1- a) en posant $u = t^2$ on trouve $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{9}{2}\right)$

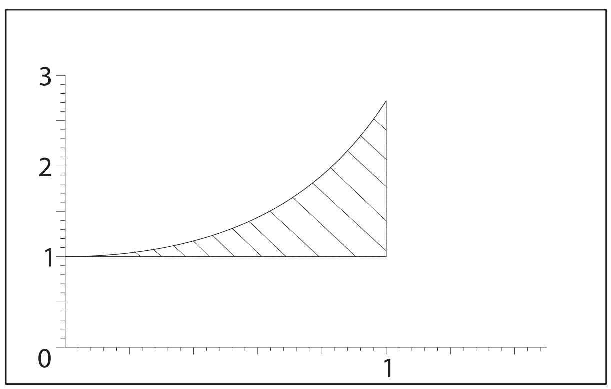
b) en complétant le carré $3+2t-t^2 = -\left(t^2-2t-3\right) = -\left[(t-1)^2-4\right]$ et en posant $u = t-1$ on trouve $\int \frac{2u}{\sqrt{4-u^2}}du + \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} = -2\sqrt{4-(t-1)^2} + \arcsin\left(\frac{t-1}{2}\right) + C$

c) après simplification $\frac{e^{2x}-1}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} = e^x - e^{-x}$ on obtient la réponse $e^x + e^{-x} + C$

d) en posant $u = t^2 - 1$, on trouve $\left.\frac{(t^2-1)^4}{2}\right|_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$

2- Avec le graphe on voit que $a = 0$ et $b = 1$; entre ces valeurs, la fonction est positive (donc l'aire est positive) et la fonction n'existe pas à l'extérieur de ces deux valeurs. La valeur obtenue est $\frac{\pi}{8} = 0.392699$

3- Voici la région



b) aire sera : $\int_0^1 \left(e^{x^2}-1\right)dx = 0,46265$

c) avec un rectangle vertical, où $R = 2$ et $r = 3 - e^{x^2}$, on trouve $V = 4,4342$

d) longueur sera $\int_0^1 \sqrt{1+\left(2xe^{x^2}\right)^2}\,dx = 2.1276$

4- a) les 2 premières sont impropres

b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x-3)^{1/3}}dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^{1/3}}dx + \int_3^a \frac{1}{(x-3)^{1/3}}dx + \int_a^\infty \frac{1}{(x-3)^{1/3}}dx$ où $a \in]3,\infty[$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

5- a) la somme est $\dfrac{1}{1-2x}$ si $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

b) en combinant la série de e^x et de e^{-x} selon la définition citée on trouve

$$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

c) en multipliant la série de $\cos(x)$ par x^3 on trouve $f(x)=x^3-\dfrac{x^5}{2!}+\dfrac{x^7}{4!}-\dfrac{x^9}{6!}+\cdots$

donc $\displaystyle\int_0^{0.5} x^3\cos(x)\,dx=\int_0^{0.5} x^3-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{4!}-\frac{x^9}{6!}+\cdots dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6\cdot 2!}+\frac{x^8}{8\cdot 4!}-\frac{x^{10}}{10\cdot 6!}+\cdots\Big|_0^{0.5}$

en prenant les 3 premiers termes, on obtient 0,01434326, un estimé dont l'erreur est au maximum le 4e terme évalué en $x=0,5$ (critère de la série alternée), donc une erreur d'au maximum 0,0000001356

d) après avoir calculé les 3 premières dérivées et les avoir évaluées en $t=0$ on trouve :

$$f(t)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}t+\frac{8}{3^3}\frac{t^2}{2!}-\frac{48}{3^4}\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

e) en utilisant le test montré dans les notes de cours de MAT-145,

$$u_n=(-1)^{n+1}\frac{3^n x^n}{n} \quad \text{et} \quad u_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$$

donc $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{3^n x^n}\right|=\left|3x\frac{n}{n+1}\right|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|3x\frac{n}{n+1}\right|=R=|3x|$ et la série converge si

$$|3x|<1 \;\Rightarrow\; -1<3x<1 \;\Rightarrow\; \frac{-1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

OU selon une autre approche :

ici, $C_n=\dfrac{(-1)^{n+1}3^n}{n}$ et $C_{n+1}=\dfrac{(-1)^{n+2}3^{n+1}}{n+1}$, donc $\dfrac{|C_n|}{|C_{n+1}|}=\dfrac{(n+1)}{3\cdot n}$

le rayon de convergence est donc $\dfrac{1}{3}$ et la série converge si $|x|<\dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{-1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$