante.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} TVM_{[x;x+\Delta x]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Lorsqu'on évalue cette fonction en $x = a$, elle donne la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a; f(a))$. Ceci se traduit par le fait que la pente de la tangente est obtenue en calculant la limite des pentes des sécantes suivante.

$$a_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} a_{sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Exemple 9.5

Soit $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$.

(a) Calculez $f'(x)$ à l'aide de la définition de la dérivée.

(b) À l'aide de la dérivée obtenue en (a), déterminez si la fonction f est croissante ou décroissante en $x = 0$.

(c) Trouvez le sommet de la parabole d'équation $y = f(x)$ à l'aide de la dérivée calculée en (a).

(d) Vérifiez que vos réponses sont plausibles en examinant le graphe de la fonction f.

Solution :

(a) On calcule la limite de $TVM_{[x;x+\Delta x]}$ lorsque $\Delta x \to 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} TVM_{[x;x+\Delta x]} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{par définition} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) - 3) - (2x^2 - 4x - 3)}{\Delta x} && \text{on substitue} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - \cancel{4x} - 4\Delta x - \cancel{3} - 2x^2 + \cancel{4x} + \cancel{3}}{\Delta x} && \text{on développe} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 4\Delta x - \cancel{2x^2}}{\Delta x} && \text{on réduit} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\,(4x + 2\Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} && \text{on met en évidence} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 4) && \text{on simplifie} \\
&= 4x + 2(0) - 4 = 4x - 4 && \text{on pose } \Delta x = 0
\end{aligned}$$

La dérivée de $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$ est donc $f'(x) = 4x - 4$.

(b) Puisque la pente de la tangente à $y = f(x)$ en $x = 0$ est $f'(0) = -4$, qui est une valeur négative, la courbe $y = f(x)$ est décroissante en $x = 0$.

(c) On cherche la valeur x pour laquelle la pente de la tangente est nulle. On résout donc l'équation $f'(x) = 0$ pour x.

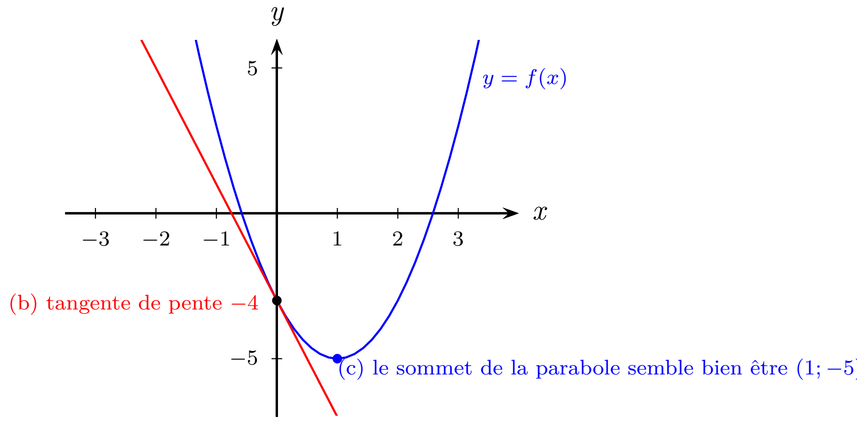
$$f'(x) = 0 \iff 4x - 4 = 0 \iff x = 1.$$

Le sommet est donc de coordonnées $(1; f(1)) = (1; -5)$.

(d) À l'aide de la forme pente-point (avec le point $(0; f(0)) = (0; -3)$ et la pente $a = f'(0) = -4$) on trouve l'équation de la droite tangente en $x = 0$.

$$y - (-3) = -4(x - 0) \iff y = -4x - 3.$$

On trace les graphes de la fonction et de la droite dans une même fenêtre graphique que l'on reproduit ci-dessous.



Validation. On peut aussi vérifier que les coordonnées du sommet sont bien $(1;-5)$ par complétion de carré. *Faites-le.*

La définition 9.1 est très utile pour comprendre la dérivée dans un contexte, trouver ses unités et l'interpréter, mais elle n'est pas efficace pour le calcul d'une dérivée. Pour le calcul d'une dérivée, on utilise plutôt des règles et des formules qui se déduisent de la définition.

Dans ce qui suit, on considère que c et n sont des constantes et que $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions.

Quelques règles de dérivation

$[c \cdot f(x)]'$	$=$	$c \cdot f'(x)$	dérivée d'une constante par une fonction
$[f(x)+g(x)]'$	$=$	$f'(x)+g'(x)$	dérivée d'une somme
$[f(x)-g(x)]'$	$=$	$f'(x)-g'(x)$	dérivée d'une différence

Quelques formules de dérivation

$[x^n]'$	$=$	nx^{n-1}	dérivée d'une puissance
$[x]'$	$=$	1	cas particulier de la règle précédente avec $n=1$
$[c]'$	$=$	0	dérivée d'une constante

Exemple 9.6

Calculez la dérivée de la fonction $f(x)=2x^3-7x^2-17x+10$ à l'aide des règles et des formules ci-dessus.

Solution :

Les règles pour une somme et une différence impliquent qu'on dérive chacun des termes séparément.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3)'-(7x^2)'-(17x)'+(10)' && \text{on utilise les règles pour } [f(x)\pm g(x)]' \\ &= 2(x^3)'-7(x^2)'-17(x)'+0 && \text{on utilise la règle pour } [c\cdot f(x)]' \text{ et } (c)'=0 \\ &= 2(3x^2)-7(2x)-17(1) && \text{on utilise la formule pour } [x^n]' \text{ avec } n=3,\ n=2 \text{ et } n=1 \\ &= 6x^2-14x-17 && \text{on réduit} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)=6x^2-14x-17$.

Exemple 9.7

Répondez aux questions suivantes en utilisant le contexte de l'exemple 9.1.

(a) Vérifez que la dérivée de $p(t) = 2 + 30t - 4{,}9t^2$ est $p'(t) = 20{,}2 - 4{,}9t$ à l'aide des règles et des formules de dérivation.

(b) À quelle vitesse la balle est-elle lancée ?

(c) À quelle vitesse la balle frappe le sol ?

Solution :

(a) On dérive chaque terme séparément.

> **Attention !** Dans ce cas, la variable indépendante est t et non x. On dérive donc par rapport à t, c'est-à-dire qu'on remplace x par t dans toutes les règles et les formules de dérivation.

$$\begin{aligned} p'(t) &= (2)' + (30t)' - (4{,}9t^2)' && \text{on utilise les règles } [f(t) \pm g(t)]' = f\,'(t) \pm g'(t) \\ &= 0 + 30(t)' - 4{,}9(t^2) && \text{on utilise les règles } [c \cdot f(t)]' = c \cdot f\,'(t) \text{ et } (c)' = 0 \\ &= 30(1) - 4{,}9 \cdot 2t && \text{on utilise la formule } [t^n]' = nt^{n-1} \text{ avec } n = 1 \text{ et } n = 2 \\ &= 30 - 9{,}8t && \text{on réduit} \end{aligned}$$

(b) Puisque la balle est lancée à $t = 0$, on calcule $p'(0) = 30 - 9{,}8(0) = 30$ m/s.

(c) Comme la balle touche le sol à $t \approx 6{,}188$ s, tel que calculé à l'exemple 9.1, elle frappe le sol à $p'(6{,}188) \approx -30{,}6$ m/s. Le signe de la dérivée confirme que la balle est en descente lorsqu'elle frappe le sol.

Exercices

9.1 À partir d'une reproduction du graphique ci-dessous, représentez les quantités suivantes.

(a) $f(4)$

(b) $f(4) - f(1)$

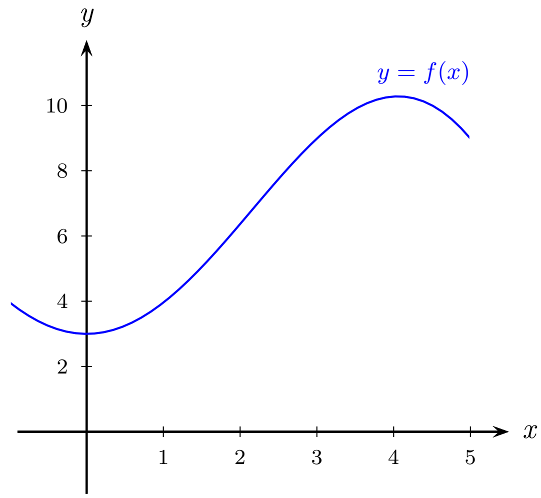
(c) $TVM_{[1;4]} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$

(d) $TVM_{[1;3]} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$

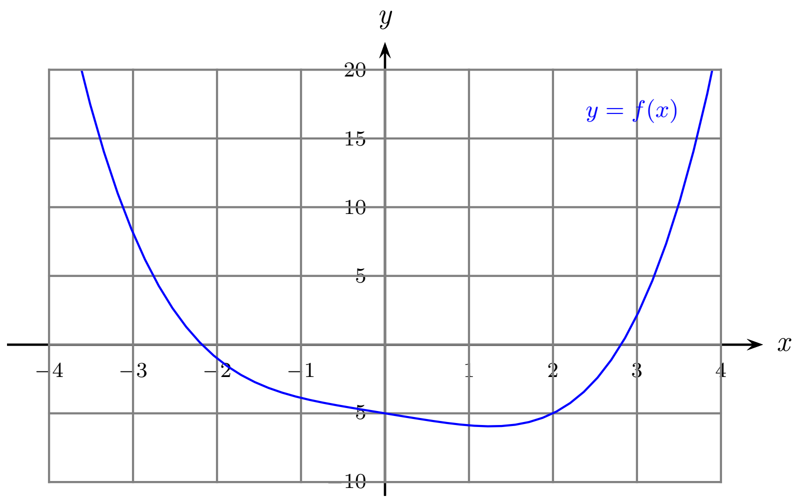
(e) $TVM_{[1;2]} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

(f) $TVM_{[1;1,5]} = \frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1}$

(g) $f'(1)$



9.2 En observant le graphe de la fonction f ci-dessous, estimez les valeurs demandées.



(a) $f(-3)$ (c) $f(0)$ (e) $f(2)$ (g) $f(3)$

(b) $f'(-3)$ (d) $f'(0)$ (f) $f'(2)$ (h) $f'(3)$

(i) Quelles sont les valeurs x pour lesquelles $f(x) = 0$?

(j) Quelles sont les valeurs x pour lesquelles $f'(x) = 0$?

(k) Pour quelles valeurs x entre -4 et 4, $f(x)$ est-elle minimale ? Que vaut alors $f(x)$? $f'(x)$?

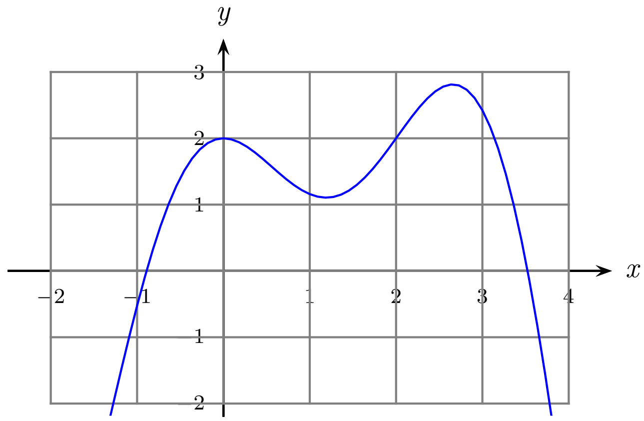
9.3 Identifiez sur le graphe de $y = f(x)$ de la figure suivante

(a) les points de la courbe où la dérivée est négative ;

(b) les points de la courbe où la fonction est décroissante ;

(c) les points de la courbe où la valeur de la fonction est négative ;

(d) les points de la courbe où la dérivée est zéro.



9.4 Un économiste s'intéresse à la manière dont le prix de certains articles influe sur les ventes. Il émet l'hypothèse que la quantité d'articles vendues q est une fonction du prix de vente p \$ d'un article, $q = f(p)$.

(a) Que signifie l'énoncé $f(150) = 2000$ dans le contexte ?

(b) Que signifie l'énoncé $TVM_{[150,155]} = -27$ dans le contexte ?

(c) Que signifie l'énoncé $f'(150) = -25$ dans le contexte ?

(d) À l'aide des informations précédentes, estimez combien d'articles seront vendus lorsque le prix d'un article sera 154 \$.

9.5 La pression P (en kPa) est fonction de la profondeur d (en m) où elle est mesurée en mer.

(a) Expliquez ce que signifie $P(6) = 161$ dans le contexte.

(b) Quelles sont les unités de $TVM_{[6;9]}$? Dans ce contexte, que signifie l'énoncé $TVM_{[6;9]} = 10{,}7$?

(c) Quelles sont les unités de $P'(6)$? Dans ce contexte, que signifie l'énoncé $P'(6) = 10$?

(d) Sachant seulement que $P(6) = 161$ et $P'(6) = 10$, estimez quelle sera la pression à 9 mètres de profondeur.

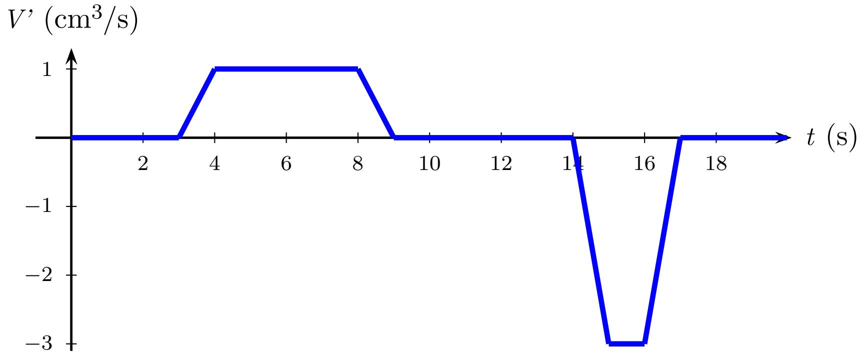
9.6 La température T (en °C) d'un plat froid dans un four chaud est modélisée par $T = f(t)$, où t est le temps mesuré en minutes depuis que le plat a été placé au four.

(a) Quel est le signe de $f'(t)$? Pourquoi ?

(b) Quelles sont les unités de $f'(20)$? Dans ce contexte, que signifie l'énoncé $f'(20) = 1{,}1$?

(c) Si $f(20) = 30$ et $f'(20) = 1{,}1$, combien de temps s'écoulera entre le moment où le plat est mis au four et celui où sa température atteint 75 °C ?

9.7 Un enfant gonfle un ballon, le regarde un instant, puis laisse l'air s'en échapper à un taux constant. Le graphe ci-dessous représente la dérivée de la fonction volume au temps t (en secondes). Répondez aux questions suivantes à l'aide du graphique ci-dessous.



Attention ! Le graphe est celui de la fonction $V'(t)$, pas celui de $V(t)$.

(a) Combien de temps s'écoule avant que l'enfant se mette à souffler le ballon ?
(b) À quel moment l'enfant finit-il de souffler le ballon ?
(c) À quel moment l'enfant commence-t-il à laisser l'air s'échapper du ballon ?

9.8 Soit $f(x) = 2x^2 - 3x$. Calculez les dérivées suivantes à l'aide de la définition de la dérivée.

(a) $f'(2)$ (b) $f'(-1)$ (c) $f'(x)$

9.9 Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Calculez $f'(x)$ à l'aide de la définition de la dérivée.
(b) Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = -3$.
(c) Vérifiez votre réponse en traçant le graphe de la fonction et de la droite dans une même fenêtre graphique.

9.10 Calculez la dérivée des fonctions suivantes en utilisant seulement les règles et les formules de dérivation énoncées dans l'encadré de la page 173.

(a) $f(x) = 3 - 2x$
(b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$
(c) $f(x) = 5$
(d) $f(x) = 4x^5 + x^3 - x + 5$
(e) $f(x) = \frac{4x^5+x^3-x+5}{4}$
(f) $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$
(g) $f(x) = 3x^{-2} + 2x^{-3}$
(h) $f(x) = 7x + \frac{3}{5x}$
(i) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$
(j) $y = \frac{2}{3x} - \frac{4}{5x^2}$
(k) $f(x) = \sqrt[2]{x^7}$
(l) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[2]{x^7}}$
(m) $f(x) = \frac{2}{5\sqrt[3]{x^5}}$
(n) $y = \sqrt{t}(t+1)$
(o) $y = \frac{t^2-2\sqrt{t}}{t}$
(p) $f(x) = \frac{7\sqrt[3]{x^4}-1}{2x}$

9.11 Considérez la courbe d'équation $y = \frac{x^3-2x}{3}$.

(a) Déterminez l'équation de la droite tangente à la courbe en $x = -2$.
(b) Déterminez l'équation de la droite normale (c'est-à-dire la droite perpendiculaire) à $y = \frac{x^3-2x}{3}$ en $x = -2$.
(c) Faites tracer les graphes de la fonction, de la tangente et de la normale dans une même fenêtre pour vérifier votre résultat.

9.12 Utilisez la dérivée pour déterminer si les fonctions suivantes sont croissantes ou si elles sont décroissantes en $x = -1$. Validez vos réponses en examinant le graphe de la fonction.

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

(b) $f(x) = 3x(x^2 + 1)$

9.13 À l'exercice 7.34 on décrit la relation d'Ehrenberg par l'équation

$$\ln m = 1{,}84h + \ln 2{,}5$$

qui met en relation la taille h (en mètres) et la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans. Calculez $m'(1{,}3)$ à l'aide de votre calculatrice. Comment peut-on interpréter cette valeur sur le graphe de $m(h)$? En quoi cette interprétation diffère-t-elle de celle donnée à l'exercice 7.34 (c) ? *Produisez un graphique commenté.*

Réponses

Chapitre 5

Rép. 5.1
(a) Lorsqu'un article est vendu à 150 $, il s'en vend 2000.
(b) Lorsque la voiture roule à 110 km/h, elle consomme 7,5 litres par 100 km.
(c) Lorsque la température de l'air est 25°C, la pression de vapeur de l'air est 31,7 mbar.

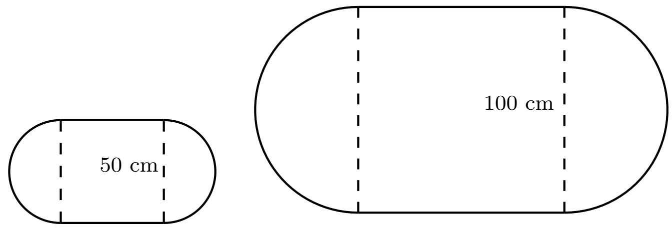
Rép. 5.2
(a) $f(5) = 17$
(b) $f(t) = 3t + 2$
(c) $f(x+1) = 3(x+1) + 2 = 3x + 5$
(d) $f(-x) = 3(-x) + 2 = -3x + 2$
(e) $g(0) = 2$
(f) $g(-2) = 16$
(g) $g(2a) = 3(2a)^2 - (2a) + 2 = 12a^2 - 2a + 2$
(h) $g(-x) = 3(-x)^2 - (-x) + 2 = 3x^2 + x + 2$
(i) $h(9) = 2$
(j) $h(5) = 0$
(k) $h(x) = \sqrt{x-5}$
(l) $h(x+5) = \sqrt{x}$
(m) $k(2) = -5$
(n) $k(-2) = -1$
(o) $k(-x) = \dfrac{2(-x)+1}{1-(-x)} = \dfrac{-2x+1}{1+x}$
(p) $k(3t) = \dfrac{2(3t)+1}{1-(3t)} = \dfrac{6t+1}{1-3t}$

Rép. 5.3 $k = -9/4$

Rép. 5.4
(a) $(50\text{ cm})^2 + \pi \cdot (25\text{ cm})^2 = 2500 + 625\pi\text{ cm}^2 \approx 4463{,}5\text{ cm}^2$
(b) $(1\text{ m})^2 + \pi \cdot (\frac{1}{2}\text{ m})^2 = (1 + \frac{\pi}{4})\text{ m}^2 \approx 1{,}785\text{ m}^2$
(c) $A(d) = d^2 + \pi\frac{d^2}{4} = \frac{4+\pi}{4}d^2$
$A(50) = 625(\pi + 4) \approx 4463{,}5\text{ cm}^2$
$A(1) = \frac{\pi+4}{4} \approx 1{,}785\text{ m}^2$.
On peut vérifier que les réponses sont plausibles en convertissant les m² en cm² et en examinant des croquis de la fenêtre dessinés, grosso modo, à l'échelle.

$$\begin{aligned} A(1) &= \frac{\pi+4}{4} \approx 1{,}785398\text{ m}^2 \\ &= 1{,}785398 \cdot (1\text{ m})^2 = 1{,}785398 \cdot (100\text{ cm})^2 \\ &= 1{,}785398 \cdot 10000\text{ cm}^2 = 17853{,}98\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, si le diamètre est 100 cm, la surface de la fenêtre sera environ 4 fois plus grande que s'il était de 50 cm. Ceci semble cohérent avec les dessins suivants.



Rép. 5.5 (a) $f(0) \approx 3$ (b) $f(-2) \approx 1$ (c) $f(-1{,}5) \approx 1{,}5$ (d) $f(1{,}5) \approx 0$ (e) $f(3) \approx -3$

Rép. 5.6
(a) $x + y = 100 \iff y = 100 - x$, y est donc une fonction de x, $\mathrm{Dom}(100 - x) = \mathbb{R}$.
(b) $x - 3 = y^2 \iff y = \pm\sqrt{x-3}$, y n'est donc pas une fonction de x.
(c) $y = -\sqrt{3-x}$, y est une fonction de x, $\mathrm{Dom}\big(-\sqrt{3-x}\big) =]-\infty; 3]$.
(d) $3x + 2y = 1 \iff y = \frac{1-3x}{2}$, y est donc une fonction de x, $\mathrm{Dom}\big(\frac{1-3x}{2}\big) = \mathbb{R}$.
(e) $x + y^3 = 27 \iff y = \sqrt[3]{27-x}$, puisqu'il n'y a qu'une seule racine cubique, y est une fonction de x, $\mathrm{Dom}\big(\sqrt[3]{27-x}\big) = \mathbb{R}$.
(f) $x^3 + 1 = y^2 \iff y = \pm\sqrt{x^3+1}$, y n'est donc pas une fonction de x.

Rép. 5.7
(a) non
(b) oui, $\mathrm{Dom}(f) = [-3; 3]$, $\mathrm{Im}(f) = \{-3; -2; 1; 2\}$
(c) oui, $\mathrm{Dom}(f) = [-2; 3[$, $\mathrm{Im}(f) = [-3; 6[$
(d) non
(e) oui, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \{2{,}5\}$
(f) oui, $\mathrm{Dom}(f) = \{-2; -1{,}5; 0; 1; 2; 3\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{-3; -2{,}5; 0; 1; 3{,}5\}$
(g) non
(h) oui, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

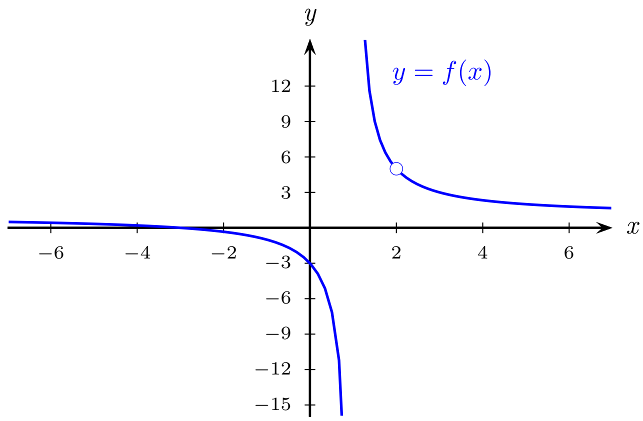
Rép. 5.8
(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$
(b) $\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \frac{x+3}{x-1}$
Passer le curseur sur le triangle jaune fait paraître le commentaire *Le domaine du résultat peut être plus grand que le domaine de l'entrée*. En effet, le domaine de la fonction $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il possède une restriction de moins que le domaine de f. Pour pouvoir simplifier le facteur $(x-2)$ commun au numérateur et au dénominateur de f,

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$$

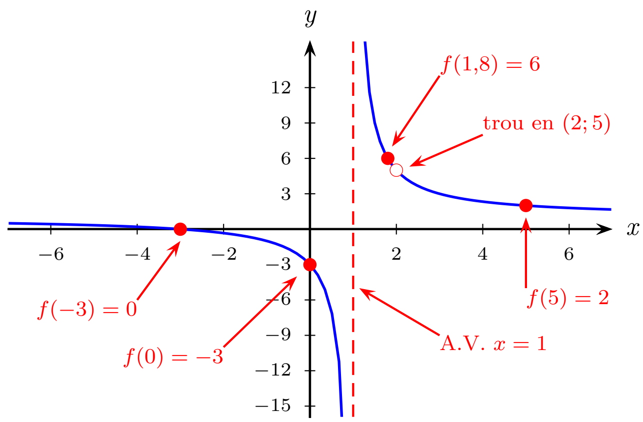
on doit supposer que $(x-2) \neq 0$, c'est-à-dire que $x \neq 2$, car l'expression de gauche n'est pas égale à celle de droite en $x = 2$

$$\left.\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}\right|_{x=2} \notin \mathbb{R} \text{ tandis que } \left.\frac{x+3}{x-1}\right|_{x=2} = \frac{5}{1} = 5.$$

(c) La fonction f n'est pas définie en $x = 1$, ni en $x = 2$. L'asymptote verticale $x = 1$ est facile à voir sur le graphique tel qu'il est tracé par la calculatrice. Par contre, on ne voit rien de particulier à l'écran en $x = 2$. Si on utilise le mode trace de la calculatrice et on entre la valeur 2, la calculatrice indiquera (2,undef). Il y a donc un trou dans la courbe en $x = 2$ même si ça ne se voit pas à l'écran. L'ordonnée du trou est $\left.\frac{x+3}{x-1}\right|_{x=2} = 5$.

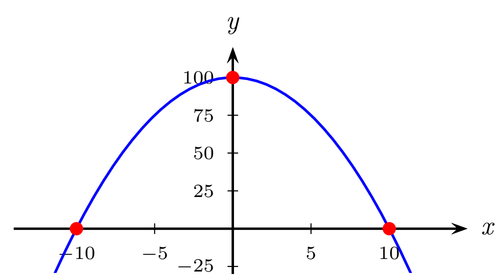


(d) $f(-3) = 0$, $f(0) = -3$, $f(1)$ n'est pas définie, $f(1{,}8) = 6$, $f(2)$ n'est pas définie, $f(5) = 2$

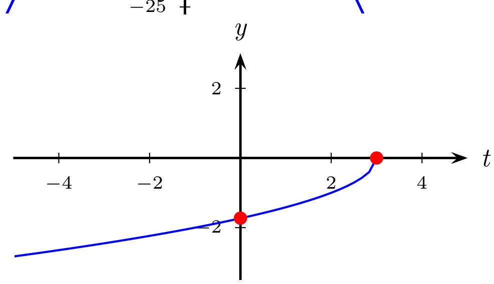


Rép. 5.9 $A(x) = \pi(10 - x)^2$, $\mathrm{Dom}(A) = [0; 10]$ et $\mathrm{Im}(A) = [0; 100\pi]$

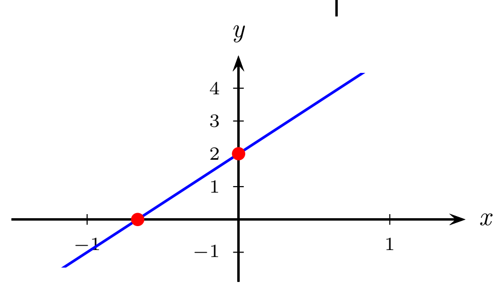
Rép. 5.10 (a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
l'ordonnée à l'origine : $f(0) = 100$
les zéros : $x = -10$ et $x = 10$



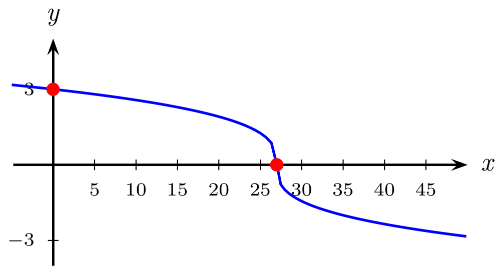
(b) $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty; 3]$
l'ordonnée à l'origine : $-\sqrt{3} \approx -1{,}73$
le zéro : $t = 3$



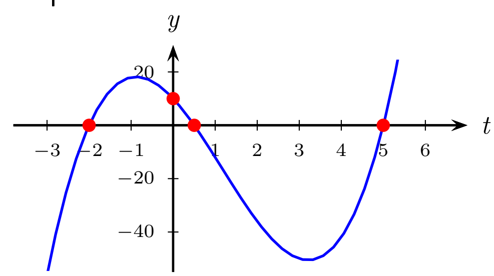
(c) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
l'ordonnée à l'origine : $f(0) = 2$
le zéro : $x = -2/3$



(d) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
l'ordonnée à l'origine : $f(0) = 3$
le zéro : $x = 27$



(e) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
l'ordonnée à l'origine : $f(0) = 10$
les zéros : $t = -2$, $t = 1/2$ et $t = 5$



Rép. 5.11 (a) $f(x) = 100 - x^2$ est strictement positive pour $x \in]-10; 10[$, strictement négative pour $x \in]-\infty; -10[\cup]10; \infty[$ et nulle pour $x \in \{-10; 10\}$

(b) $f(t) = -\sqrt{3-t}$ est strictement négative pour $t \in]-\infty; 3[$ et nulle pour $t = 3$

(c) $f(x) = 3x + 2$ est strictement positive pour $x \in]-2/3; \infty[$, strictement négative pour $x \in]-\infty; -2/3[$ et nulle pour $x = -2/3$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{27-x}$ est strictement positive pour $x \in]-\infty; 27[$, strictement négative pour $x \in]27; \infty[$ et nulle pour $x = 27$

(e) $f(t) = 2t^3 - 7t^2 - 17t + 10$ est strictement positive pour $t \in]-2; 0{,}5[\cup]5; \infty[$, strictement négative pour $t \in]-\infty; -2[\cup]0{,}5; 5[$ et nulle pour $t \in \{-2; 0{,}5; 5\}$

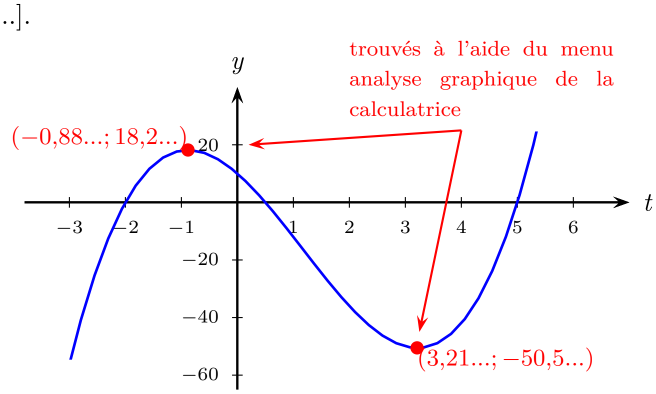
Rép. 5.12 (a) La fonction possède un maximum en $x = 0$ de $f(0) = 100$, il s'agit d'un maximum local qui est aussi absolu. La fonction est croissante sur $]-\infty; 0]$ et elle est décroissante sur $[0; \infty[$.

(b) La fonction possède un maximum en $x = 3$ de $f(3) = 0$; il s'agit d'un maximum local qui est aussi absolu. La fonction est croissante sur son domaine $]-\infty; 3]$.

(c) La fonction ne possède pas de valeurs extrêmes, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

(d) La fonction ne possède pas de valeurs extrêmes, elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(e) La fonction possède un maximum local en $x = -0{,}88...$ de $f(-0{,}88...) = 18{,}17...$
La fonction possède un minimum local en $x = 3{,}21...$ de $f(3{,}21...) = -50{,}5...$
La fonction ne possède ni un maximum, ni un minimum absolu.
La fonction est croissante sur $]-\infty; -0{,}88...] \cup [3{,}21...; \infty[$ et est décroissante sur $[-0{,}88...; 3{,}21...]$.



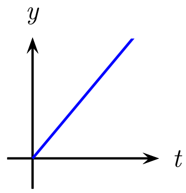
Rép. 5.13 (a) (ii) La fonction p est croissante.

(b) (i) La fonction P est négative. La fonction n'est pas décroissante, car dire que le déficit diminue signifie que la courbe du profit P remonte, mais dans les valeurs négatives.

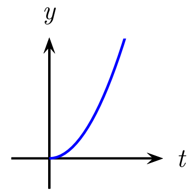
(c) La fonction h est (i) positive et (iv) décroissante.

La fonction v est (vi) négative, car la hauteur diminue, donc la variation de hauteur est négative. Comme l'objet accélère vers le bas, la *grandeur* de la vitesse, $|v(t)|$, augmente avec le temps t, mais les valeurs de $v(t)$ affectées de leur signe négatif, elles, diminuent, ce qui implique que la fonction v est (viii) décroissante.

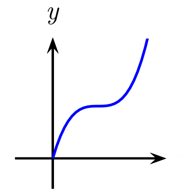
Rép. 5.14



(a)



(b)



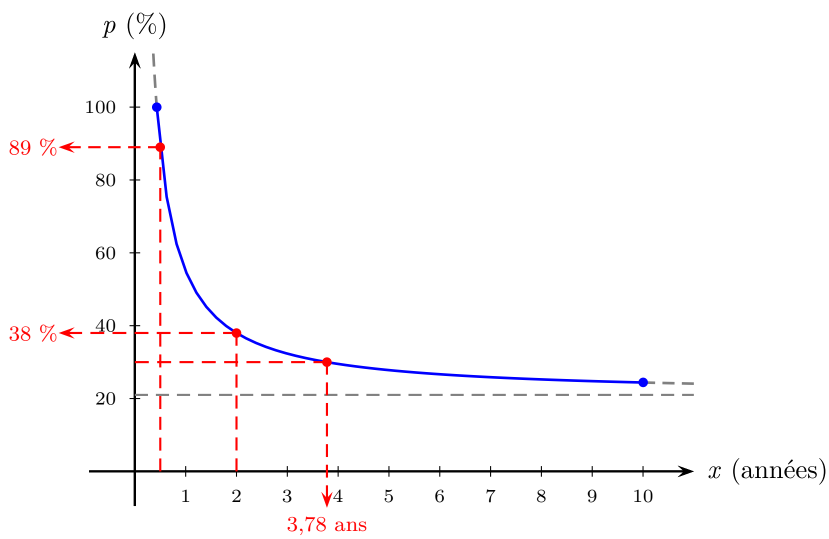
(c)

Rép. 5.15 (a) $p(2) = 38$ %

(b) $p(0{,}5) = 89$ %

(c) $p(x) = 30 \iff x \approx 3{,}78$ ans donc environ 3 ans et 9 mois

(d) Puisque les variables impliquées sont positives, on illustre la courbe dans le premier quadrant.



(e) Plus un enfant est infecté vieux, moins il court le risque de développer une forme chronique de la maladie.

Rép. 5.16 (a) $\frac{225}{4} + \pi\left(\frac{35}{\pi}\right)^2 \approx 446{,}2$ cm^2

(b) Il y a x cm de fil pour le carré et $100 - x$ cm pour le cercle. Puisque la circonférence du cercle est $2\pi r = 100 - x$, $r = \frac{100-x}{2\pi}$ et l'aire totale est

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{100 - x}{2\pi}\right)^2$$

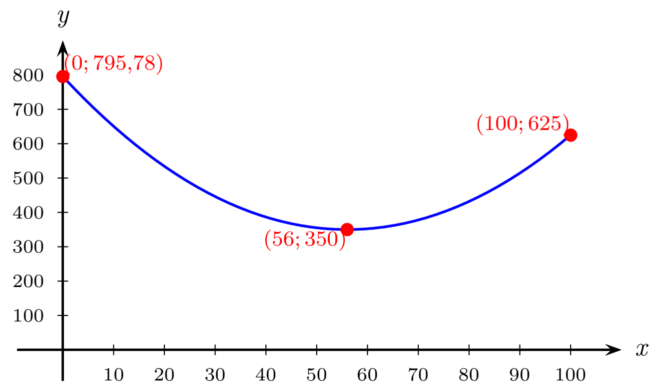
Le domaine contextuel est $[0; 100]$.

(c) La fenêtre $[-10; 110] \times [-100; 900]$ est appropriée. Voyez le graphique en (e).

(d) $x = 0$ signifie qu'on ne forme qu'un cercle (le périmètre du carré est de longueur 0) et l'ordonnée à l'origine $A(0) = \frac{2500}{\pi} \approx 795{,}8$ cm^2 est l'aire de ce cercle.

(e) Maximums locaux d'environ 795,8 en $x = 0$ et de 625 en $x = 100$. Le maximum global sur l'intervalle $[0; 100]$ est d'environ 795,8 en $x = 0$. Ceci signifie que la surface totale sera maximale si on ne forme qu'un cercle.

Minimum global d'environ 350 en $x \approx 56$. La fonction est décroissante sur $[0;56]$ et croissante sur l'intervalle $[56;100]$. Ainsi, lorsque le périmètre du carré augmente de 0 cm à 56 cm, la surface totale diminue et, lorsque le périmètre du carré augmente de 56 cm à 100 cm, la surface totale augmente.



(f) La surface totale maximale est environ 795,8 cm². Elle est obtenue en ne formant qu'un cercle de rayon

$$r = \left.\frac{100-x}{2\pi}\right|_{x=0} \approx 15{,}92 \text{ cm.}$$

La surface totale minimale est environ 350 cm² et est obtenue en $x \approx 56$. La longueur des côtés du carré est alors

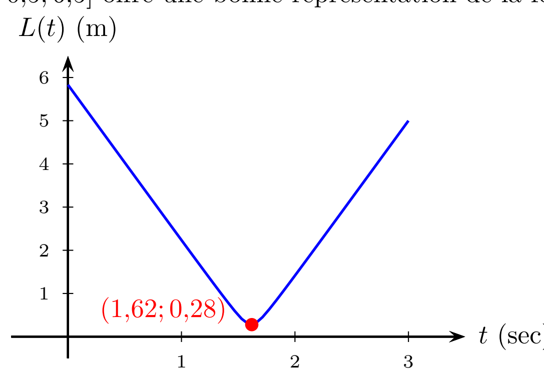
$$\left.\frac{x}{4}\right|_{x=56} \approx 14 \text{ cm}$$

et le rayon est

$$r = \left.\frac{100-x}{2\pi}\right|_{x=56} \approx 7 \text{ cm.}$$

Rép. 5.17 (a) $L(2) = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m

(b) La fenêtre $[-0{,}5;3{,}5] \times [-0{,}5;6{,}5]$ offre une bonne représentation de la fonction.



(c) Le graphique de la fonction $L(t)$ montre que la distance entre les objets décroît sur $[0;1{,}62]$ et qu'elle croît sur $[1{,}62;3]$. Ceci signifie qu'entre 0 et environ 1,62 seconde, les objets se rapprochent l'un de l'autre, et qu'à $t \approx 1{,}62$ seconde, ils commencent à s'éloigner, et ce, jusqu'à $t = 3$ secondes.

(d) Comme l'illustre le graphique en (b), la fonction $L(t)$ atteint un minimum global sur l'intervalle $[0;3]$. La distance minimale entre les objets est d'environ 0,28 m, à $t \approx 1{,}62$ seconde.

Rép. 5.18 L'objet part 18 mètres à gauche du point de référence (l'ordonnée à l'origine est -18) et se dirige vers la droite (la fonction est négative et croissante).

Après un peu plus d'une minute, l'objet passe par le point de référence (la fonction possède un zéro) et continue à se déplacer vers la droite (la fonction est toujours croissante, mais elle devient positive).

Après 2 minutes, l'objet change de direction pour aller vers la gauche (la fonction est positive et devient décroissante), passe par le point de référence (la fonction possède un zéro) à la 3e minute et continue vers la gauche (la fonction est décroissante) jusqu'à la 4e minute. Après 4 minutes, l'objet change à nouveau de direction pour aller vers la droite (la fonction est croissante).

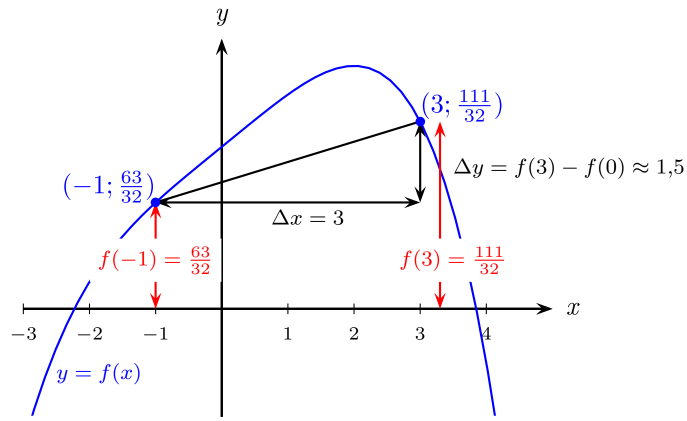
t	0	$]0;1{,}27[$	1,27	$]1{,}27;2[$	2	$]2;3[$	3	$]3;4[$	4	$]4;4{,}73[$	4,73	$]4{,}73;5[$	5
p	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\nearrow$ *ou* $\searrow$			$\nearrow$		$\bullet$		$\searrow$		$\bullet$		$\nearrow$		

Rép. 5.19
(a) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + 1 = 3$
(b) $(g-f)(-1) = g(-1) - f(-1) = 5 - (-1) = 6$
(c) $(g \cdot f)(1) = g(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 5 = 15$
(d) $(f \div g)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2}{1} = 2$
(e) $(g+f)(x) = g(x) + f(x) = (3x^2 - x + 1) + (3x + 2) = 3x^2 + 2x + 3$
(f) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x+2) - (3x^2 - x + 1) = -3x^2 + 4x + 1$
(g) $(g \cdot f)(x) = g(x) \cdot f(x) = (3x^2 - x + 1)(3x + 2) = 9x^3 + 3x^2 + x + 2$
(h) $(f \div g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{3x^2-x+1}$
(i) $(f \circ i)(-2) = f(i(-2)) = f(-1) = 3(-1) + 2 = -1$
(j) $(f \circ h)(12) = f(h(12)) = f(3) = 11$
(k) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = 3\sqrt{x-3} + 2$
(l) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x+2) = 3(3x+2) + 2 = 9x + 8$
(m) $(h \circ f \circ g)(0) = h(f(g(0))) = h(f(1)) = h(5) = \sqrt{2}$
(n) $(i \circ h)(2x) = i(h(2x)) = i(\sqrt{2x-3}) = \frac{2\sqrt{2x-3}+1}{1-\sqrt{2x-3}}$
(o) $\frac{f(2x)}{2} = \frac{3(2x)+2}{2} = \frac{6x+2}{2} = 3x + 1$

Rép. 5.20
(a) $\mathrm{Dom}(f) = [-4;4] \setminus \{2\}$
(b) $\mathrm{Im}(f) =]-1;2[$
(c) $f(3) \approx 1$
(d) $f(-2) \approx 1$
(e) $\mathrm{Dom}(g) =]-4;4[$
(f) $g(0) \approx -4$
(g) $g(4) \nexists$
(h) $(f+g)(3) = f(3) + g(3) \approx 1 + (-2) = -1$
(i) $(g-f)(-2) = g(-2) - f(-2) \approx -4 - 1 = -5$
(j) $(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) \nexists$, car $f(2) \nexists$
(k) $(g \div f)(3) = g(3) \div f(3) \approx -2 \div 1 = -2$
(l) $(f \circ g)(3) = f(g(3)) \approx f(-2) \approx 1$

Rép. 5.21
(a) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + (-1) = 2$
(b) $(f \cdot g)(2) = -3$
(c) $(f \cdot g)(-1) = 0$
(d) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(2) = -1$
(e) $(f \circ g)(-1) = -5$
(f) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1) \nexists$
(g) $(f \circ g)(0) = -2$
(h) $(g \circ g)(0) = 4$

Rép. 5.22
(a) $f(-1) = \frac{63}{32} \approx 1{,}97$ est la distance entre l'axe des x et le point $(-1; \frac{63}{32})$
(b) $f(3) = \frac{111}{32} \approx 3{,}47$ est la distance entre l'axe des x et le point $(3; \frac{111}{32})$
(c) $f(3) - f(-1) = \frac{3}{2} = 1{,}5$ est la distance Δy entre les points $(3; \frac{63}{32})$ et $(3; \frac{111}{32})$
(d) $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$ est la pente de la droite passant par les points $(-1; \frac{63}{32})$ et $(3; \frac{111}{32})$



Rép. 5.23 (a) $y = 5t - 1$, t est la variable indépendante et y est la variable dépendante.

(b) $d = \sqrt{4 + y^2}$, y est la variable indépendante, tandis que d est la variable dépendante.

(c) $(d \circ g)(t) = d(g(t)) = \sqrt{4 + (5t-1)^2}$
Cette fonction donne la distance entre le promeneur et l'antenne, t heures après son départ de la position $(2; -1)$.

Rép. 5.24 (a) $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$ et $(g \circ f)(x) = (2x+1)^2$

(b) $(f \circ g)(x) = 1 - 2(-x) = 1 + 2x$ et $(g \circ f)(x) = -(1 - 2x) = 2x - 1$

(c) $(f \circ g)(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ et $(g \circ f)(x) = \frac{1}{1-2x}$

(d) $(f \circ g)(x) = 1 - 2\sqrt[3]{x-1}$ et $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{(1-2x) - 1} = \sqrt[3]{-2x}$

(e) $(f \circ g)(x) = \sqrt{3 - (x^2+3)} = \sqrt{-x^2}$ qui n'est pas à valeur dans $\mathbb{R}$
et $(g \circ f)(x) = (\sqrt{3-x})^2 + 3 = 3 - x + 3 = 6 - x$

(f) $(f \circ g)(x) = 2\left(\frac{5+x}{5-x}\right) + 1 = \frac{15+x}{5-x}$ et $(g \circ f)(x) = \frac{5+(2x+1)}{5-(2x+1)} = \frac{6+2x}{4-2x} = \frac{3+x}{2-x}$

Rép. 5.25 (a) $f(x) = x^5$ et $g(x) = 4 - x$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x + 2$

(c) $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 3x + 2$

(e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{2-x}}$ et $g(x) = 3x$

(f) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ et $g(x) = x^2$

Rép. 5.26 (a) $V(h) = V_{\text{initial}} - V_{\text{restant}} = 8 - \pi(1)^2 h = 8 - \pi h$

(b) $h(V) = \dfrac{8 - V}{\pi}$

(c) $h(t) = \dfrac{8 - 0{,}7t}{\pi}$

(d) $h(t) = \dfrac{24 - t^2}{3\pi}$

Rép. 5.27 (a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x) = \frac{4x}{4} = x$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{x}{4}) = 4(\frac{x}{4}) = x$
elles sont donc réciproques l'une de l'autre

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(\frac{x-3}{2}) + 3 = (x-3) + 3 = x$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(2x+3)-3}{2} = \frac{2x}{2} = x$
elles sont donc réciproques l'une de l'autre

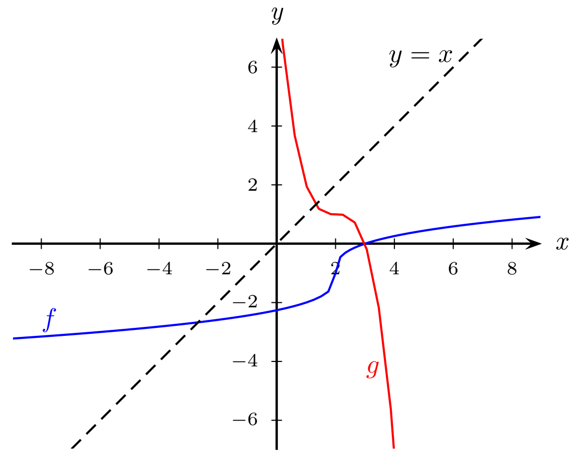
Rép. 5.28 (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x+5})^3 - 5 = (x+5) - 5 = x$
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3-5)+5} = \sqrt[3]{x^3} = x$

(b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x}$
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-(x-1)}{x}} = \frac{1}{1/x} = x$

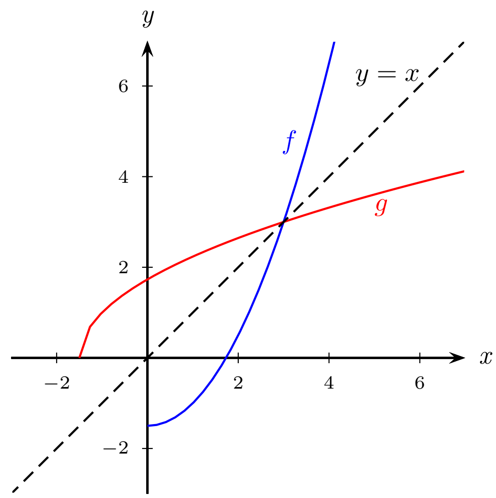
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = ... = x$

(c) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{5-2x}$

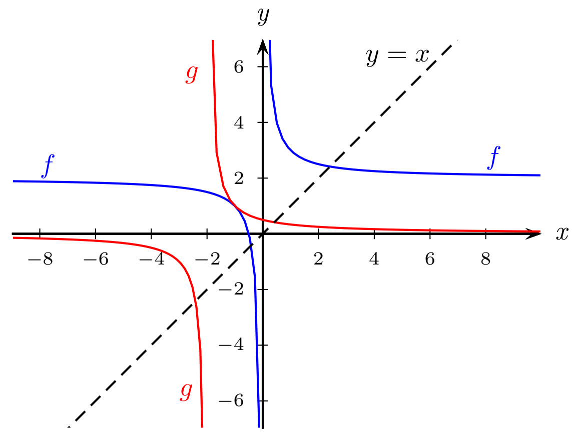
Rép. 5.29 (a) Les courbes ne peuvent pas représenter des fonctions réciproques, car g n'est pas l'image miroir de f par rapport à l'axe $y = x$. Si les fonctions étaient réciproques l'une de l'autre, le point $(3; 0)$ aurait comme réciproque le point $(0; 3)$, mais $(0; 3)$ n'est sur aucun des graphiques.

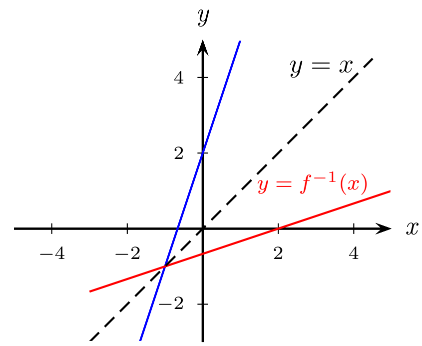


(b) Il est plausible que les courbes représentent des fonctions réciproques, car g semble bien être l'image miroir de f par rapport à l'axe $y = x$.

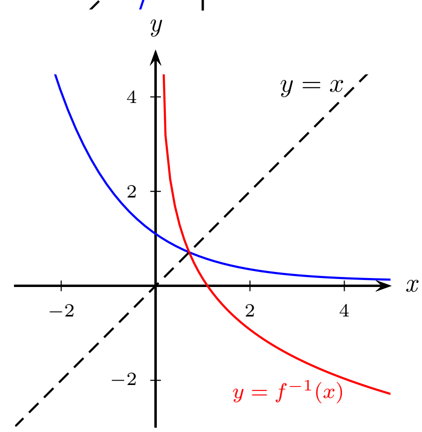


(c) Les courbes ne peuvent pas représenter des fonctions réciproques, car g n'est pas l'image miroir de f par rapport à l'axe $y = x$. Si une courbe intersecte la droite $y = x$, sa réciproque le devrait aussi au même endroit. Ce n'est pas le cas.



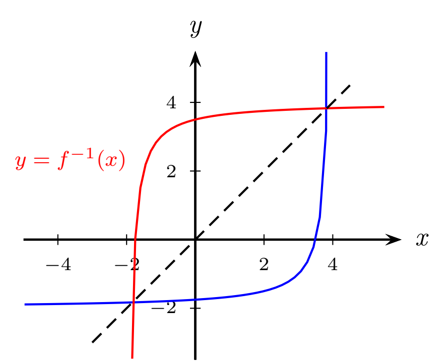


Rép. 5.30 (a) $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$



(b) $\mathrm{Dom}(f^{-1}) =]0;\infty[$
$\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

(c) La fonction n'est pas inversible sur $\mathbb{R}$



(d) $\mathrm{Dom}(f^{-1}) =]-2;\infty[$
$\mathrm{Im}(f^{-1}) =]-\infty;4[$

Rép. 5.31 (a) Environ 0,7, il y a donc 70 % des chances que deux personnes aient la même date d'anniversaire lorsqu'il y a 30 personnes à la soirée.

(b) $f(10) \approx 0{,}1$

Il y aurait environ 10 % des chances (ou 0,1 de probabilité) que deux personnes aient la même date d'anniversaire lorsqu'il y a 10 personnes à la soirée.

$f(40) \approx 0{,}88$

Il y aurait environ 88 % des chances (ou 0,88 de probabilité) que deux personnes aient la même date d'anniversaire lorsqu'il y a 40 personnes à la soirée.

(c) Plus il y a de personnes à la soirée, plus il est probable que deux personnes aient la même date d'anniversaire.

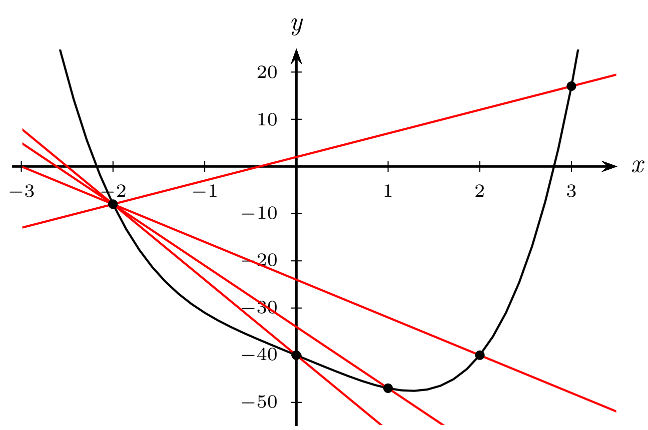
(d) Plus de 23

(e) Il y a au maximum une valeur d'abscisse pour chacune des ordonnées. Autrement dit, la fonction est injective.

(f) $f^{-1}(0{,}1) \approx 9$, $f^{-1}(0{,}5) \approx 23$ et $f^{-1}(0{,}95) \approx 48$. Le nombre de personnes présentes à la soirée est fonction de la probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire.

Rép. 5.32 (a) $TVM_{[-2;3]} = 5$, $TVM_{[-2;2]} = -8$, $TVM_{[-2;1]} = -13$ et $TVM_{[-2;0]} = -16$.

Il s'agit des pentes des droites sécantes passant par le point $(-2;-8)$ et, respectivement, $(3;17)$, $(2;-40)$, $(1;-47)$ et $(0;-40)$.

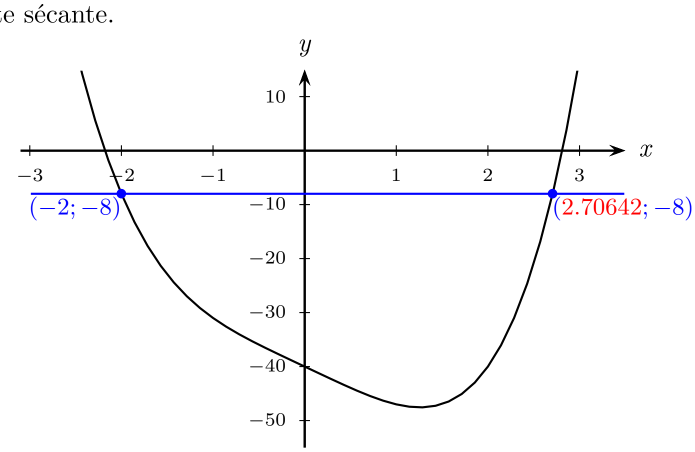


(b) Oui, $b \approx 2{,}70642$.

Puisque $TVM_{[-2;b]} = \frac{f(b)-f(-2)}{b-(-2)} = b^3 - 2b^2 + 4b - 16$, il suffit de résoudre l'équation

$$b^3 - 2b^2 + 4b - 16 = 0$$

pour b. On peut valider cette réponse graphiquement en tracant le graphique de la fonction et celui de la droite sécante.



Rép. 5.33 (a) Lorsque la température est de 15 °C, l'affaisement vertical est de 3,6 m.
(b) m/°C

Rép. 5.34 (a) 2 s après la mise en marche du robot, l'angle est de 15°.
(b) Dans l'intervalle de 2 à 4 s, l'angle du bras de robot avec l'horizontale augmente en moyenne de 3°/s.
(c) 24°

Rép. 5.35 (a) Lorsque le taux d'intérêt est de 4%, il faut 17,7 années pour doubler la valeur de l'investissement.
(b) $TVM_{[1;4]} = -17{,}\overline{3}$ années/(% d'intérêt). Lorsque le taux d'intérêt passe de 1 à 4%, le temps nécessaire pour voir l'investissement doubler chute en moyenne de 17,$\overline{3}$ ans par % d'intérêt supplémentaire.

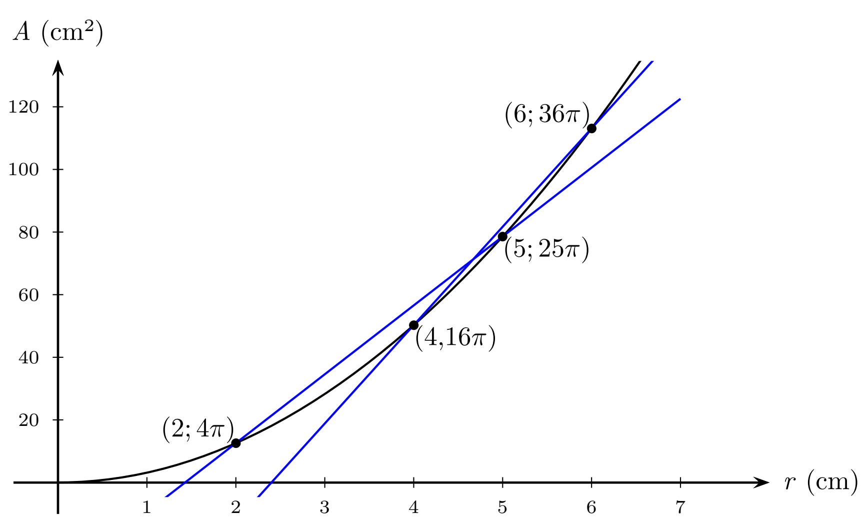
Rép. 5.36 (a) À 3 m du brûleur, la température de l'air est 66 °C.
(b) $TVM_{[3;5]} = -10$ °C/m.
(c) Lorsque la distance du brûleur passe de 3 à 5 m, la température chute en moyenne de 10 °C/m.
(d) $T(3{,}5) \approx 61$ °C.

Rép. 5.37 (a) La température de l'eau à midi : $f(0) \approx 10$°C, à 22 heures : $f(10) \approx 12$°C et à 6 heures le lendemain matin : $f(18) \approx 6$°C.
(b) L'eau sera à 12°C à 14 h et à 22 h.
(c) Avec $a = \frac{13{,}5-6{,}5}{8-16} = -0{,}875$ et le point $(8; 13{,}5)$, on trouve

$$y - 13{,}5 = -0{,}875(t-8) \Longleftrightarrow y = 20{,}5 - 0{,}875t.$$

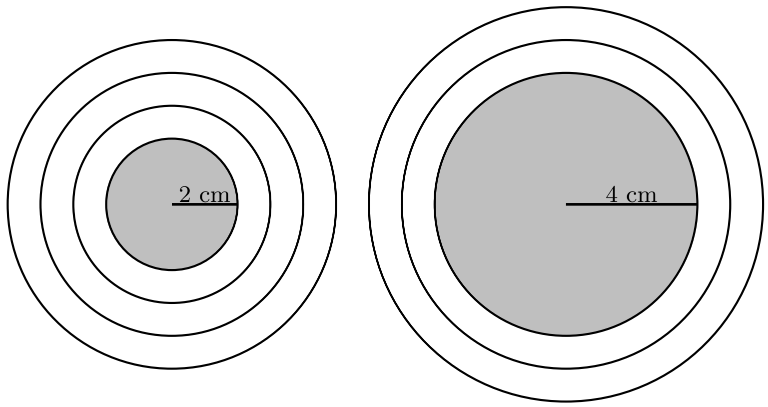
Entre 20 h et 4 h du matin, la température de l'eau diminue en moyenne de 0,875 °C/h.
(d) La pente de la droite passant par les points $(4; 13{,}5)$ et $(12; 10)$ sera négative et plus grande que celle trouvée en (c). Ceci est plausible, car la chute de température est généralement moins importante en début de soirée qu'en fin de soirée et dans la nuit.

Rép. 5.38 (a) $TVM_{[2;5]} = 7\pi \approx 21{,}99$ (cm^2 de surface)/(cm de rayon). Lorsque le rayon du cercle passe de 2 à 5 cm, l'aire du cercle augmente en moyenne de $7\pi \approx 21{,}99$ cm^2 par cm de rayon additionnel.
(b) $TVM_{[4;6]}$ sera plus grand que $TVM_{[2;5]}$, car la pente de la droite sécante passant par les points $(4; 16\pi) \approx (4; 50{,}27)$ et $(6; 36\pi) \approx (6; 113{,}1)$ est plus grande que celle de la droite passant par $(2; 4\pi) \approx (2; 12{,}57)$ et $(5; 25\pi) \approx (5; 78{,}54)$.



(c) L'ajout d'un cm au rayon d'un cercle de rayon 2 cm amène une augmentation de la surface du cercle qui sera moins importante que si le cercle était au départ de rayon 4 cm. L'augmentation moyenne de l'aire sera donc moins grande lorsque le rayon passe de 2 à 5 cm que l'augmentation moyenne lorsque le rayon passe de 4 à 6 cm.

En effet, $TVM_{[4;6]} = \frac{A(6)-A(4)}{6-4} = \frac{20\pi}{2} \approx 31{,}42$ (cm^2 de surface)/(cm de rayon). Même si l'augmentation de l'aire totale $A(6) - A(4) = 20\pi$ est moins grande que celle lorsque le rayon passe de 2 à 5 cm, elle se produit pour un plus petit changement de rayon.



Rép. 5.39 (a) $v(18) = \frac{331\sqrt{8827}}{91} \approx 341{,}74$ m/s.

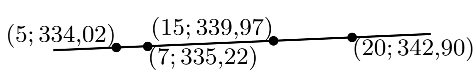
(b) $T = \frac{1094184}{109561} \approx 10$°C.

(c) $T = -273$ °C, le zéro absolu (ou 0 kelvin).

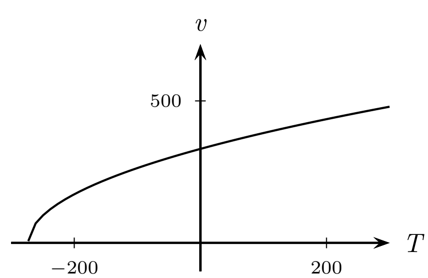
(d) $TVM_{[5;7]} \approx 0{,}5997$ (m/s)/°C.

(e) Il peut être difficile de distinguer les deux droites sécantes ; on pourrait les croire superposées. Ce qui n'est pas le cas. Il est alors préférable d'examiner le graphique de la fonction vitesse globalement. On constate alors que lorsque la température augmente, la vitesse augmente mais de façon de moins en moins importante. On peut donc conclure que la valeur $TVM_{[15;20]}$ sera plus petite que $TVM_{[5;7]}$, car les sécantes se rapprochent de plus en plus de l'horizontale.

Pour valider, calculons $TVM_{[15;20]} = \frac{v(20)-v(15)}{20-15} \approx 0{,}5877$ (m/s)/°C. Cette valeur est effectivement inférieure à celle de $TVM_{[5;7]}$.



à cette échelle, on ne distingue pas les deux droites.



Chapitre 6

Rép. 6.1 (a) et (c) définissent des fonctions linéaires.
Le graphique de l'équation en (b) est une droite verticale. Il ne s'agit donc pas d'une fonction.

Rép. 6.2 Oui, il s'agit bien d'une fonction, car pour chacun des mois, il n'y a qu'un maximum moyen possible. Cette fonction n'est pas linéaire, car le changement n'est pas constant. Par exemple, le maximum augmente de 7,9°C entre les mois de janvier et mars, pour un taux moyen de 3,95°C/mois, et baisse de 27°C entre les mois d'août et décembre, pour un taux moyen de −6,65°C/mois.

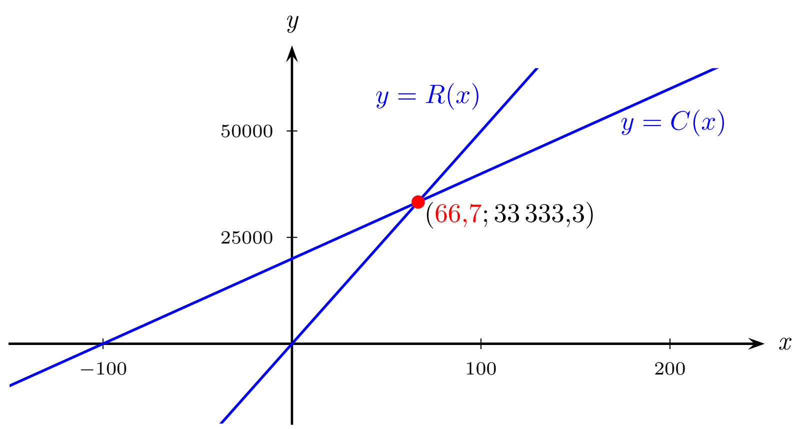
Rép. 6.3 (a) $a < 0$ et $b = 0$ (b) $a = 0$ et $b < 0$ (c) $a > 0$ et $b < 0$

Rép. 6.4 Pour vérifier les graphiques, utilisez votre calculatrice. Les autres résultats sont résumés au tableau suivant.

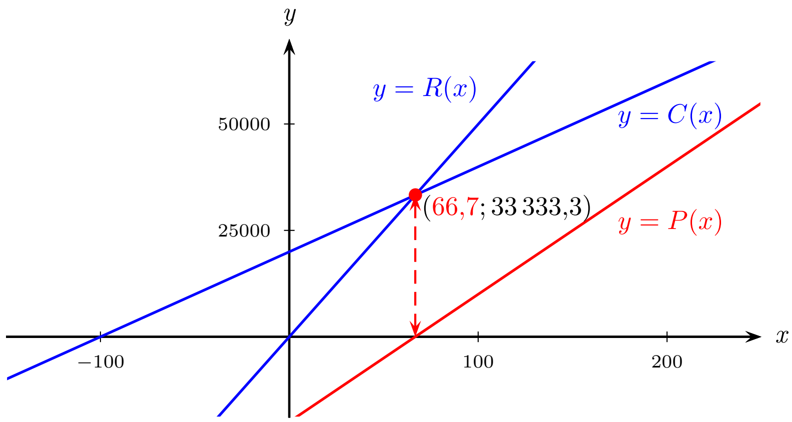
fonction	(a) $f(x) = 4x + 5$	(b) $f(x) = 2 - 3x$	(c) $f(x) = 3$
Dom(f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Im(f)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{3\}$
ordonnée à l'origine	5	2	3
zéro	$-\frac{5}{4}$	$\frac{2}{3}$	aucun
$f(x) > 0$	$]-\frac{5}{4}; \infty[$	$]-\infty; \frac{2}{3}[$	$\mathbb{R}$
$f(x) < 0$	$]-\infty; -\frac{5}{4}[$	$]\frac{2}{3}; \infty[$	jamais
$f(x) \nearrow$	$\mathbb{R}$	jamais	jamais
$f(x) \searrow$	jamais	$\mathbb{R}$	jamais
$f(x)$ constante	jamais	jamais	$\mathbb{R}$

Rép. 6.5
(a) 4 250 \$
(b) $S(x) = 2\,000 + 0{,}15x$
(c) $\text{Dom}(S) = [0; \infty[$
Il n'y a pas de limite quant à la rentrée d'argent possible à la clinique dans une semaine, mais celle-ci ne peut être négative.
$\text{Im}(S) = [2\,000; \infty[$
Colette ne sera jamais payée moins de 2 000 \$ par semaine.
Il faudrait plus d'information pour pouvoir déterminer la borne supérieure de l'image.

Rép. 6.6
(a) $C(x) = 20\,000 + 200x$
(b) $R(x) = 500x$
(c) $\frac{200}{3} \approx 67$ pièces
(d) Le seuil de rentabilité correspond à la valeur de l'abscisse du point d'intersection entre les fonctions de coûts et de revenus.



(e) $P(x) = R(x) - C(x) = 300x - 20\,000$
(f) Effectivement, le zéro de la fonction profit correspond bien au seuil de rentabilité.



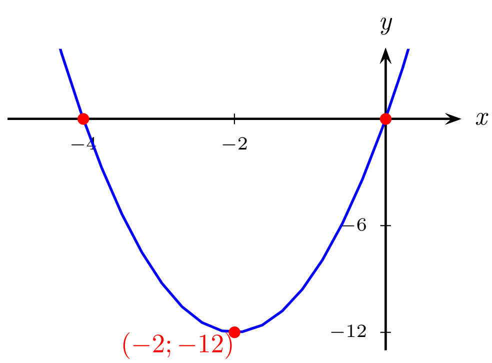
(g) $P^{-1}(x) = \frac{x+20\,000}{300}$ et $P^{-1}(50\,000) = \frac{700}{3} \approx 233$
On doit produire et vendre environ 233 pièces pour faire un profit annuel de 50 000 $.
Plus généralement, $P^{-1}(x)$ calcule le nombre de pièces à produire et à vendre pour faire x $ de profit en un an.

Rép. 6.7 (a) $a > 0$, $b = 0$ et $c < 0$ (b) $a > 0$, $b > 0$ et $c < 0$ (c) $a < 0$, $b > 0$ et $c > 0$

Rép. 6.8 (a) $(1; 3)$ (b) $(2; -12)$ (c) $(-3; 5)$ (d) $(-3{,}24)$ (e) $(-2; 1)$ (f) $(-3; 24)$

Rép. 6.9 On donne ici la réponse pour (c). Pour vérifier les réponses aux autres exercices, tracez les graphes à l'aide de votre calculatrice.
(c) Le sommet de $f(x) = 3(x+2)^2 - 12$ est $(-2; -12)$ et ses zéros sont -4 et 0. L'axe de symétrie est $x = -2$ et l'ordonnée à l'origine est $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 3(x+2)^2 - 12 = 0 \quad &\iff \quad 3(x+2)^2 = 12 \\ &\iff \quad (x+2)^2 = 4 \\ &\iff \quad x + 2 = \pm 2 \\ &\iff \quad x = -2 \pm 2 \\ &\iff \quad x = -4 \text{ ou } x = 0. \end{aligned}$$



Rép. 6.10 Pour vérifier les graphiques, utilisez votre calculatrice. Les autres résultats sont résumés au tableau suivant.

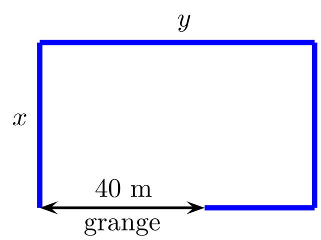
fonction	$f(x) = x^2$	$f(x) = 4 - (x-3)^2$	$f(x) = x^2 + 2x + 1$
$\mathrm{Dom}(f)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f)$	$[0;\infty[$	$]-\infty;4]$	$[0;\infty[$
ordonnée à l'origine	0	-5	1
zéros	0	1 et 5	-1
$f(x) > 0$	$\mathbb{R}^*$	$]1;5[$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
$f(x) < 0$	jamais	$]-\infty;1[\cup]5,\infty[$	jamais
$f(x) \nearrow$	$[0;\infty[$	$]-\infty;3]$	$[-1;\infty[$
$f(x) \searrow$	$]-\infty;0]$	$[3;\infty[$	$]-\infty;-1]$
$f(x)$ constante	jamais	jamais	jamais
extrême	min 0	max 4	min 0

Rép. 6.11 (a) Puisque $a = 3 > 0$, la parabole est ouverte vers le haut, la fonction possède une valeur minimale et cette valeur minimale est -13, car $f(x) = 3x^2 - 12x - 1 = 3(x-2)^2 - 13$.

(b) Puisque $a = -2 < 0$, la parabole est ouverte vers le bas, la fonction possède une valeur maximale et cette valeur maximale est 21, car $f(x) = 3 - 2x^2 - 12x = 21 - 2(x+3)^2$.

(c) Puisque $a = 1 > 0$, la parabole est ouverte vers le haut, la fonction possède une valeur minimale et cette valeur minimale est $-\frac{1}{4}$, car $f(x) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

Rép. 6.12 Soit x une des dimensions de l'enclos (en mètres) et y l'autre dimension (aussi en mètres).



(a) La contrainte sur la quantité de clôture disponible : $2x + 2y - 40 = 200 \iff y = 120 - x$.
L'aire de l'enclos : $A(x) = x \cdot y|_{y=120-x} = x \cdot (120 - x)$.
On sait que $x \geq 0$ et $y \geq 40$.

$$y \geq 40 \iff 120 - x \geq 40 \iff x \leq 80$$

On doit donc maximiser la fonction $A(x) = x \cdot (120 - x)$ sur l'intervalle $[0; 80]$.
On cherche le sommet de la parabole par complétion de carré.

$$A(x) = x \cdot (120 - x) = 120x - x^2 = 3600 - (x - 60)^2$$

Le sommet est donc $(60; 3600)$.
L'aire maximale serait donc 3600 m^2 lorsque $x = 60$ m.
—La valeur trouvée est possible dans le contexte puisque $60 \in \mathrm{Dom}(A(x))$.
—Il s'agit bien d'une valeur maximale, car la parabole est ouverte vers le bas ($a = -1 < 0$).
Les dimensions de l'enclos qui maximiseront l'aire sont donc $x = 60$ m par $y = 120 - 60 = 60$ m.

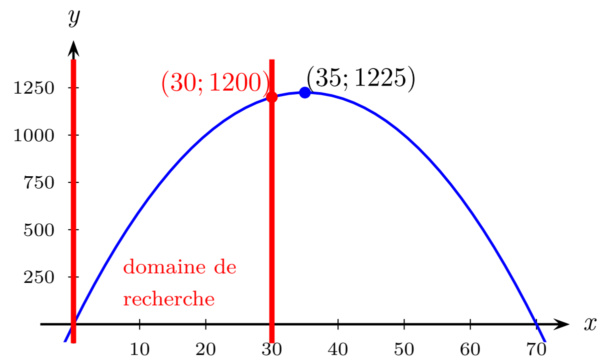
(b) La contrainte sur la quantité de clôture disponible : $2x + 2y - 40 = 100 \iff y = 70 - x$.
L'aire de l'enclos : $A(x) = x \cdot y|_{y=70-x} = x \cdot (70 - x)$.
On sait que $x \geq 0$ et $y \geq 40$.

$$y \geq 40 \iff 70 - x \geq 40 \iff x \leq 30$$

On doit donc maximiser la fonction $A(x) = x \cdot (70 - x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$.
Le sommet est $(35; 1225)$, car

$$A(x) = x \cdot (70 - x) = 70x - x^2 = 1225 - (x - 35)^2.$$

L'aire maximale serait donc 1225 m^2 lorsque $x = 35$ m, mais la valeur trouvée est impossible dans le contexte puisque $35 \notin \text{Dom}(A(x)) = [0; 30]$.



Le maximun se trouve à la borne supérieure du domaine, c'est-à-dire en $x = 30$, et le maximum est $A(30) = 1200$ m^2.

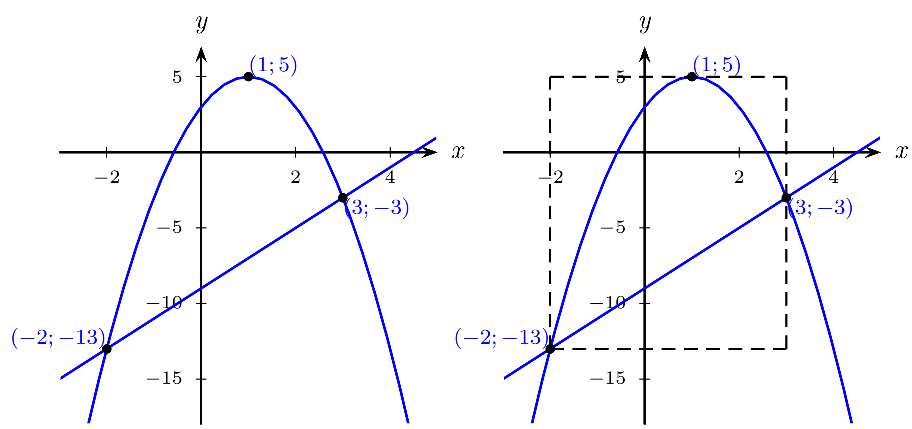
Les dimensions de l'enclos qui maximiseront l'aire sont donc $x = 30$ m par $y = 70-30 = 40$ m.

Rép. 6.13 $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

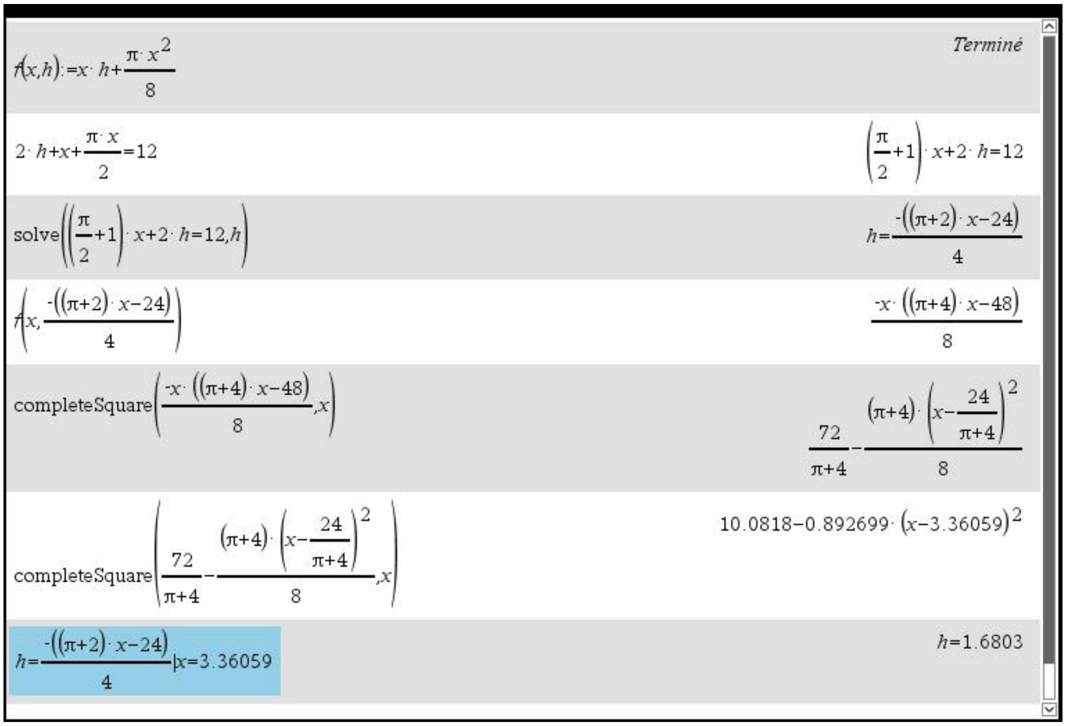
Rép. 6.14 $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$

Rép. 6.15 Une fois les graphiques tracés, on peut borner la région par un rectangle de surface $5 \cdot 18 = 90$ et lui retrancher l'aire du triangle de surface $\frac{5 \cdot 10}{2} = 25$. L'aire de la région entre les courbes est donc plus petite que $90 - 25 = 65$. La réponse de Julien n'est donc pas plausible.

Vous verrez en MAT145 que l'aire est exactement $\frac{125}{3} = 41{,}\overline{6}$ unités de surface.



Rép. 6.16 $x \approx 3{,}36$ m et $h \approx 1{,}68$ m



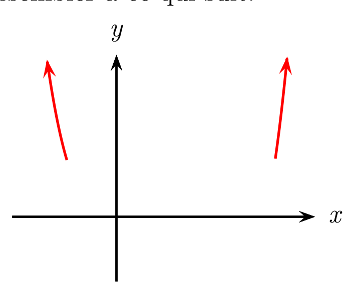
Rép. 6.17 (a) degré 2, $\mathbb{R}$ (b) degré 3, $\mathbb{R}$ (c) degré 2, $\mathbb{R}$ et (e) degré 2, $\mathbb{R}$
(d) n'est pas polynomiale

Rép. 6.18 (b) ne peut pas être polynomiale, car la courbe n'est pas lisse
(c) ne peut pas être polynomiale, car la courbe n'est pas continue
(e) ne peut pas être polynomiale, car la courbe n'est pas continue

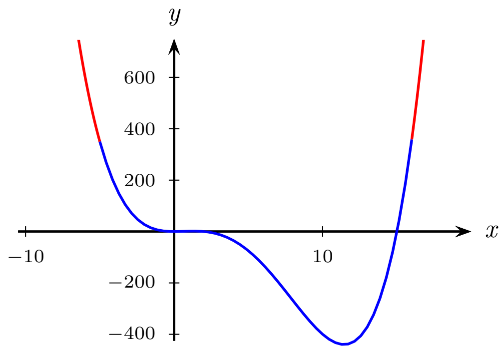
Rép. 6.19 (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (c) $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$
(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (d) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Rép. 6.20 (a) h (b) j (c) f (d) k (e) g

Rép. 6.21 Non, le terme dominant x^4 nous indique que les extrémités du graphique (son comportement asymptotique) devraient plutôt ressembler à ce qui suit.

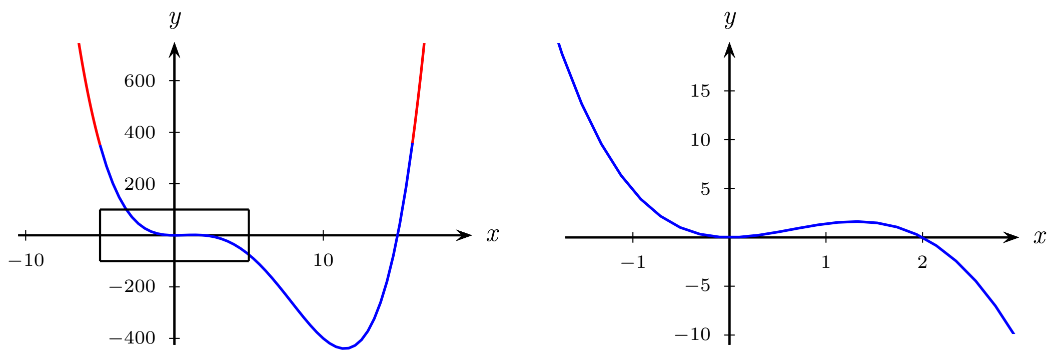


La fenêtre suivante, où $x \in [-10; 20]$ et $y \in [-400; 650]$, serait plus appropriée que la fenêtre standard.



Le calcul des zéros permettra d'aller chercher davantage d'information sur les caractéristiques de la fonction.

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 15.$$



En examinant le graphique près de l'origine on se rend compte que les grandes différences dans les ordres de grandeurs rendent impossible le tracé d'un seul graphique qui reflète toutes les caractéristiques de la fonction.

Rép. 6.22 (a) $d < 0$, car l'ordonnée à l'origine est négative $f(0) \approx -2{,}5$.

(b) $a < 0$, car $n = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (voir le tableau 6.5).

(c) $x \in]-\infty; -1[\cup]3; \infty[$

(d) min local : -3, max local : 0,6, par de max absolu, pas de min absolu

(e) $f(x) = -\frac{1}{10}(x+3)(x-2)(x-4)$
cette réponse est cohérente avec celle donnée en (a), car

$$f(0) = -\frac{1}{10}(3)(-2)(-4) = -\frac{24}{10} = -2{,}4$$

et celle en (b), car $a = -\frac{1}{10}$.

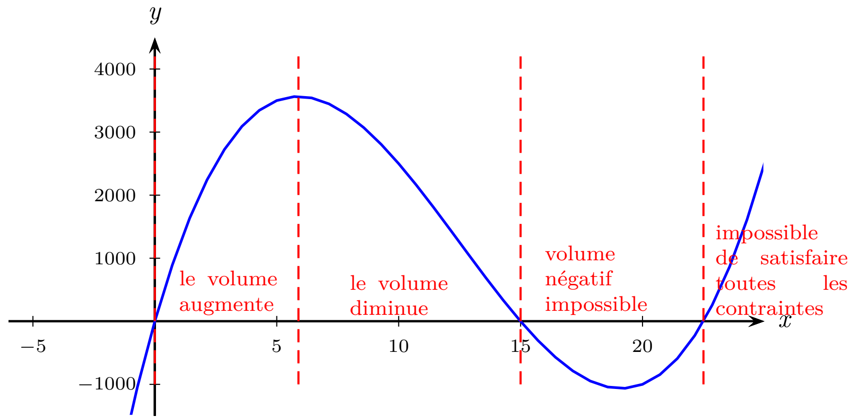
Rép. 6.23 $f(x) = 2(x-2)(x-5)(x+1) = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20$

Rép. 6.24 $f(x) = -\frac{1}{162}(x+6)(x+3)x(x-1)$

Rép. 6.25 (a) Si $x = 3$ cm, $V = 2808$ cm^3, si $x = 5$ cm, $V = 3500$ cm^3 et si $x = 10$ cm, $V = 2500$ cm^3

(b) $V(x) = x \cdot (45 - 2x) \cdot (30 - 2x)$
On peut vérifier que cette fonction est cohérente avec les résultats obtenus en (a) en l'évaluant : $V(3) = 2808$, $V(5) = 3500$ et $V(10) = 2500$

(c) Lorsque la hauteur augmente de 0 à environ 5,9, le volume augmente. Si la hauteur continue à augmenter, le volume diminue jusqu'à atteindre 0. Puisqu'un volume ne peut être négatif, les valeurs x supérieures à 15 et inférieures à 22,5 doivent être exclues du domaine. De plus, toute valeur x supérieure à 22,5 devra aussi être exclue du domaine, car, même si la fonction est positive, il est impossible de satisfaire les contraintes du problème (par exemple si $x = 25$, le carton devra être de dimensions minimales 50 cm × 50 cm).



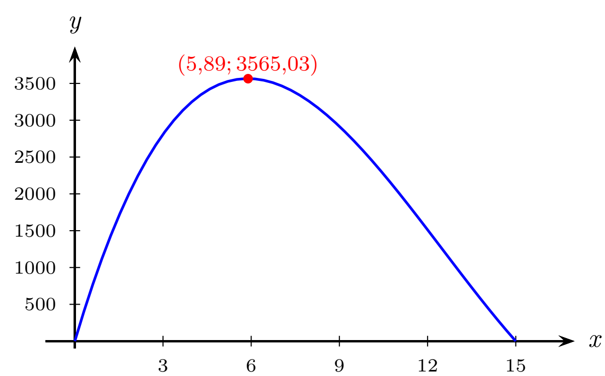
En acceptant la possibilité d'obtenir une boîte dégénérée, c'est-à-dire de volume nul, le domaine contextuel est alors $\mathrm{Dom}(V) = [0; 15]$.
Notez que d'accepter d'obtenir une boîte dégénérée ne cause pas de problème mathématique (car il n'introduit pas de division par zéro, ni de racine paire de nombres négatifs) et est utile lorsqu'on veut faire appel au théorème des valeurs extrêmes en calcul différentiel.

(d) Si x est la hauteur de la boîte, $45-2x$ est sa largeur et $30-2x$ est sa longueur. La construction de la boîte doit se faire en respectant toutes les contraintes $x \geq 0$, $45-2x \geq 0$ et $30-2x \geq 0$. Puisque

$$(45-2x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 22{,}5 \text{ et } 30-2x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 15,$$

$\mathrm{Dom}(V) = [0{,}15]$.

(e) La fenêtre $[-1; 16] \times [-100; 4000]$ est plus adaptée au contexte, car le volume est soit positif, soit nul (jamais négatif). De plus, elle permet de bien voir les axes tout en présentant le sommet et les zéros de la fonction sur son domaine contextuel.



Le volume maximal est d'environ 3565 cm^3 et les dimensions sont alors environ 5,9 cm par 18,2 cm par 33,2 cm.

Rép. 6.26 Le domaine de la fonction semble être $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

(a) lorsque $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$
(b) lorsque $x \to 3^+$, $f(x) \to \infty$
(c) lorsque $x \to -1^-$, $f(x) \to -\infty$
(d) lorsque $x \to -1^+$, $f(x) \to \infty$
(e) lorsque $x \to \infty$, $f(x) \to 0$
(f) lorsque $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$

Rép. 6.27 Le domaine de la fonction semble être $\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

(a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \infty$
(b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$
(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
(d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$
(e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$
(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$

Rép. 6.28 (a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Elle ne possède aucune asymptote verticale
(b) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}$
Elle possède les deux asymptotes verticales $x = -4$ et $x = 4$
(c) $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$
Elle ne possède aucune asymptote verticale

Rép. 6.29 (a) Elle possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
(b) Elle possède une asymptote horizontale $y = \frac{2}{3}$
(c) Elle ne possède aucune asymptote horizontale

Rép. 6.30 (a) Le graphe de $f(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ car

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{1-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2+5/x)}{x(1/x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+5/x}{1/x-2} = \frac{2+0}{0-2} = -1$$

et une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$ car

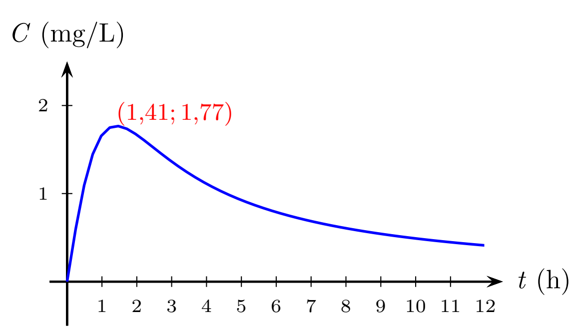
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x+5}{1-2x} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}^+ + 5}{1-2\cdot\frac{1}{2}^+} = \frac{1^+ + 5}{1-1^+} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

(b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2(x+1)}$
La graphe de $f^{-1}(x)$ a une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$ et une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
(c) Une asymptote horizontale au graphe de $f(x)$ devient une asymptote verticale à celui de $f^{-1}(x)$ lorsqu'on reflète le graphe selon la droite $y = x$. De même, une asymptote horizontale devient une asymptote verticale.

Rép. 6.31 (a) Puisque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1{,}5$, le graphe de $f(x)$ aurait une asymptote horizontale d'équation $y = 1{,}5$.
(b) Puisque $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \infty$, le graphe de $g(x)$ aurait une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Rép. 6.32 (a) $\overline{C}(50) = 600$, $\overline{C}(250) = 280$, $\overline{C}(500) = 240$ et $\overline{C}(1000) = 220$
(b) L'équation de l'asymptote horizontale est $y = 200$. Plus il y a de pièces produites, plus le coût moyen baisse pour tendre vers 200 \$/pièce.

Rép. 6.33 (a) $C(0{,}5) \approx 1{,}11$ mg/L
(b) $C(3) \approx 1{,}36$ mg/L
(c) La concentration sera maximale environ 1 heure 25 minutes après l'injection et sera d'environ 1,77 mg/L.

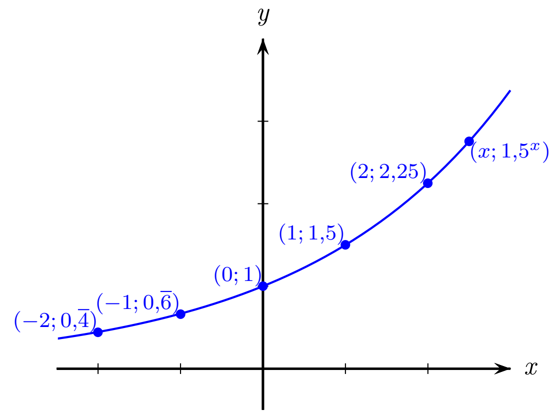


(d) $y = 0$ est l'équation de l'asymptote horizontale. La concentration de drogue dans le sang tend vers 0 mg/L.

Chapitre 7

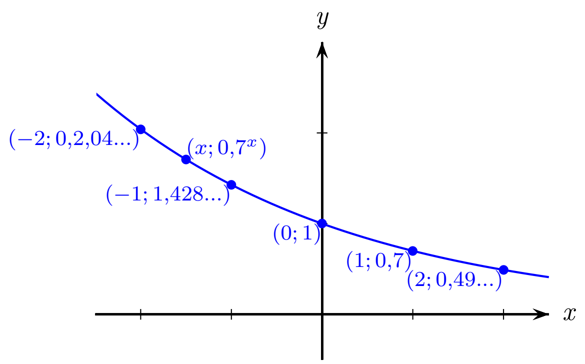
Rép. 7.1 (a) Quelques valeurs suffisent pour tracer la courbe.

x	y	$(x; y)$
-2	$0,\overline{4}$	$(-2; 0,\overline{4})$
-1	$0,\overline{6}$	$(-1; 0,\overline{6})$
0	1	$(0; 1)$
1	$-1,5$	$(1; 1,5)$
2	2,25	$(2; 2,25)$



(b)

x	y	$(x; y)$
-2	2,04...	$(-2; 0,2,04...)$
-1	1,428...	$(-1; 1,428...)$
0	1	$(0; 1)$
1	0,7	$(1; 0,7)$
2	0,49	$(2; 0,49\ldots)$



Rép. 7.2 (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 3 (e) 2 (f) 1

Rép. 7.3 Pour pouvoir dire qu'une fonction est exponentielle il faut que la base soit un nombre réel positif, non nul et différent de 1. Vous pouvez vérifier vos graphiques en les traçant à l'aide de la calculatrice.

(a) $f(x) = 2^x$ est une fonction exponentielle de base 2.
(b) $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est une fonction exponentielle de base $1/2$.
(c) $f(x) = (-2)^{-x}$ n'est pas une fonction exponentielle, car la base serait négative.
(d) $f(x) = (\sqrt{2})^{-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ est une fonction exponentielle de base $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$.

Rép. 7.4

(a) 7^x
(b) $3^x - 3^{-x}$
(c) $\dfrac{1-3x}{e^x}$
(d) $-\dfrac{e^{-2x}(2x+3)}{x^4}$
(e) 2^{6-5x}
(f) $25^{x+1} = 5^{2(x+1)}$
(g) $2^y - 1$
(h) $6^{3x/2} + 6^{x/2} = 6^{x/2}(6^x + 1)$
(i) $-\frac{27}{8}$
(j) $\frac{24}{e^{5x+7}}$

Rép. 7.5 (a)

$$\begin{aligned}
(\cosh x)^2-(\sinh x)^2 &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}\\
&= \frac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}-\frac{(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}\\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\
&= \frac{\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{4}\\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cosh(2x)+\sinh(2x) &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\frac{2e^{2x}}{2}=e^{2x}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\cosh x\sinh x-(\sinh x)^2 &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\
&= \frac{(e^x+e^{-x})\,(e^x-e^{-x})}{4}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}\\
&= \frac{\left(e^{2x}-e^xe^{-x}+e^{-x}e^x-e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}\right)}{4}\\
&= \frac{\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{4}\\
&= \frac{e^{2x}-e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}\\
&= \frac{-2e^{-2x}+2}{4}=\frac{\cancel{2}(-e^{-2x}+1)}{\cancel{2}\cdot 2}=\frac{1-e^{-2x}}{2}
\end{aligned}$$

Rép. 7.6

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(xe^x)^{-1/2}(e^x+xe^x) &= \frac{1}{2(xe^x)^{1/2}}\,(e^x+xe^x)=\frac{1}{2x^{1/2}(e^x)^{1/2}}\;e^x(1+x)\\
&= \frac{1}{2x^{1/2}e^{x/2}}\;e^x(1+x)=\frac{e^{x-x/2}}{2x^{1/2}}\,(1+x)=\frac{e^{x/2}}{2x^{1/2}}\,(1+x)\\
&= \frac{1+x}{2\sqrt{x}}e^{x/2}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)e^{x/2}\\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)e^{x/2}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{2\cancel{x}}\right)e^{x/2}\\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{x/2}=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{x/2}
\end{aligned}$$

Rép. 7.7 (a) $x = 6$ ou $x = -1$ (b) $x = 1$ (c) $x = 1/2$ (d) $x = 3$ ou $x = -1$ (e) $x = 3$ ou $x = -3$ (f) $x = -\frac{1}{3}$ (g) $x = \frac{-10}{3}$ (h) $x = -\frac{9}{7}$ (i) $x = -5$ (j) $x = 2$ (k) $x = -3$ (l) $x = 4$ ou $x = 1$

Rép. 7.8 (a) annuellement : $P = 5\,000$, $N = 10$, $r = 0{,}025$ et $M = 1$, $F = 6\,400{,}42$ \$
trimestriellement : $P = 5\,000$, $N = 10$, $r = 0{,}025$ et $M = 4$, $F = 6\,415{,}13$ \$
(b) 6 % composé annuellement : $P = 15\,000$, $N = 10$, $r = 0{,}06$ et $M = 1$, $F = 26\,862{,}70$ \$
5,9 % composé mensuellement : $P = 15\,000$, $N = 10$, $r = 0{,}059$ et $M = 12$, $F = 27\,020{,}70$ \$
Le meilleur rendement sur 10 ans est donc celui à 5,9 % composé mensuellement.

Rép. 7.9 (a) de 1965 à 2015 : avec $N = 50$, $r = 0{,}0412$ et $C = 100$ on trouve $S \approx 752{,}85$ \$
de 2000 à 2015 : avec $N = 15$, $r = 0{,}0187$ et $C = 100$ on trouve $S \approx 132{,}04$ \$
Le modèle semble bien refléter les données de la Banque du Canada
(b) avec $N = 15$, $r = 0{,}019$ et $C = 20\,000$ on trouve $S \approx 26\,524{,}23$ \$, la voiture se vendrait donc environ 26 524,23 \$
(c) avec $N = 15$, $r = 0{,}0833$ et $C = 20\,000$ on trouve $S \approx 66\,414.23$ \$, la voiture se vendrait donc environ 66 414.23 \$
(d) avec $N = 15$, $r = 0{,}0415$ et $C = 20\,000$ on trouve $S \approx 36\,806$ \$, la voiture se vendrait donc environ 36 806 \$

Rép. 7.10 $f(64) \approx 227{,}93$ kg donc, selon le critère, Tchernobyl ne sera pas habitable en 2050.

Rép. 7.11 (a) $\log_5(25) = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$, 2 est l'exposant à donner à 5 pour obtenir 25.
(b) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \Leftrightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$, -3 est l'exposant qu'il faut donner à 2 pour obtenir 1/8.
(c) $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow 3^0 = 1$, 0 est l'exposant qu'il faut donner à 3 pour obtenir 1.
(d) $\log(1000) = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$, 3 est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir 1000.
(e) $\ln(1) = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$, 0 est l'exposant qu'il faut donner à e pour avoir 1.

Rép. 7.12 (a) $4^3 = 64 \Leftrightarrow 3 = \log_4 64$, 3 est l'exposant qu'il faut donner à 4 pour obtenir 64.
(b) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow -2 = \log_3\left(\frac{1}{9}\right)$, -2 est l'exposant qu'il faut donner à 3 pour obtenir 1/9.
(c) $10^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log(1)$, 0 est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir 1.
(d) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$, x est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir y.
(e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{8} \Leftrightarrow -3 = \log_{2/5}\left(\frac{125}{8}\right)$, -3 est l'exposant qu'il faut donner à 2/5 pour obtenir 125/8.

Rép. 7.13 Utilisez votre calculatrice pour vérifier vos graphiques. Les échelles devront être identiques pour que l'on puisse constater la symétrie des graphes par rapport à l'axe $y = x$. Les fonctions de chacune des paires sont bien réciproques l'une de l'autre.

Rép. 7.14 (a) $f(x) = \log_{0,7}(x)$ correspond à 6 (b) $f(x) = \log_{0,3}(x)$ correspond à 5 (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$ correspond à 4 (d) $f(x) = \log_2(x)$ correspond à 3 (e) $f(x) = \log_3(x)$ correspond à 2 (f) $f(x) = \log(x)$ correspond à 1

Rép. 7.15 (a) $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$, le domaine est donc $]-3; +\infty[$.
(b) $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, le domaine est donc $]-\infty; 1[$.
(c) $(x-5)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 5$, le domaine est donc $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.
(d) $x > 0$ et $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x > 3$, le domaine est donc $x > 3$

Rép. 7.16 (a) $\log_3(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ est bien l'exposant à donner à 3 pour obtenir $\sqrt{3}$

(b) $\log_{0,5}(16) = -4$, -4 est bien l'exposant à donner à 0,5 pour obtenir 16, car $0{,}5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$

(c) $\ln(1) = 0$, 0 est bien l'exposant à donner à e pour obtenir 1

(d) $\log_9\left(\frac{1}{81}\right) = -2$, -2 est bien l'exposant à donner à 9 pour obtenir 1/81 car $\frac{1}{81} = \frac{1}{9^2} = 9^{-2}$

(e) $\ln(e^7) = 7$, 7 est bien l'exposant à donner à e pour obtenir e^7

(f) $\log_{30}\frac{1}{900} = -2$, car $30^{-2} = \frac{1}{30^2} = \frac{1}{900}$

(g) $\log_2(32) = 5$, car $2^5 = 32$

(h) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right) = -3$, car $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

(i) $\log_{10}(0{,}1) = -1$, car $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

(j) $\log_{\frac{1}{6}}(36) = -2$, car $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = 6^2 = 36$

Rép. 7.17 (a) $\ln(e^{3x}) = 3x$

(b) $2\log(10^{2t+1}) = 2(2t+1) = 4t+2$

(c) $e^{5\ln(3x^2-1)} = (3x^2-1)^5$

(d) $10^{\log\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}$

(e) $\log_5\left(5^{(x-1)^2}\right) = (x-1)^2$

(f) $\log_{\frac{3}{2}}\left((3/2)^{(4x+1)}\right) = 4x+1$

(g) $0{,}4^{\log_{0,4}(x^2-2)} = x^2-2$

(h) $3^{2\log_3(2+\sqrt{x+5})} = (2+\sqrt{x+5})^2$

Les restrictions sont nécessaires afin que les fonctions logarithmiques soient définies. L'argument d'un logarithme doit toujours être strictement positif.

Il n'y a pas de telles restrictions sur les fonctions exponentielles e^{3x}, 10^{2t+1}, $5^{(x-1)^2}$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^{(4x+1)}$, car elles sont définies et strictement positives, quelle que soit la valeur de sa variable.

Rép. 7.18 (a) propriété 5 (b) propriété 3 (c) propriété 7 (d) propriété 2 (e) propriété 1 (f) propriété 4 (g) propriété 6 (h) propriété 7

Rép. 7.19 $\ln(0)$ n'est pas défini. Il est impossible de trouver un nombre tel que $e^{\text{ce nombre}} = 0$. Le domaine de la fonction $\ln(x)$ est $\mathrm{Dom}(\ln x) =]0;\infty[$.

Comme on peut écrire $4 = 2^2$, $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 = 2\cdot 0{,}6931\ldots = 1{,}3862\ldots$

De la même façon, $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 = 3\cdot 0{,}6931\ldots = 2{,}079...$

$\ln(5) = \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln 10 - \ln 2 = 2{,}3025... - 0{,}6931\ldots = 1{,}609...$

$\ln(6) = \ln(2\cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0{,}6931\ldots + 1{,}0986\ldots = 1{,}791\ldots$

$\ln(500) = \ln\left(\frac{10^3}{2}\right) = \ln 10^3 - \ln 2 = 3\ln 10 - \ln 2 = 6{,}214\ldots$

$\ln(\sqrt{27}) = \ln(27^{1/2}) = \ln(3^{3/2}) = \frac{3}{2}\ln 3 = \frac{3\cdot 1{,}0986...}{2} = 1{,}647\ldots$

x	0	1	2	3	4	5	6
$\ln x$	non défini	0	0,693...	1,098...	1,386...	1,609...	1,791...

x	7	8	9	10	16	500	$\sqrt{27}$
$\ln x$	1,945...	2,079...	2,197...	2,302...	2,772...	6,214...	1,647...

Rép. 7.20 (a) $\log\left(\dfrac{x}{100}\right) = \log(x) - \log(100) = \log(x) - 2$

(b) $\log_2\left(\dfrac{32}{y^5}\right) = \log_2(32) - \log_2(y^5) = 5 - 5\log_2(y)$

(c) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^3}\right) = \ln(\sqrt{2x-1}) - \ln(x^3) = \dfrac{1}{2}\ln(2x-1) - 3\ln(x)$

(d) $\log_3\left(\dfrac{x^2}{9y^3}\right) = 2\log_3(x) - 2 - 3\log_3(y)$

(e) $\log_b\left(\dfrac{x^3y^2}{z^2}\right) = 3\log_b(x) + 2\log_b(y) - 2\log_b(z)$

(f) $\ln\sqrt{ex^2} = \dfrac{1}{2}(1 + 2\ln(x)) = \dfrac{1}{2} + \ln(x)$

(g) $\ln \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{1}{3}(\ln(x) - \ln(y))$

(h) $\log \dfrac{(x+10)^2}{(10x+1)^3} = 2\log(x+10) - 3\log(10x+1)$

Rép. 7.21 (a) $\log_6(6) = 1$

(b) $\log_6(6) = 1$

(c) $\ln\left(\dfrac{x^3y^2}{z^{1/4}}\right)$

(d) $\log\left(\dfrac{u^{5/2}}{v^{10}}\right)$

(e) $\log_3\left(\dfrac{y^2}{x^5}\right)$

(f) $\log_2\left(\dfrac{5}{8}\right)$

(g) $\log\left(\dfrac{27}{x^3}\right)$

(h) $\ln\left(\dfrac{e^2}{8}\right)$

Rép. 7.22 On peut s'y prendre de plusieurs façons pour montrer l'équivalence des expressions. En voici une.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{5}\ln\left(\frac{x-2}{x+8}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+6x-16) &= \ln\left(\frac{(x-2)^{4/5}}{(x+8)^{4/5}}\right) - \ln(x^2+6x-16)^{1/2} \\
&= \ln\left(\frac{(x-2)^{4/5}}{(x+8)^{4/5}(x^2+6x-16)^{1/2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(x-2)^{4/5}}{(x+8)^{4/5}((x-2)(x+8))^{1/2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(x-2)^{4/5}}{(x+8)^{4/5}(x-2)^{1/2}(x+8)^{1/2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(x-2)^{4/5-1/2}}{(x+8)^{4/5+1/2}}\right) = \ln\left(\frac{(x-2)^{3/10}}{(x+8)^{13/10}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(x-2)^3}{(x+8)^{13}}\right)^{1/10} = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{(x-2)^3}{(x+8)^{13}}\right) \\
&= \frac{1}{10}\ln\left(\left(\frac{(x+8)^{13}}{(x-2)^3}\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{(x+8)^{13}}{(x-2)^3}\right)
\end{aligned}$$

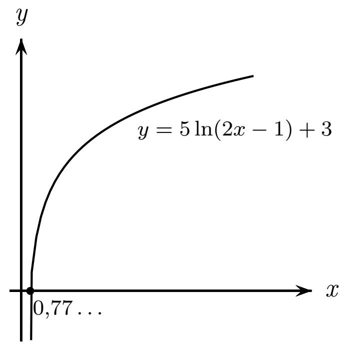
Rép. 7.23 (a) Puisque $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, le domaine est $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

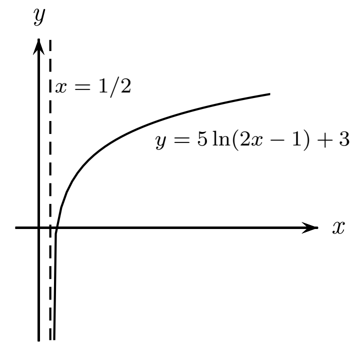
(b) $0 = 5\ln(2x-1) + 3 \Leftrightarrow 5\ln(2x-1) = -3 \Leftrightarrow \ln(2x-1) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 2x - 1 = e^{-3/5} \Leftrightarrow x = \frac{e^{-3/5}+1}{2} \approx 0{,}77$. Cette valeur correspond à l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de l'axe des x.

(c) La valeur de la fonction semble tendre vers $-\infty$.
La fonction posséderait donc une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

x	f(x):=	
	5*ln(2*x-1)+3	
0.5001	-39.586	
0.50001	-51.0989	
0.5	-74.1247	
0.5	-108.664	
0.5	-131.689	

0.500000000001





Rép. 7.24 (a) $\log_2(18) = \frac{\ln(18)}{\ln(2)} = \frac{\log(18)}{\log(2)} = 4{,}1699...$

(b) $\log_{0,5}(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(0,5)} = \frac{\log(10)}{\log(0,5)} = -3{,}3219...$

(c) $\log_{16}(32) = \frac{\ln(32)}{\ln(16)} = \frac{\log(32)}{\log(16)} = 1{,}25$

Rép. 7.25 (a)

$$\begin{aligned}
\frac{2^{3-2x}}{3} = 25 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{3-2x} = 75 && \text{on isole la partie exponentielle}\\
&\Longleftrightarrow \quad \log_2(2^{3-2x}) = \log_2(75) && \text{on applique } \log_2() \text{ aux deux membres}\\
&\Longleftrightarrow \quad 3 - 2x = \log_2(75) && \text{on simplifie}\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\log_2(75) - 3}{-2} && \text{on résout l'équation linéaire}\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{3 - \log_2(75)}{2} && \text{on simplifie}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{2^{3-2x}}{3} = 25 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{3-2x} = 75 && \text{on isole la partie exponentielle}\\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(2^{3-2x}) = \ln(75) && \text{on applique } \ln() \text{ aux deux membres}\\
&\Longleftrightarrow \quad (3 - 2x)\ln 2 = \ln 75 && \text{on utilise } \ln(M^p) = p\ln(M)\\
&\Longleftrightarrow \quad (3 - 2x) = \tfrac{\ln 75}{\ln 2} && \text{on divise les deux membres par } \ln 2\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{3 - \frac{\ln 75}{\ln 2}}{2} && \text{on résout l'équation linéaire}
\end{aligned}$$

(c) Par la règle de changement de base du tableau 7.4, avec $a = 2$, $b = e$ et $x = 75$, les réponses sont équivalentes, car

$$\log_2(75) = \frac{\ln 75}{\ln 2}$$

Rép. 7.26 (a) $P(0) = 1250e^0 = 1250$ millions $= 1{,}25$ milliard et

$$\frac{P(t)}{P(t-1)} = \frac{1250e^{0,012126t}}{1250e^{0,012126(t-1)}} = e^{0,012126} \approx 1{,}0122.$$

L'augmentation d'une année à l'autre est bien de 1,22 %.

(b) $P(t) = 1367e^{0,00449t}$

(c) $1250e^{0.012126t} > 1367e^{0.00449t}$ lorsque $t > 11{,}72$ ans. Ainsi, selon ces modèles, la population de l'Inde dépassera celle de la Chine environ 12 ans après 2015, donc vers 2027.

Rép. 7.27 (a) $x \approx 2{,}96936$

Validation. $1.5^{2{,}96936+1} \approx 5$

(b) $x \approx 4{,}41711$

(c) $x \approx 0{,}40811$ et $x \approx 10{,}90395$

(d) $x \approx 31{,}00169$

Rép. 7.28 (a) $e^x = 8{,}2 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(8{,}2) \Leftrightarrow x = \ln(8{,}2) \approx 2{,}1041$

(b) $3e^{4x} = 17 \Leftrightarrow e^{4x} = \frac{17}{3} \Leftrightarrow \ln(e^{4x}) = \ln\left(\frac{17}{3}\right) \Leftrightarrow 4x = \ln\left(\frac{17}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{17}{3}\right)}{4} \approx 0{,}4337$

(c) $e^{1-2x} = 651 \Leftrightarrow \ln(e^{1-2x}) = \ln(651) \Leftrightarrow 1-2x = \ln(651) \Leftrightarrow x = \frac{1-\ln(651)}{2} \approx -2{,}7393$

(d) En prenant le logarithme en base e :

$$\begin{aligned} 7^{3x+2} = 215 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(7^{3x+2}) = \ln(215) \Leftrightarrow (3x+2)\ln(7) = \ln(215) \\ &\Leftrightarrow \quad 3x+2 = \frac{\ln(215)}{\ln(7)} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{\ln(215)}{\ln(7)} - 2}{3} \approx 0{,}2533 \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser le logarithme en base 7 et ensuite la règle de changement de base pour arriver à la même réponse.

$$\begin{aligned} 7^{3x+2} = 215 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_7(7^{3x+2}) = \log_7(215) \Leftrightarrow 3x+2 = \log_7(215) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\log_7(215) - 2}{3} = \frac{\frac{\ln(215)}{\ln(7)} - 2}{3} \end{aligned}$$

(e) $x = \left(\frac{\ln(415)}{\ln(5)}\right)^2 - 1 \approx 13{,}0294$

(f) $x = \frac{2\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{3\ln(30)} \approx 0{,}2360$

(g) $x = \frac{5\ln(0{,}2) - \ln(4) - 2}{1 + 3\ln(0{,}2)} \approx 2{,}9866$

(h) $x = \frac{16\ln(3)+5}{\ln(3)} \approx 20{,}5512$

Rép. 7.29 (a) Pour trouver la réciproque, on isole d'abord x de l'équation $y = 2e^{3x+1} - 5$.

$$y = 2e^{3x+1} - 5 \Leftrightarrow y+5 = 2e^{3x+1} \Leftrightarrow \frac{y+5}{2} = e^{3x+1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+5}{2}\right) = 3x+1 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{y+5}{2}\right) - 1}{3}$$

on en déduit alors que $f^{-1}(x) = \frac{\ln\left(\frac{x+5}{2}\right)-1}{3}$.

À l'aide du solveur on trouve :

$$\boxed{solve(y = 2 \cdot e^{3 \cdot x+1} - 5, x) \qquad x = \frac{ln(y+5) - \ln(2) - 1}{3} \text{ and } y > -5}$$

Pour réconcilier les deux réponses, on utilise la propriété 6 des logarithmes :

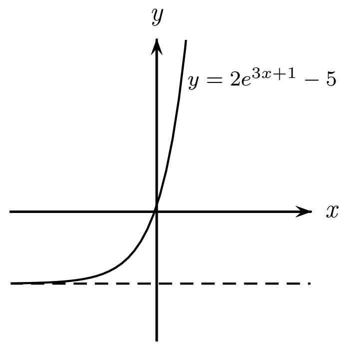
$$x = \frac{\ln(y+5) - \ln(2) - 1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{y+5}{2}\right) - 1}{3}.$$

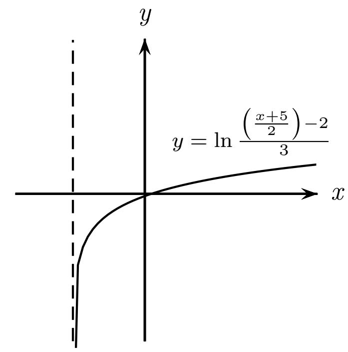
La contrainte $y > -5$ correspond à l'image de la fonction f et au domaine de sa fonction réciproque.

(b) Le domaine de $f(x) = 2e^{3x+1} - 5$ est $\mathbb{R}$ tandis que son image est $]-5; +\infty[$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2e^{3x+1} - 5\right) \overset{conjecture}{=} -5.$

Le graphique de la fonction f possèderait un asymptote horizontale d'équation $y = -5$ et le graphique de la fonction $f^{-1}(x)$ possèderait une asymptote verticale d'équation $x = -5$.





Rép. 7.30 On résout l'équation pour t,

$$\begin{aligned} i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{Ri}{E} = 1 - e^{-Rt/L} \Longleftrightarrow e^{-Rt/L} = 1 - \frac{Ri}{E} \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln\left(e^{-Rt/L}\right) = \ln\left(1 - \frac{Ri}{E}\right) \Longleftrightarrow -Rt/L = \ln\left(1 - \frac{Ri}{E}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{Ri}{E}\right) \end{aligned}$$

et on évalue l'expression obtenue en $i = 0{,}75$ A, $E = 6$ V, $R = 4{,}5\ \Omega$ et $L = 2{,}5$ H

$$t = -\frac{2{,}5}{4{,}5}\ln\left(1 - \frac{4{,}5 \cdot 0{,}75}{6}\right) \approx 0{,}459 \text{ s}$$

Rép. 7.31 (a) $t \approx -7{,}26$, environ 7 h 16 minutes avant midi, la personne est donc décédée vers 4 h 44 de la nuit.

(b) $TVM_{[-7{,}26;0]} \approx -0{,}7$°C/h. La température du corps a donc chuté en moyenne d'environ 0,7 degré/h entre le moment du décès et celui où on l'a découvert.

(c) $\lim_{t\to\infty}(21 + 10{,}9(0{,}9485)^t) = 21$°C, à long terme la température du corps sera celui de la pièce. D'un point de vu graphique, $y = 21$ est une asymptote horizontale au graphe de la fonction température.

(d) $T^{-1}(t) = \log_{0{,}9485}\left(\frac{t-21}{10{,}9}\right)$ et $T^{-1}(30) \approx 3{,}6$ heures

Rép. 7.32 (a) Domaine : $]0; \infty[$

On isole le terme contenant la variable et on applique l'exponentielle en base e des deux côtés.

$$3\ln(x) = -2 \Leftrightarrow \ln(x) = -2/3 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-2/3} \Leftrightarrow x = e^{-2/3} \approx 0{,}5134$$

(b) Domaine : $]0; \infty[$

On isole le terme qui contient la variable et on utilise les propriétés des logarithmes.

$$\begin{aligned} &\log_2(x) + \log_2(7) = \log_2(21) \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2(x) = \log_2(21) - \log_2(7) && \text{on isole} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2(x) = \log_2(21/7) && \text{on utilise la prop. 6 du tableau 7.2} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2(x) = \log_2(3) && \text{on simplifie} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3 && \text{on utilise la prop. 9 du tableau 7.4} \end{aligned}$$

(c) Domaine : $]-\infty; 5[$

On isole, on applique l'exponentielle et on utilise les propriétés des logarithmes.

$2\ln(5-x)=1$	$\Leftrightarrow$	$\ln(5-x)=1/2$	on isole le terme qui contient la variable
	$\Leftrightarrow$	$e^{\ln(5-x)}=e^{1/2}$	on prend l'exponentielle en base e des deux côtés
	$\Leftrightarrow$	$5-x=e^{1/2}$	on utilise la prop. 4 du tableau 7.2
	$\Leftrightarrow$	$x=5-e^{1/2}\approx 3.3513$	on résout l'équation linéaire

(d) Domaine : $]0;\infty[$
On commence par regrouper les termes qui contiennent la variable.

$\log(x)+\log(x+15)=2$		
$\Leftrightarrow$	$\log(x(x+15))=2$	on regroupe les termes contenant la variable
$\Leftrightarrow$	$10^{\log(x(x+15))}=10^2$	on prend l'exponentielle en base 10 des deux côtés
$\Leftrightarrow$	$x(x+15)=100$	on utilise la propriété 4 du tableau 7.2
$\Leftrightarrow$	$x^2+15x-100=0$	on développe pour résoudre l'équation quadratique
$\Leftrightarrow$	$(x-5)(x+20)=0$	on factorise
$\Leftrightarrow$	$x=5$ ou $\cancel{x=-20}$	on résout par factorisation et on rejette les valeurs qui ne font pas partie du domaine de l'équation

L'équation n'a donc que la solution $x=5$.

(e) Domaine : $]\frac{6}{5};\infty[$, $x=2$
(f) Domaine : $]0;\infty[$, $x=\frac{1}{4}$
(g) Domaine : $]\frac{5}{2};\infty[$, $x=\frac{7}{2}$
(h) Domaine : $]\frac{1}{2};\infty[$, $x=1$
(i) Domaine : $]2;\infty[$, $x=4$
(j) Domaine : $]-1;2[$, $x=1$
(k) Domaine : $]1;\infty[$, aucune solution réelle

Rép. 7.33 (a) $M(10^9)=\frac{2}{3}\log\left(\frac{10^9}{10^{4,4}}\right)=\frac{2}{3}\log\left(10^{4,6}\right)=\frac{2}{3}\cdot 4{,}6\approx 3{,}067$

(b) Pour simplifier les calculs, on trouve la réciproque de la fonction M en isolant la variable E

$$M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right)\Leftrightarrow\frac{3}{2}M=\log\left(\frac{E}{10^{4,4}}\right)\Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}M}=\frac{E}{10^{4,4}}\Leftrightarrow E=10^{\frac{3}{2}M+4,4}$$

et on utilise la fonction réciproque pour remplir le tableau.

Pays et lieu	Année	Magnitude	énergie libérée (J)
Japon, Sendai	2011	8,9	$10^{\frac{3}{2}8,9+4,4}=10^{17,75}$
Haïti, port au Prince	2010	7,2	$10^{15,2}$
Indonésie, Sumatra	2004	9	$10^{17,9}$
Chili, Vladivia	1960	9,5	$10^{18,65}$
Japon, Tokyo	1923	8,3	$10^{16,85}$

(c) $M^{-1}(8{,}9)=E(8{,}9)=10^{\frac{3}{2}8,9+4,4}=10^{17,75}\approx 5{,}62\times 10^{17}$ J. Il s'agit de l'énergie libérée par un tremblement de terre de magnitude 8,9.

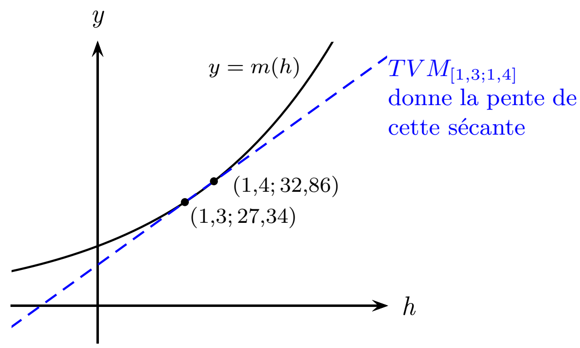
(d) Puisque $E(M)=10^{\frac{3}{2}M+4,4}$, on a $\frac{E(9)}{E(5,4)}=\frac{10^{17,9}}{10^{12,5}}=10^{5,4}\approx 251\,189$. Le rapport est effectivement d'environ 250 000.

(e) Puisque $\frac{E(9,3)}{E(9)}=\frac{10^{18,35}}{10^{17,9}}=10^{0,45}\approx 2{,}8$, il aurait libéré environ trois fois plus d'énergie !

Rép. 7.34 (a) $m(1{,}3) \approx 27{,}34$ kg

(b) $m = 2{,}5e^{1{,}84h}$ et si on l'évalue en $h = 1{,}3$, le résultat est cohérent avec la réponse obtenue en (a).

(c) $TVM_{[1{,}3;1{,}4]} = \frac{m(1{,}4)-m(1{,}3)}{1{,}4-1{,}3} \approx 55{,}2$ kg/m.
Un enfant de 1,4 m de taille pèsera en moyenne environ 5,52 kg de plus qu'un enfant de 1,3 m de taille. La valeur 55,2 kg/m représente la pente de la droite sécante passant par les points $(1{,}3; 27{,}34)$ et $(1{,}4; 32{,}86)$.



Chapitre 8

Rép. 8.1 La longueur de l'hypoténuse est $\sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{106}$ cm
$\sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{106}} = \frac{5\sqrt{106}}{106}$, $\cos(\theta) = \frac{9}{\sqrt{106}} = \frac{9\sqrt{106}}{106}$, $\tan(\theta) = \frac{5}{9}$,
$\cot(\theta) = \frac{9}{5}$, $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{106}}{9}$ et $\csc(\theta) = \frac{\sqrt{106}}{5}$

Rép. 8.2 (a) La longueur inconnue est $\sqrt{8^2-6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm
$\sin(\theta) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ et $\tan(\theta) = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

(b) La longueur inconnue est $\sqrt{14^2-7^2} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$ m
$\sin(\theta) = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\theta) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ et $\tan(\theta) = \frac{7\sqrt{3}}{7} = \sqrt{3}$

Rép. 8.3 (a) $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$ tandis que $2 \cdot \sin(30°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

(b) $\dfrac{\tan(60°)}{\tan(30°)} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3$ tandis que $\tan(2°) \approx 0{,}0349$

(c) $\sin^2(5°) = (\sin(5°))^2 \approx 0{,}0872^2 \approx 0{,}0076$ tandis que $\sin(25°) \approx 0{,}4226$

Rép. 8.4 Environ 15 m

Rép. 8.5 Environ 303 m

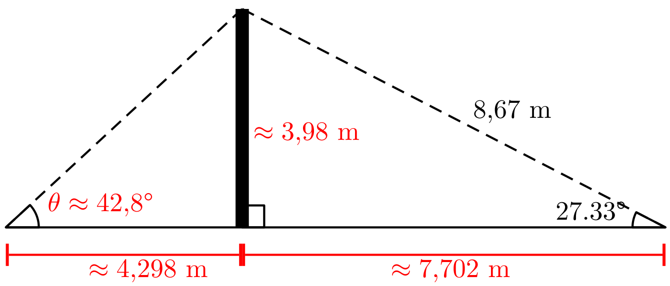
Rép. 8.6 $a \approx 5{,}50$ cm, $b \approx 3{,}58$ cm et $\alpha = 56{,}94°$

Rép. 8.7 $c \approx 5{,}697$ m, $\alpha \approx 34{,}42°$ et $\beta \approx 55{,}58°$

Rép. 8.8 $\alpha \approx 42{,}79°$

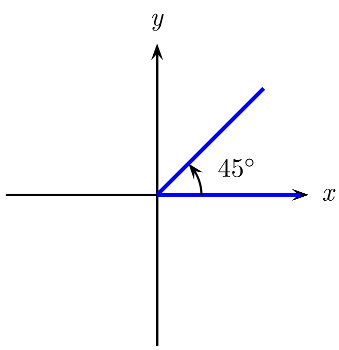
Rép. 8.9
(a) $x = 115°$
(b) $x \approx 30{,}2°$
(c) $x \approx 6$ cm
(d) $x = 55°$
(e) $x \approx 62{,}2°$
(f) $x = 15°$

Rép. 8.10

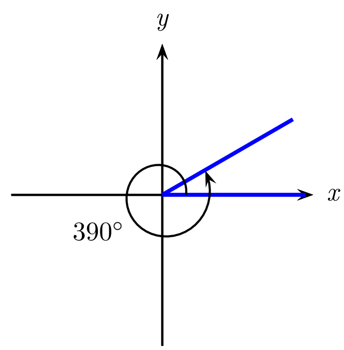


Rép. 8.11 environ 33,1 m

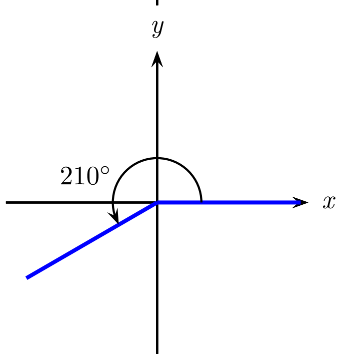
Rép. 8.12 (a)



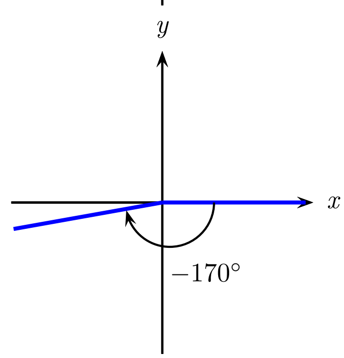
(c)



(b)

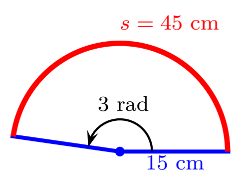


(d)

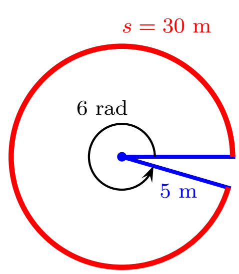


Rép. 8.13 (a) 30° (b) 135° (c) 120° (d) 300°

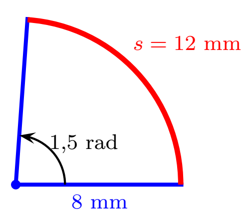
Rép. 8.14 (a) 3 rad



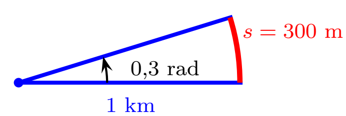
(b) 6 rad



(c) $\frac{3}{2} = 1{,}5$ rad



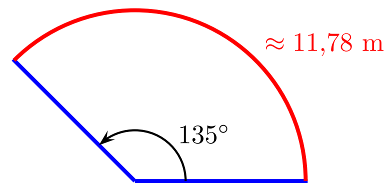
(d) 0,3 rad



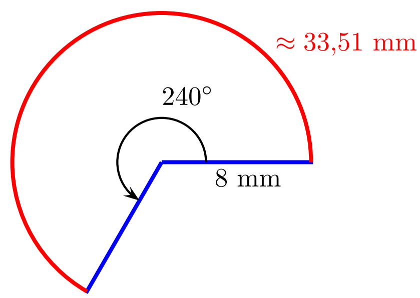
Rép. 8.15 (a) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$ rad
(b) $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$ rad
(c) $\pi \approx 3{,}1416$ rad
(d) $-\frac{5\pi}{4} \approx -3{,}9270$ rad
(e) $\frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618$ rad
(f) $-\frac{49\pi}{90} \approx -1{,}7104$ rad

Rép. 8.16 (a) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$
(b) $\frac{11\pi}{6}$ rad $= 330°$
(c) $\frac{7\pi}{4}$ rad $= 315°$
(d) $\frac{3\pi}{5}$ rad $= 108°$
(e) 10 rad $= \frac{1800}{\pi} \approx 572{,}96°$
(f) $-5{,}2$ rad $= -\frac{936}{\pi} \approx -297{,}94°$

Rép. 8.17 (a) $\theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$ rad, $r \cdot \theta = (5 \text{ m}) \cdot (\frac{3\pi}{4} \text{ rad}) = \frac{15\pi}{4} \text{ m} \approx 11{,}78$ m



(b) $\theta = 240° = \frac{4\pi}{3}$ rad, $r \cdot \theta = (8 \text{ mm}) \cdot (\frac{4\pi}{3} \text{ rad}) = \frac{32\pi}{3} \text{ mm} \approx 33{,}51$ mm



Rép. 8.18 $\frac{650\pi}{3} \approx 680{,}7$ mm
Validation. Puisque 120° est un peu plus de 2 rad, on s'attend à ce que le vélo parcourt une distance un peu plus grande que le diamètre du pneu. La valeur 680,7 mm est donc plausible.

Rép. 8.19 $\frac{120}{\pi} \approx 38{,}2$ km

Rép. 8.20 (a) $112\pi \approx 351{,}9$ m/min
(b) $40\pi \approx 125{,}7$ m/min
(c) Si deux points sur une pale de l'éolienne ont une même vitesse angulaire ω rad/min, le rapport entre les vitesses linéaires $v_1 = r_1\omega$ et $v_2 = r_2\omega$ est égal au rapport des rayons $\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}$ des mouvements circulaires.

Rép. 8.21 Les unités de longueur sont déterminées par les unités des axes du plan dans lequel on plonge le cercle trigonométrique. Celles-ci dépendent du contexte. Elles peuvent être des mètres, des cm, etc. Puisqu'il n'y a aucun contexte, on supposera simplement que les valeurs données sont en *unités de longueur*.

(a) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5234$ (b) $\frac{5\pi}{3} \approx 5{,}2360$ (c) $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472$ (d) 4

Rép. 8.22 (a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $(0; -1)$
(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(d) $(-1; 0)$
(e) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(f) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Rép. 8.23 (a) 0 et aussi 2π (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{7\pi}{4}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$ (e) $\frac{2\pi}{3}$ (f) $\frac{\pi}{2}$

Rép. 8.24 (a) $-\pi$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{11\pi}{6}$ (d) $-\frac{5\pi}{6}$ (e) $-\frac{4\pi}{3}$ (f) $-\frac{\pi}{2}$

Rép. 8.25 Il y a nombre infini d'angles qui ont le même côté final.

(a) $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{7\pi}{2}$, $t = -\frac{\pi}{2}$ et $t = -\frac{5\pi}{2}$

(b) $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{7\pi}{3}$, $t = -\frac{5\pi}{3}$ et $t = -\frac{11\pi}{3}$

(c) $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{11\pi}{4}$, $t = -\frac{5\pi}{4}$ et $t = -\frac{13\pi}{4}$

Rép. 8.26 (a) $\sin(t) = \frac{1}{2}$ (b) $\cos(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\tan(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\cot(t) = -\sqrt{3}$ (e) $\sec(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (f) $\csc(t) = 2$

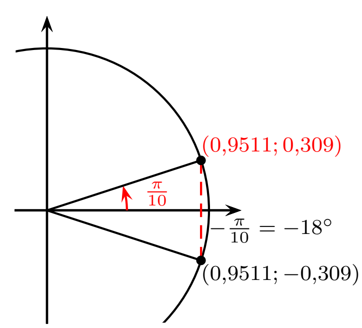
Rép. 8.27 (a) $\sin(t) \approx -0{,}6374$ (b) $\cos(t) \approx -0{,}7533$ (c) $\tan(t) \approx \frac{-0{,}6374}{-0{,}7533} \approx 0{,}8461$ (d) $\cot(t) \approx \frac{-0{,}7533}{-0{,}6374} \approx 1{,}1818$ (e) $\sec(t) \approx \frac{1}{-0{,}7533} \approx -1{,}3275$ (f) $\csc(t) \approx \frac{1}{-0{,}6374} \approx -1{,}5689$

Rép. 8.28 (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) -1 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) -1 (f) 0 (g) 1 (h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (i) -1 (j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

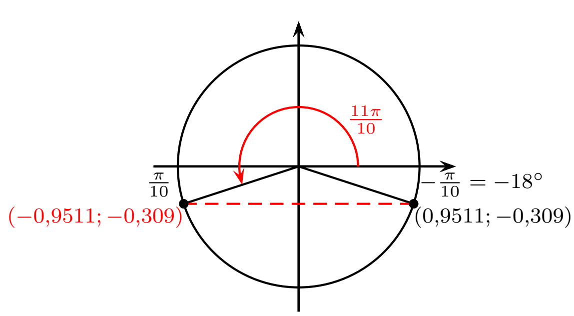
Rép. 8.29 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) 0 (e) $-\frac{1}{2}$ (f) $\sqrt{3}$ (g) $-\sqrt{3}$ (h) 0 (i) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (j) -1 (k) $\sqrt{3}$ (l) 1

Rép. 8.30 $-\frac{\pi}{10} = -18°$

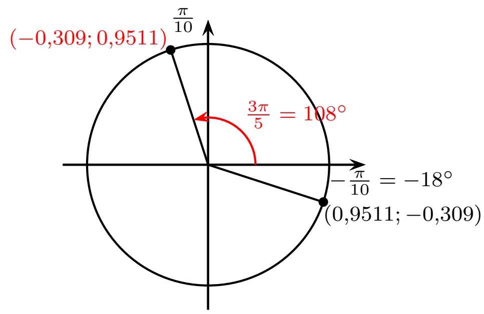
(a) Par symétrie par rapport à l'axe des x on obtient $\cos(18°) \approx 0{,}9511$.



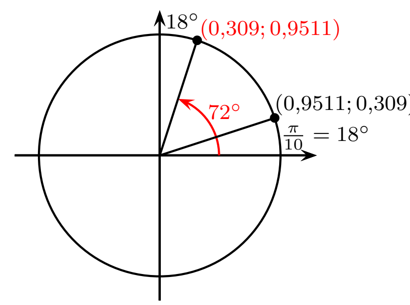
(b) Par symétrie par rapport à l'axe des y, sachant que $\frac{11\pi}{10} = \pi + \frac{\pi}{10}$, on obtient $\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right) \approx -0{,}309$.



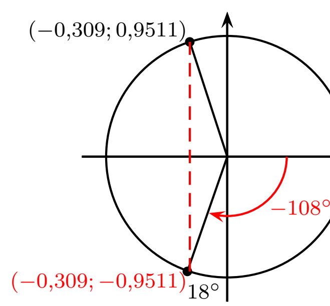
(c) Puisque $\frac{3\pi}{5} = \frac{6\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \approx -0{,}309$.



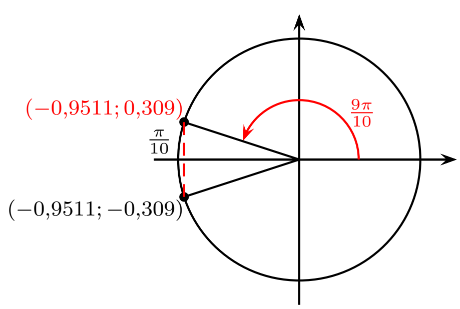
(d) Puisque $72° = 90° - 18°$, $\sin(72°) \approx 0{,}9511$.



(e) Puisque $-108° = -90° - 18°$, $\tan(-108°) \approx \frac{-0{,}9511}{-0{,}309} \approx 3{,}078$.



(f) Puisque $\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10}$, $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \approx -0{,}9511$.



Rép. 8.31 (a) $\cos(2°)$ (c) $\sin(2)$ (e) $\cos(1)$

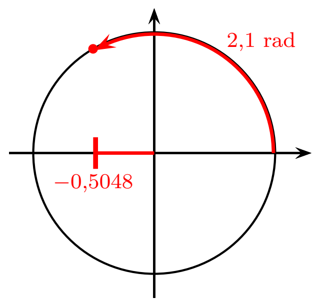
(b) $\sin(2°)$ (d) $\cos(1°)$ (f) $\sin(1)$

Rép. 8.32 (a) $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

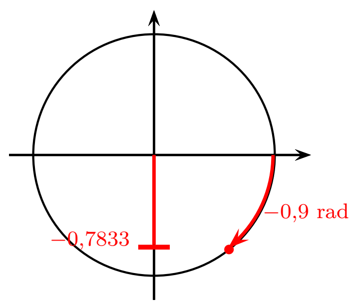
(b) $\csc\left(-\frac{35\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{35\pi}{2}\right)} = 1$

(c) $\sec(585°) = \frac{1}{\cos(585°)} = -\sqrt{2}$

Rép. 8.33 (a) $\cos(2{,}1) \approx -0{,}5048$

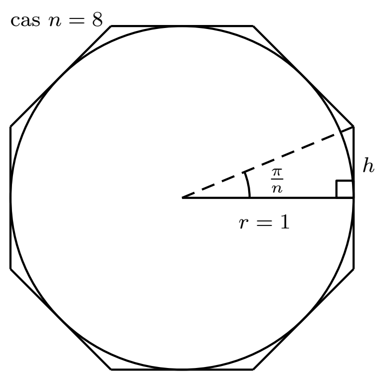


(b) $\sin(-0{,}9) \approx -0{,}7833$



Rép. 8.34 (a) 9,8 m/s² (b) environ 7,3 m/s

Rép. 8.35 (a) Utilisons le triangle de référence illustré ci-dessous. Il y a $2n$ triangles rectangles de ce type dans un polygone régulier à n côtés. L'angle central est donc de $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$. Puisque h est la longueur du côté opposé à l'angle central, $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{1}$ et l'aire du polygone est donc $n \cdot h = n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.



(b)

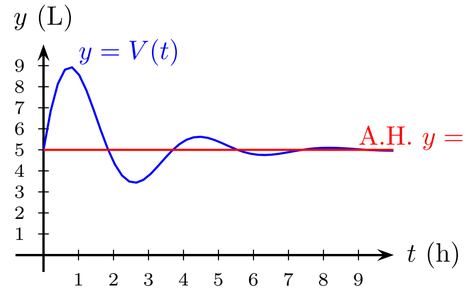
n	8	100	1000	10 000
$A(n)$	3,313708	3,142626	3.141602	3,141592

(c) La limite calcule l'aire du cercle de rayon 1 : $\pi = 3{,}141592\cdots$

Rép. 8.36 (a) $V(4) \approx 5{,}401$ L

(b) $TVM_{[3;6]} \approx 0{,}343$ L/h
Entre 15 h et 18 h, le volume d'eau augmente en moyenne d'environ 0,343 L/h.

(c) Oui, vers 5 L. Le graphe de la fonction volume a une asymptote horizontale d'équation $y = 5$, car $\lim_{t\to\infty} V(t) = 5$.



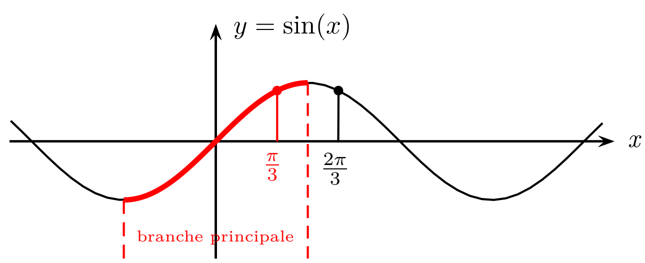
Rép. 8.37 (a) $A(\theta) = 50\cos(\theta)\sin(\theta)$

(b) L'aire est maximale pour $\theta \approx 0{,}785$ rad $\approx \frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$ et $b \approx 7{,}07$ cm et $h \approx 7{,}07$ cm

Rép. 8.38 (a) $-\frac{1}{2}$
(b) $-\frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{\pi}{3}$
(d) $-\frac{\pi}{2}$
(e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(f) $\frac{\pi}{4}$
(g) $\frac{5\pi}{6}$
(h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(i) $\frac{2\pi}{3}$
(j) -1
(k) $\frac{\pi}{4}$
(l) $\sqrt{3}$
(m) $-\frac{\pi}{3}$
(n) $\frac{\pi}{6}$
(o) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(p) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(q) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(r) $\frac{\pi}{4}$

Rép. 8.39 (a) $-\frac{4}{5}$
(b) $\frac{3}{5}$
(c) $-\frac{3}{4}$
(d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = t \approx 2{,}4981$
(e) $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \pi - t \approx 0{,}6435$
(f) L'image de la fonction $\arccos(x)$ est $[0;\pi] \approx [0;3{,}1416]$ tandis que l'image de la fonction $\arcsin(x)$ est $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \approx [-1{,}5708;1{,}5708]$. Si on cherche l'angle obtus t, mieux vaut utiliser la fonction $\arccos(t)$.

Rép. 8.40 Non puisque l'angle $\frac{2\pi}{3}$ n'est pas sur la branche principale du sinus.



Rép. 8.41 (a) $\alpha = \arctan(12/15) \approx 0{,}6747$ rad $\approx 77{,}9°$, $\beta = \arctan(18/9) \approx 1{,}1071$ rad $\approx 63{,}4°$,
$\theta = \pi - \alpha - \beta \approx 1{,}3597$ rad $\approx 77{,}9°$

(b) $\theta(x) = \pi - \arctan(\frac{12}{x}) - \arctan(\frac{18}{24-x})$

(c) $]0;24[$

(d) À environ 12,6 m

Rép. 8.42 $\theta \approx 27{,}5°$

Rép. 8.43 (a) $\alpha \approx 0{,}296$ rad $\approx 17°$
(b) $\alpha(x) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}33}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1{,}5}{x}\right)$.
(c) $x \approx 2{,}23$ m et $\alpha \approx 0{,}389$ rad $\approx 22{,}3°$

Rép. 8.44 (a) On utilise l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dans laquelle on remplace $\sin x$ par $\frac{1}{3}$,

$$\cos^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \iff \cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Puisqu'on stipule que $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, le côté final de l'angle x se situe dans le deuxième quadrant, le cosinus doit donc être négatif. Ainsi, $\cos(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
(b) $\tan x = \frac{1/3}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
(c) $\cot x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{4}} = -2\sqrt{2}$
(d) $\sec x = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
(e) $\csc x = \frac{1}{1/3} = 3$

Rép. 8.45 (a) On commence par traduire chacune des expressions en termes de sinus et de cosinus. Ensuite, on effectue une mise au dénominateur commun.

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x = \sec x \csc x &\iff \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} \\ &\iff \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x} \end{aligned}$$

Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, l'identité est démontrée.
(b) On effectue un produit croisé et on développe ensuite le côté gauche de l'équation.

$$\begin{aligned} \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} &\iff (1-\sin x)(1+\sin x) = (\cos x)^2 \\ &\iff 1 - (\sin x)^2 = (\cos x)^2 \\ &\iff 1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 \end{aligned}$$

Comme la dernière équation est une identité, la première l'est aussi.
(c) On effectue une mise au dénominateur commun du côté gauche de l'équation et on traduit en termes de cosinus son côté droit.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} = 2\sec x &\iff \frac{(\cos x)^2 + (1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x} \\ &\iff \frac{(\cos x)^2 + 1 + 2\sin x + (\sin x)^2}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x} \end{aligned}$$

Puisque $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{(\cos x)^2 + 1 + 2\sin x + (\sin x)^2}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x} &\iff \frac{2 + 2\sin x}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x} \\ &\iff \frac{2(1+\sin x)}{(1+\sin x)(\cos x)} = \frac{2}{\cos x} \\ &\iff \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}. \end{aligned}$$

Comme la dernière équation est une identité, l'équation de départ l'est aussi.

(d) On effectue un produit croisé, on développe et on simplifie.

$$\begin{aligned}\frac{\tan x+\sin x}{1+\cos x}=\tan x &\iff \tan x+\sin x=(1+\cos x)\tan x\\ &\iff \cancel{\tan x}+\sin x=\cancel{\tan x}+\cos x\tan x\\ &\iff \sin x=\cos x\tan x\\ &\iff \sin x=\cancel{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\end{aligned}$$

Puisque $\sin x=\sin x$, l'équation de départ est bien une identité.

Rép. 8.46 (a) L'équation $\sin x+\sin 2x=\sin 3x$ n'est pas une identité, les graphes ne coïncident pas. Par exemple, $\sin(0{,}6)+\sin(2\cdot 0{,}6)\approx 1{,}4967$ tandis que $\sin(3\cdot 0{,}6)=\sin(1{,}8)\approx 0{,}9738$.

(b) Les graphes de $y=1-\sin^2 x$ et de $y=\cos^2 x$ semblent coïncider. En effet, $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ est une identité, car l'équation est équivalente à $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

(c) L'équation $\cos 2x=2\cos x$ n'est pas une identité, les graphes ne coïncident pas. Par exemple, $\cos(2\cdot 0)=\cos(0)=1$ tandis que $2\cdot\cos(0)=2$.

(d) Les graphes de $y=\sec x-\cos x$ et de $y=\tan x\sin x$ semblent coïncider. D'une part,

$$\sec x-\cos x=\frac{1}{\cos x}-\cos x=\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

et, d'autre part,

$$\tan x\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\sin x=\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Puisque les deux expressions sont égales à $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, il s'agit bien d'une identité.

Rép. 8.47 (a) $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=\frac{11\pi}{6}$

(b) $x=\arccos(0{,}35)\approx 1{,}213$ et $x=2\pi-\arccos(0{,}35)\approx 5{,}07$

(c) $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=-\frac{2\pi}{3}$, $x=-\frac{5\pi}{3}$

(d) $x=\arctan(-4{,}2)+k\cdot\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

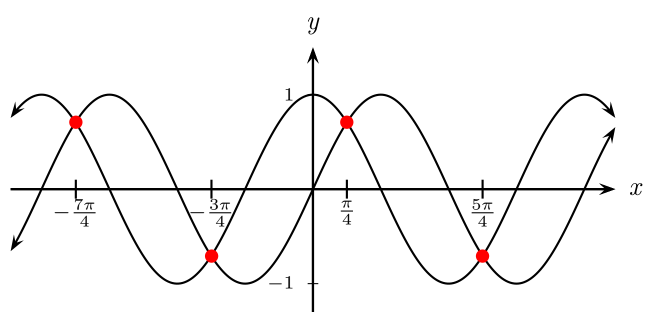
Rép. 8.48 (a) $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$

(b) $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=-\frac{5\pi}{3}$

(c) $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

(d) $2x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ pour $k\in\mathbb{Z}$ alors $x=\frac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{2}=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$ pour $k\in\mathbb{Z}$

Rép. 8.49 (a) $x=\frac{(4k-3)\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y=\cos x$ et $y=\sin x$.



(b) $x=-2\pi$, $x=-\frac{4\pi}{3}$, $x=-\frac{2\pi}{3}$, $x=0$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{4\pi}{3}$ et $x=2\pi$ sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ et $y=\cos x$. *Vérifiez-le !*

(c) $x\in\mathbb{R}$
l'équation $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ est une identité, les deux graphes, celui de $y=\cos 2x$ et celui de $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, coïncident quelle que soit la valeur $x\in\mathbb{R}$. *Vérifiez-le !*

(d) $x \approx -3{,}0938$, $x \approx -2{,}6758$, $x \approx -2{,}0518$, $x = 0$, $x \approx 2{,}0518$, $x \approx 2{,}6758$ et $x \approx 3{,}0938$ sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y = \tan x^2$ et $y = x \sin x$. *Vérifiez-le !*

Rép. 8.50 $\Phi \approx 0{,}8677 \approx 49{,}7°$

Rép. 8.51 (a) Si $y_0 = 0$, $2gy_0 = 0$ et

$$\frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2 + 2gy_0}\right)\Bigg|_{y_0=0} = \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2}\right)$$

Les valeurs v et $\sin\theta$ étant positives dans ce contexte, $v\sin\theta > 0$ et $\sqrt{(v\sin\theta)^2} = v\sin\theta$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{(v\sin\theta)^2}\right) &= \frac{v\cos\theta}{g}(v\sin\theta + v\sin\theta)\\ &= \frac{v\cos\theta}{g}(2v\sin\theta)\\ &= \frac{v^2 2\cos\theta\sin\theta}{g}\\ &= \frac{v^2\sin 2\theta}{g}.\end{aligned}$$

(b) On résout l'équation $p(\theta) = 45$ m pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{v^2}{g}\sin 2\theta = 45 \text{ pour } \theta \in [0; \frac{\pi}{2}] \Longleftrightarrow \theta \approx 0{,}574 \approx 32{,}9° \text{ ou } \theta \approx 0{,}9966 \approx 57°.$$

Deux angles sont donc possibles $\theta \approx 57°$ et $\theta \approx 32{,}9°$ et dans chacun des cas, on doit vérifier si l'obus frappe le mur.
On utilise l'équation

$$x = v_0 t\cos\theta$$

pour trouver le temps qu'il faut à l'obus pour être à 30 m du lieu du tir

$$30 = 22t\cos(0{,}574) \Leftrightarrow t \approx 1{,}62 \text{ sec}$$

$$30 = 22t\cos(0{,}9966) \Leftrightarrow t \approx 2{,}51 \text{ sec}$$

et on calcule sa hauteur, à ces moments, à l'aide de la formule

$$y = v_0 t\sin\theta - 4{,}905t^2.$$

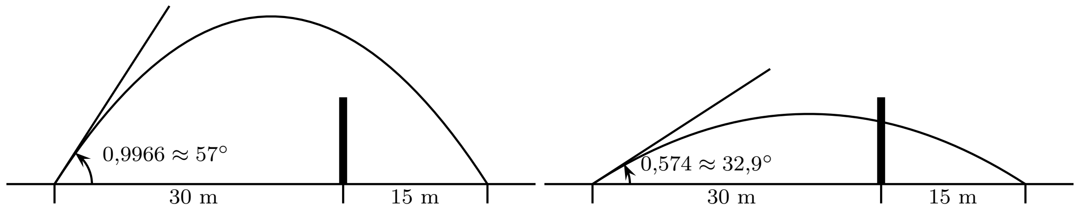
Dans le premier cas,

$$y = 22(1{,}62)\sin(0{,}574) - 4{,}905(1{,}62)^2 \approx 6{,}46 \text{ m}$$

et dans le deuxième cas,

$$y = 22(2{,}51)\sin(0{,}9966) - 4{,}905(2{,}51)^2 \approx 15{,}46 \text{ m}.$$

On ne retient donc que $\theta \approx 57°$ puisque dans l'autre cas, l'obus frappe le mur.



(c) $\frac{\pi}{4} = 45°$

Rép. 8.52 environ 25,94 km

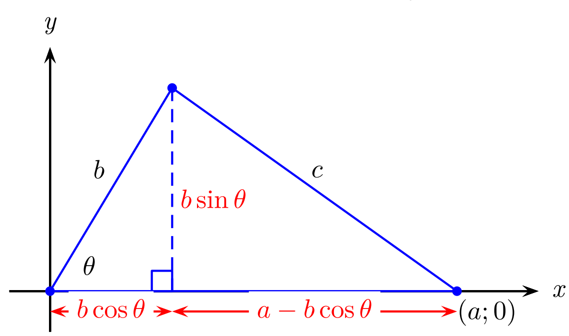
Rép. 8.53 (a) $\approx 46°$
(b) $\approx 114°$
(c) On obtient plutôt un angle aigu $\approx 66°$. Pour obtenir le bon angle, il faudrait calculer

$$180° - 66° = 114°.$$

La fonction $\sin^{-1}(x)$ ne donne que des angles aigus tandis que $\cos^{-1}(x)$ donne des angles aigus et obtus.

Rép. 8.54 (a) $\approx 41{,}9°$
(b) $\approx 9{,}22$ m
(c) $\approx 9{,}22$ m
(d) La loi du sinus, car l'angle connu n'est pas entre les deux segments dont on connait la longueur.
(e) $\approx 26{,}49$ m^2

Rép. 8.55 À l'aide des rapports trigonométriques dans les triangles rectangles, on trouve que la longueur du côté opposé à l'angle θ est $b\sin\theta$ et que celle de son côté adjacent est $b\sin\theta$.



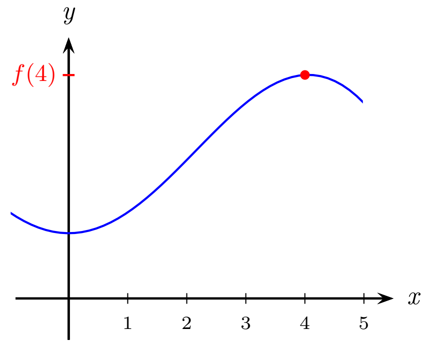
Par Pythagore, on trouve $c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$. En développant et en simplifiant, on retrouve la loi des cosinus.

$$\begin{aligned}
c^2 &= (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2 && \text{on utilise le théorème de Pythagore}\\
&= b^2\sin^2\theta + a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta && \text{on développe}\\
&= b^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + a^2 - 2ab\cos\theta && \text{on met en évidence } b^2\\
&= b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta && \text{on utilise l'identité } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta && \text{on commute}
\end{aligned}$$

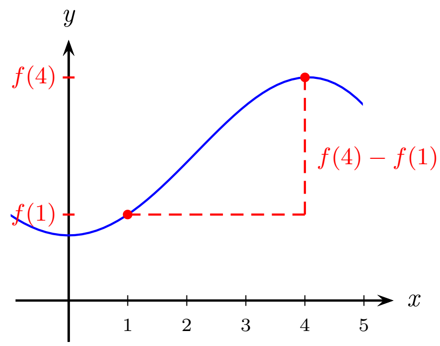
Rép. 8.56 $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

Chapitre 9

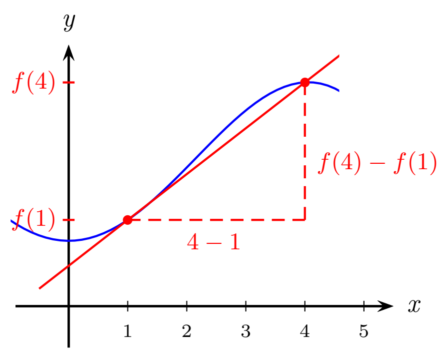
Rép. 9.1 (a) $f(4)$



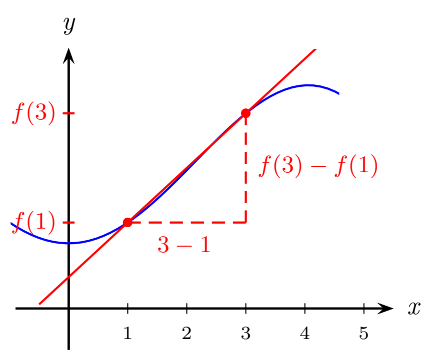
(b) $f(4) - f(1)$



(c) $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ est la pente de la droite sécante passant par les points $(1; f(1))$ et $(4; f(4))$.



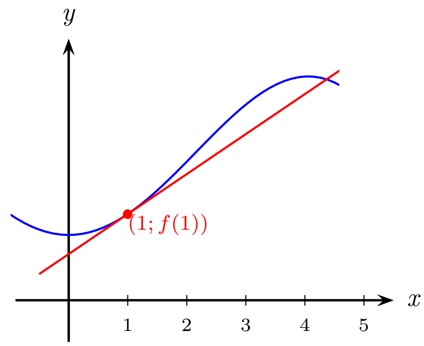
(d) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ est la pente de la droite sécante passant par les points $(1; f(1))$ et $(3; f(3))$.



(e) $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ est la pente de la droite sécante passant par les points $(1; f(1))$ et $(2; f(2))$.

(f) $\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}$ est la pente de la droite sécante passant par les points $(1; f(1))$ et $(1{,}5; f(1{,}5))$.

(g) $f'(1)$ est la pente de la droite tangente passant par le point $(1; f(1))$.

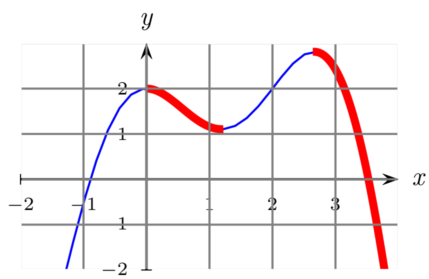


Rép. 9.2

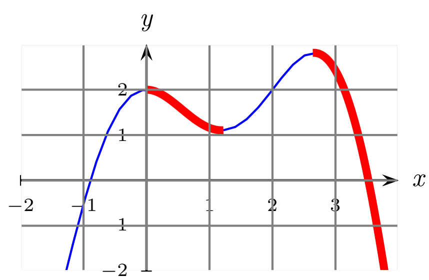
(a) $f(-3) \approx 8$
(b) $f'(-3) \approx -14$
(c) $f(0) \approx -5$
(d) $f'(0) \approx -1$
(e) $f(2) \approx -5$
(f) $f'(2) \approx 3$
(g) $f(3) \approx 2$
(h) $f'(3) \approx 13$
(i) $f(x) = 0$ lorsque $x \approx -2{,}2$ et $x \approx 2{,}8$
(j) $f'(x) = 0$ pour $x \approx 1{,}3$
(k) $f(x)$ est minimale en $x \approx 1{,}3$ et $f(1{,}3) \approx -7$, tandis que $f'(1{,}3) \approx 0$

Rép. 9.3

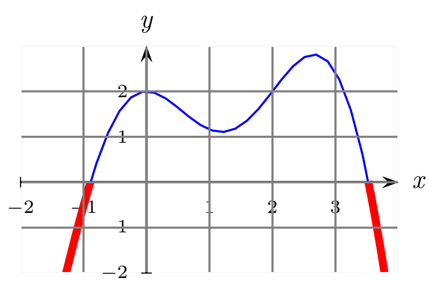
(a) Les points de la courbe où la dérivée est négative



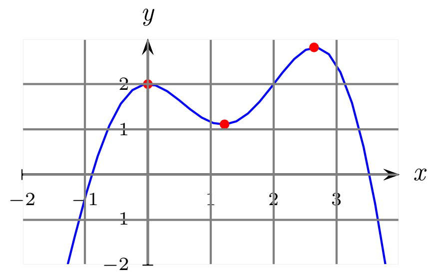
(b) Les points de la courbe où la fonction est décroissante



(c) Les points de la courbe où la valeur de la fonction est négative



(d) Les points de la courbe où la dérivée est zéro



Rép. 9.4 (a) Lorsque le prix d'un article est 150 \$, 2000 articles sont vendus.

(b) Lorsque le prix d'un article passe de 150 à 155 \$, on vendra en moyenne 27 articles de moins pour chaque \$ d'augmentation du prix.

(c) Environ 25 articles de moins sont vendus lorsque le prix unitaire passe de 150 \$ à 151 \$.

(d) Si on utilise $f(150) = 2000$ et $TVM_{[150,155]} = -27$ et qu'on approxime la courbe des ventes par la droite sécante de pente -27 passant par le point $(150; 2000)$, on trouve que cette droite est d'équation $y = 2000 - 27(p - 150)$. En l'évaluant en $p = 154$, on trouve $q(154) \approx 1892$ articles vendus.

Si on utilise $f(150) = 2000$ et $f'(150) = -25$ et qu'on approxime la courbe des ventes par la droite tangente en $p = 150$, on trouve $y = 2000 - 25(p - 150)$ et le nombre d'articles vendus sera environ $q(154) \approx 2000 - 25(4) = 1900$.

Rép. 9.5 (a) À 6 m de profondeur, la pression est de 161 kPa.

(b) Les unités sont kPa/m et $TVM_{[6;9]} = 10{,}7$ signifie que lorsque la profondeur passe de 6 à 9 m, la pression augmente en moyenne de 10,7 kPa par m de profondeur supplémentaire.

(c) Les unités sont kPa/m et $P'(6) = 10$ signifie qu'à 6 m de profondeur, la pression augmente d'environ 10 kPa par m. Ainsi, la pression à 7 m de profondeur sera d'environ 171 kPa, à 8 m elle sera d'environ 181 kPa, ...

(d) La droite tangente à la courbe de pression P en $d = 6$ est $y = 161 + 10(d - 6)$. En l'évaluant en $d = 9$, $P(9) \approx 161 + 10(9 - 6) = 191$ kPa.

Rép. 9.6 (a) $f'(t) > 0$ puisque la température du plat croît.

(b) Les unités sont °C/min et $f'(20) = 1{,}1$ °C/min signifie qu'après 20 minutes dans le four, la température du plat croît à un rythme de 1,1°C/min.

(c) L'équation de la tangente de pente 1,1 passant par le point $(20; 30)$ est $y = 30 + 1{,}1(t - 20)$. En résolvant l'équation $75 = 30 + 1{,}1(t - 20)$ pour t, on trouve $t \approx 61$ minutes.

Rép. 9.7 (a) $t = 3$ s (b) $t = 9$ s (c) $t = 14$ s

Rép. 9.8 (a) $f'(2) = 5$

(b) $f'(-1) = -7$

(c) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3$

Rép. 9.9 (a) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-1}{x^2 + x\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

(b) En utilisant la pente $a = f'(-3) = -1/9$ et le point $(-3; -1/3)$ on trouve $y - (-1/3) = -1/9(x - (-3)) \Longleftrightarrow y = -\frac{x+6}{9}$

Rép. 9.10 (a) $f'(x) = -2$

(b) $f'(x) = 6x - 2$

(c) $f'(x) = 0$

(d) $f'(x) = 20x^4 + 3x^2 - 1$

(e) $f'(x) = \frac{1}{4}(20x^4 + 3x^2 - 1)$

(f) $V'(r) = 4\pi r^2$

(g) $f'(x) = -6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

(h) $f'(x) = [7x + \frac{3}{5}x^{-1}]' = 7 - \frac{3}{5x^2}$

(i) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

(j) $y' = -\frac{2}{3x^2} + \frac{8}{5x^3}$

(k) $f'(x) = \frac{7}{2}x^{5/2}$

(l) $f'(x) = -\frac{21}{2}x^{-9/2}$

(m) $f'(x) = -\frac{2}{3x^{8/3}}$

(n) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}$

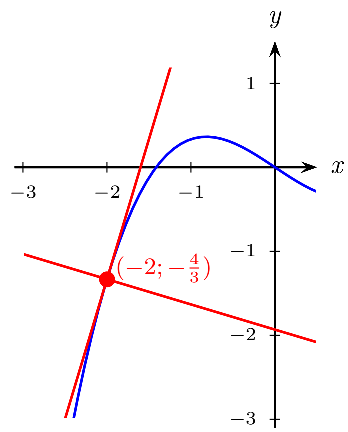
(o) $y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{t^3}}$

(p) $f'(x) = \frac{7}{6x^{2/3}} + \frac{1}{2x^2}$

Rép. 9.11 (a) $y + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}(x+2) \Longleftrightarrow y = \frac{10x+16}{3}$

(b) $y + \frac{4}{3} = -\frac{3}{10}(x+2) \Longleftrightarrow y = -\frac{3}{10}x - \frac{29}{15}$

(c) Attention ! Pour que les angles ne soient pas déformés, les échelles de votre fenêtre graphique doivent être identiques en x et en y.



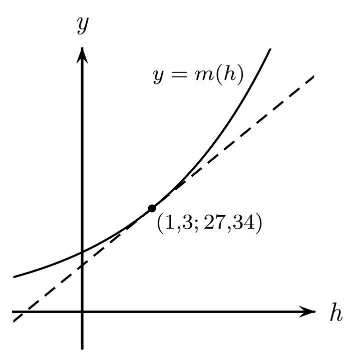
Rép. 9.12 (a) $f'(-1) = -11$ donc f est décroissante en $x = -1$

(b) $f'(-1) = 12$ donc f est croissante en $x = -1$

Rép. 9.13 $m'(1{,}3) = 4{,}6e^{1{,}84(1{,}3)} \approx 50{,}3$ kg/m

Un enfant aura une masse d'environ 503 g de plus pour chaque cm de taille supplémentaire à 1,3 m. Il s'agit de la pente de la droite tangente en $(1{,}3; 27{,}34)$.

La linéarisation de la fonction $m(h)$ approxime la courbe par la tangente au point $(1{,}3; 27{,}34)$ et non par la sécante comme à l'exercice 7.34.



Bibliographie

[1] Blitzer, R. *Precalculus.* New Jersey : Prentice-Hall, 2001.

[2] Bourget, B., Gagnon, P., et al. *Mathématique 064-424.* Montréal : Lidec, 1986.

[3] Hamel, J. *Mise à niveau mathématique.* Montréal : Éditions du renouveau pédagogique (ERPI), 2e édition, 2017.

[4] Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., et al. *Calcul différentiel et intégral : fonctions d'une variable (Le projet Harvard).* Montréal : Chenelière/McGraw-Hill, 1998. Supervision de l'édition française : Michel Beaudin, École de technologie supérieure.

[5] Stewart, J. *Calcul différentiel.* Montréal : Groupe Modulo inc., 2013. Supervision de l'édition française : Stéphane Beauregard et Chantal Trudel, Collège Bois-de-Boulogne.